

Práctico 6

Producto escalar y vectorial

1. Producto escalar y producto vectorial

1. Dados los vectores $u = (2, -1, 7)$, $v = (1, 1, -3)$ y $w = (1, -1, 2)$ calcular:

a) $\|u\|$, $\|v\|$, $\langle u, v \rangle$, $u \wedge v$, $\|u \wedge v\|$.

b) $u \wedge (v \wedge w)$ y $(u \wedge v) \wedge w$. Observar que el producto vectorial no es asociativo.

2. **Productos notables.**

Sean x e y vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demostrar que se satisfacen las igualdades

a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

b) $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

c) **Regla del paralelogramo.** $\frac{1}{2}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2$

3. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es igual a $\pi/4$, $\|u\| = 3$ y que $u - v$ es perpendicular a u .

b) Hallar $\|v\|$ y $\|u + v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\pi/4$, que $\|u\| = 3$ y que el ángulo entre $u + v$ y u es igual a $\pi/6$.

c) ¿Es cierto que si v es un vector no nulo entonces la igualdad $\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle$ implica $u = w$? ¿Qué puede decirse de $u - w$?

4. Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^3$, hallar:

a) todos los vectores w para los que se satisface $u \wedge w = u \wedge v$.

b) todos los vectores w para los que se satisface $\langle u, w \rangle = \langle u, v \rangle$.

5. Calcular el producto vectorial

$$(a_{11}, a_{12}, 0) \wedge (a_{21}, a_{22}, 0)$$

y usarlo para analizar la interpretación del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

como un área orientada.

6. **Matriz ortogonal.** Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ tres vectores no nulos y ortogonales dos a dos. Se define la matriz A como

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que si u , v y w tienen norma 1 entonces $A^{-1} = A^T$.

b) Determinar la inversa en el caso general, es decir, cuando la norma de los vectores no es necesariamente 1.

c) Demostrar que $|\det(A)|$ es el volumen del paralelepípedo que tiene a $(0, 0, 0)$ como vértice y los vértices adyacentes a este son (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) , (w_1, w_2, w_3) .

2. Revisitando ecuaciones de rectas y planos

1. Ecuaciones de planos y vectores normales.

- a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-3, 1, 0)$ y es perpendicular a $(-1, 2, 3)$.
- b) Expresar el plano π de ecuación $x - y + 3z = 1$ como $\langle P - P_0, N \rangle = 0$, donde $P = (x, y, z)$ es un punto genérico, N es un vector perpendicular al plano, y P_0 es un punto a determinar.
- c) Hallar dos versores que sean perpendiculares al plano $2x + y = 0$. Recordar que un versor es un vector de norma 1.

2. Demostrar que las siguientes rectas son ortogonales.

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

3. En cada caso, hallar las ecuaciones reducida y paramétrica de la recta que satisface las condiciones especificadas:

- a) pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + y + 3z - 1 = 0$.
- b) Pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, se intersecta con la recta

$$P = (1, -1, 3) + \lambda(3, 2, -5),$$

y es ortogonal a la recta

$$\begin{cases} x = -1 + 6\lambda, \\ y = -3 - 2\lambda, \\ z = 2 - 3\lambda. \end{cases}$$

- c) Pasa por el punto $(1, 1, 1)$ e intersecta perpendicularmente a la recta

$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

- d) Pasa por el punto $(-4, -5, 3)$ e intersecta perpendicularmente a la recta de ecuación paramétrica

$$P = (-1, -3, 2) + \lambda(3, -2, -1).$$

3. Distancias entre elementos geométricos

1. Determinar la distancia entre los planos π_1 y π_2 siendo

$$a) \quad \pi_1 : x + y + z = 1, \pi_2 : x + y + z = 5 \quad b) \quad \pi_1 : x + 2y - z = 1, \pi_2 : 2x + 4y - 2z = -1$$

2. Determinar la distancia entre el plano π y el punto P , siendo

$$a) \quad \pi : x + y + z = 0, P = (2, 2, 4) \quad b) \quad \pi : x = 0, P = (2, 3, 4)$$

3. Hallar la distancia entre las rectas r y s donde

$$a) \quad r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 0), s : (x, y, z) = (3, 0, 0) + \mu(0, 1, 1)$$

$$b) \quad r = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}, s = \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 10 \end{cases}$$

4. Hallar la distancia entre la recta r y el punto P siendo

$$a) \quad P = (1, 3, 2), r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 3, 2) \quad b) \quad P = (1, 0, 1), s = \begin{cases} y + z = 2 \\ y - z = 10 \end{cases}$$