Nociones básicas de los números reales

1 El conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$

El primer conjunto de números con el que se trabaja es el conjunto de los *Números Naturales*, que denotamos $\mathbb{N}$. Se define de forma axiomática [1] con los llamados *Axiomas de Peano*. Su descripción matemática viene dada por:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4...\}$$

En el sistema de los números naturales ecuaciones del tipo $x + 1 = 0$, no tienen solución, así como otras situaciones de la vida real como, deudas, depresiones geográficas, temperaturas bajo cero, que no es posible representarlas con los números naturales. Surge la necesitad de introducir números para representar las situaciones descriptas. Es así que se añade signo y el número 0, para obtener al conjunto de los *Números Enteros*, que denotamos $\mathbb{Z}$, definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} := \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4...\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Por definición, los números naturales están contenidos en los números enteros, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Al estudiar la operación de multiplicar en los números enteros, se observa que la operación inversa, la división, no es siempre posible. Por ejemplo, dividir 3 entre 2, carece de sentido en los enteros. Entonces surge la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números, los *Números Racionales*, o aquellos que pueden ser expresados mediante una fracción, y denotamos $\mathbb{Q}$. Se entiende, cuando se habla de un número racional es un conjunto que incluye una fracción y todas sus fracciones equivalentes. Por lo tanto se verifica que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Pero, ¿Es posible representar todos los números mediante una fracción? No, números tan importantes como $\pi, \sqrt{2}, e$, etc. no pertenecen al conjunto de los números racionales, surgiendo así el conjunto de los *Números Irracionales*, al que denotamos $\mathbb{I}$.

La unión de estos dos conjuntos da lugar al conjunto de los *Números Reales*, $\mathbb{R}$ de forma que: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Y por lo tanto, las relaciones de inclusión que se tienen son:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Por sus definiciones, se sobreentiende que si un números es racional entonces no puede ser irracional, por lo tanto se verifica que: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$

Axiomas de álgebra

Asumimos la existencia de dos operaciones, llamadas suma y producto, tales que a cada par de números reales x e y la suma $x + y$ y el producto xy son números reales unívocos determinados por x e y, y satisfacen los siguientes axiomas:

Axioma 1 (Leyes conmutativas)**.** $x + y = y + x,\ xy = yx\ \forall x, y \in \Re$

Axioma 2 (Leyes asociativas)**.** $(x + y) + z = x + (y + z),\ (xy)z = x(yz)\ \forall x, y, z \in \Re$

Axioma 3 (Ley distributiva)**.** $(x + y) + z = x + (y + z)\ \forall x, y, z \in \Re$

Axioma 4 (Elemento neutro de la suma)**.** *Dados $x, y \in \Re$ existe $z \in \Re$ tal que $x + z = y$. Se denota $z = y - x$. El elemento $x - x$ es denotado por 0. Se puede demostrar que 0 no depende de la elección de $x \in \Re$.*

Axioma 5 (Elemento inverso del producto)**.** *Si $x, y \in \Re$ y $x \neq 0$ entonces existe $z \in \Re$ tal que $xz = y$. Se denota $z = \frac{y}{x}$. El elemento $\frac{x}{x}$ es denotado por 1. Se puede demostrar que 1 no depende de la elección de $x \in \Re$.*

[1] RAE: Proposición tan clara y evidente que se admite sin demostración.

Axiomas de orden

Axioma 6. *Se verifica una, y solamente una de las siguientes relaciones:* $x = y,\ x < y\ \vee\ x > y$

Axioma 7 (Monotonía de la suma)**.** *Si* $x < y$*, entonces, para cada* $z \in \Re,\ x + z < y + z$

Axioma 8. *Si* $x > 0$ *e* $y > 0$ *entonces* $x + y > 0,\ xy > 0$

Axioma 9 (Transitiva)**.** *Si* $x > y$ *e* $y > z$ *entonces* $x > z$

1.1 Cotas y extremos

Definición 1.1. *Un conjunto A está* ***acotado superiormente*** *si existe un real M tal que todo los elementos del conjunto A son menores o iguales que M.*

A acotado superiormente $(\overline{acot})$ *si* $\exists\ M \in \Re\ /\ \forall x \in A \implies x \leq M$

Definición 1.2. *Un conjunto A está* ***acotado inferiormente*** *si existe un real m tal que todo los elementos del conjunto A son mayores o iguales que m.*

A acotado inferiormente $(\underline{acot})$ *si* $\exists\ m \in \Re\ /\ \forall x \in A \implies x \geq m$

Definición 1.3. *Un conjunto A está* ***acotado*** *si está actoado superior e inferiormente.*

A acotado $\iff \exists\ m,\ M \in \Re\ /\ \forall x \in A \implies m \leq x \leq M$

Definición 1.4. *Al conjunto de reales mayores o iguales que todos los elementos de un conjunto lo llamaremos* ***conjunto de las cotas superiores***

Definición 1.5. *Al conjunto de reales menores o iguales que todos los elementos de un conjunto lo llamaremos* ***conjunto de las cotas inferiores***

Definición 1.6. *Llamamos* ***extremo superior o supremo*** *a la menor de las cotas superiores*

$E = \overline{ext}(A) \iff$ *E es la menor de las cotas superiores* $\overline{cot}$

Definición 1.7. *Llamamos* ***extremo inferior o ínfimo*** *a la mayor de las cotas inferiores*

$e = \underline{ext}(A) \iff$ *e es la mayor de las cotas inferiores* $\underline{cot}$

Definición 1.8. *Si el extremo superior pertenece al conjunto A, lo llamaremos* ***máximo****.*

$\overline{ext}(A) \in A \implies \overline{ext}(A) = Máx$

Definición 1.9. *Si el extremo inferior pertenece al conjunto A, lo llamaremos* ***mínimo****.*

$\underline{ext}(A) \in A \implies \underline{ext}(A) = min$

1.1.1 Axioma del extremo superior

Todo conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente tiene *extremo superior o supremo.*

1.2 Propiedades de los números reales.

Los números reales se representan gráficamente en la *recta real*. Los subconjuntos de reales se representan gráficamente a través de **intervalos**. De esta manera un intervalo I es el conjunto formado por todos los números reales comprendidos entre dos elementos dados, que reciben el nombre de **extremos** del intervalo. La propiedad de los números reales conocida como *Densidad de los números reales*, asegura que entre dos números reales cualesquiera, siempre existen infinitos números reales entre ellos.

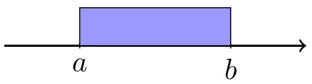
$$\text{Dados } a, c \in I,\ \exists\, b \in I \ /\ a < b < c$$

Hay distintos tipos de intervalos, diferenciados según sus extremos. Los intervalos pueden estar *acotados* si ambos extremos son números reales o pueden estar *no acotados* si al menos uno de sus extremos es infinito.

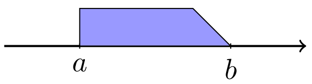
Intervalos acotados
Hay cuatro tipos diferentes de intervalos acotados.

$[a, b] := \{x \in \Re /\ a \leq x \leq b\}$ que llamaremos ***intervalo cerrado.***

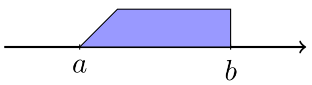
En este caso comprende a todos los números reales entre a y b, incluidos a y b.

Se representa graficamente 

$[a, b) = \{x \in \Re /\ a \leq x < b\}$ que llamaremos ***intervalo semicerrado o semiabierto.***

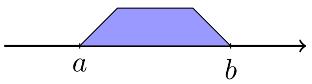
Se representa graficamente 

$(a, b] = \{x \in \Re /\ a < x \leq b\}$ que llamaremos ***intervalo semicerrado o semiabierto.***

Se representa graficamente 

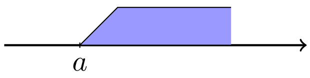
$(a, b) = \{x \in \Re /\ a < x < b\}$ que llamaremos ***intervalo abierto acotado.***

Se define como todos los números reales comprendidos entre a y b, sin incluir ni a ni b.

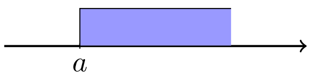
Se representa graficamente 

Intervalos no acotados
Los intervalos son no acotados cuando al menos uno de sus extremos es infinito. Se identifican cinco intervalos no acotados diferentes.

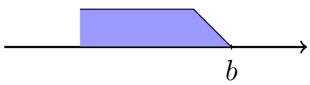
$(a, \infty) := \{x \in \Re / \ x > a\}$ que llamaremos ***intervalo no acotado.***

Se representa graficamente 

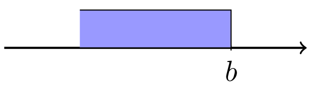
$[a, \infty) := \{x \in \Re / \ x \geq a\}$ que llamaremos ***intervalo no acotado.***

Se representa graficamente 

$(-\infty, b) := \{x \in \Re / \ x < b\}$ que llamaremos ***intervalo no acotado.***

Se representa graficamente 

$(-\infty, b] := \{x \in \Re / \ x \leq b\}$ que llamaremos ***intervalo no acotado.***

Se representa graficamente 

$(-\infty, \infty) := \Re$ que llamaremos ***intervalo no acotado.***

El conjunto solución de una inecuación o desigualdad está dado por un intervalo. Se detallan dos propiedades consecuencias de los *Axiomas de orden.*
Sean $x, y, a \in \Re$

1. Si $x < y$, entonces $x + a < y + a$. También vale si $x \leq y$, entonces $x + a \leq y + a$.
2. Si $x < y, \ a > 0 \implies ax < ay$. Sin embargo, si $a < 0$, entonces la desigualdad cambia, $ax > ay$.

Dada una desigualdad, se puede sumar o restar la misma cantidad a ambos lados sin que la desigualdad cambie. Lo mismo ocurre si se multiplica o divide por la misma cantidad, siempre que esta sea positiva. Sin embargo, si se multiplica o divide por una cantidad negativa, el símbolo de la desigualdad cambia de orden.

1.3 Valor absoluto

El valor absoluto de un número real se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A partir de la definición se pueden comprobar las siguientes equivalencias. $\forall x \in \Re$ y $b > 0$

$$|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b \iff x \in [-b, b] \tag{1}$$

$$|x| \geq b \iff \begin{array}{c} x \geq b \\ \nearrow \\ \searrow \\ x \leq -b \end{array} \iff x \in (-\infty, -b] \cup [b, \infty) \tag{2}$$

Las desigualdades también valen cuando no son estrictas, en cuyo caso los intervalos que se obtienen serán abiertos.
Las desigualdades se utilizaran para quitar de las desigualdades los valores absolutos, siempre que sea posible. Cuando aparezcan sumas o restas de valores absolutos, no pueden aplicarse directamente, entonces, habrá que recurrir a la definición.

A continuación se enumerar algunas propiedades útiles para resolver desigualdades con valores absolutos:

1. $|x| \geq 0 \ \forall x \in \Re$
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad triangular
3. $|x - y| \geq ||x| + |y||$
4. $|x - a| < b \implies a - b < x < a + b$

Para poder aplicar las equivalencias el primer paso es aislar el valor absoluto en uno de los miembros de la desigualdad. Luego, se podrán aplicar las equivalencias.

Ejemplo 1.1. *Resolver la siguiente inecuación de valor absoluto* $|2x + 1| < 5$
Ya que el valor absoluto esta aislado en uno de los miembros de la desigualdad, es posible aplicar las equivalencias. En este caso se utiliza la ecuación 1. $-5 < 2x + 1 < 5 \iff -5 - 1 < 2x < 5 - 1 \iff -6 < 2x < 4 \iff -3 < x < 2 \iff x \in (-3, 2)$

Ejemplo 1.2. *Resolver la siguiente inecuación de valor absoluto* $|3 - 4x| \geq 6$
Ya que el valor absoluto esta aislado en uno de los miembros de la desigualdad, es posible aplicar las equivalencias. En este caso se utiliza la ecuación 2. Al aplicar esta equivalencia, surge la necesidad de resolver dos desigualdades. $\begin{array}{ccc} |3 - 4x| \geq 6 & \implies & 3 - 4x \geq 6 \\ & \implies & 3 - 4x \leq -6 \end{array}$ *Primero se busca la solución de:* $3 - 4x \geq 6 \iff 3 - 6 \geq 4x \iff \frac{-3}{4} \geq x \iff x \in (-\infty, \frac{-3}{4}]$
Luego se busca la solución de: $3 - 4x \leq -6 \iff 3 + 6 \leq 4x \iff \frac{9}{4} \leq x \iff x \in [\frac{-3}{4}, \infty)$
Por lo tanto, $|3 - 4x| \geq 6 \iff x \in (-\infty, \frac{-3}{4}] \cup [\frac{-3}{4}, \infty)$

References

[1] AGUD ALBESA, L., MORA CARBONELL, M. (2016). *Matemáticas básicas para ingenierías. Ejercicios resueltos.* Valencia: Universitat Politècnica de València

[2] LIMA, ELON LAGES (1997). *Análisis Real, Volumen 1.* Instituto de Matemática y Ciencias Afines, UNI, 1997. 240pp. (Colección Textos del IMCA)

[3] APOSTOL, T.M. (1967) *Calculus: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra.*