Depto. Investigación Operativa. InCo. Facultad de Ingeniería. UdelaR

Prueba de Optimización de Problemas de Producción

17 de Octubre de 2022

Indicaciones

- Duración de la evaluación: 2 horas.
- **La evaluación es sin material**.
- Escribir las hojas de un solo lado.
- Numerar las hojas y escribir en la primera el total de hojas entregadas.
- Poner nombre y cédula de identidad en el ángulo superior derecho de cada hoja.
- **Justificar las respuestas**.

Problema 1 [10 puntos]

Problema 1

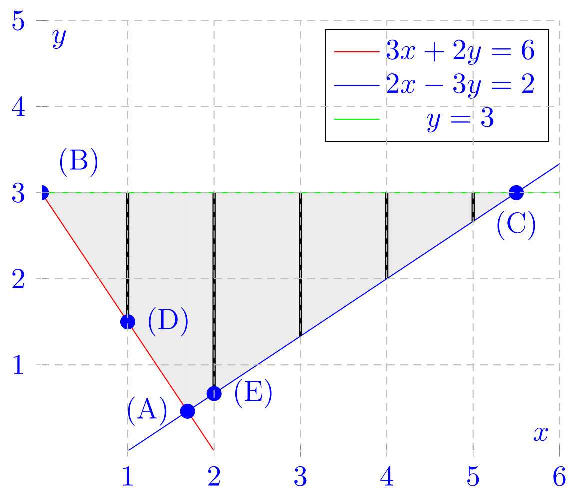
Sea el conjunto $XY_L = \{(x, y) : 3x + 2y \geq 6, 2x - 3y \leq 2, x \geq 0, 0 \leq y \leq 3\}$.

a) Representar gráficamente los conjuntos XY_L y $XY = XY_L \cap \{x \in \mathbb{Z}\}$.

b) Determinar la solución óptima de $P = \{\min(x + y) : (x, y) \in XY\}$ aplicando Branch-and-Bound, resolviendo los subproblemas generados de forma gráfica. Dibujar el árbol de subproblemas generados.

Solución

a) El área sombreada en el gráfico a continuación se corresponde con el conjunto XY_L. El conjunto XY está representado por las líneas de color negro.



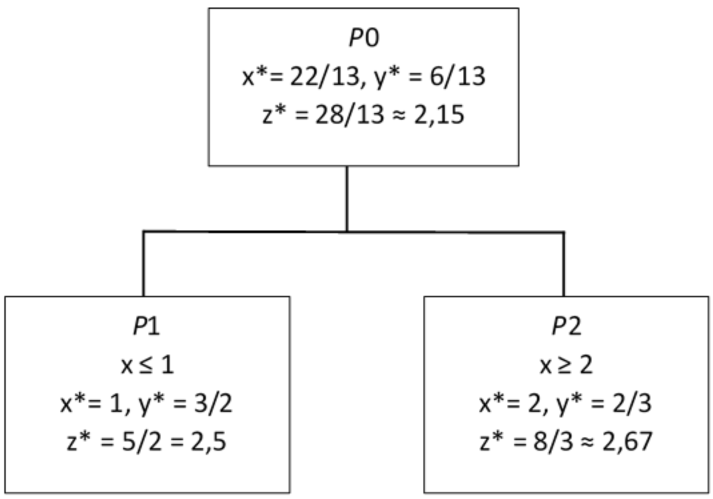
b) Para resolver el problema P con Branch-and-Bound, empezamos por relajar el problema eliminando las restricciones de integralidad, es decir resolviendo $P_0 = \{\min(x+y) : (x,y) \in XY_L\}$. Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, sabemos que una solución óptima de P_0 está en uno de los vertices de su región factible, es decir XY_L. Los vértices de XY_L son los puntos $(A) = (22/13, 6/13)$, $(B) = (0,3)$ y $(C) = (11/2, 3)$, señalados en la gráfica del apartado anterior. La solución óptima de P_0 es $(x_0^*, y_0^*) = (22/13, 6/13)$, punto (A) de la gráfica del apartado anterior, con valor óptimo $z_0^* = 28/13 \approx 2{,}15$. Como el valor de $x_0^* \approx 1{,}69$ no es entero, debemos ramificar en la variable x y se generan entonces los subproblemas $P_1 = \{\min(x+y) : (x,y) \in XY_L, x \leq 1\}$ y $P_2 = \{\min(x+y) : (x,y) \in XY_L, x \geq 2\}$.

La solución óptima de P_1 es $(x_1^*, y_1^*) = (1, 3/2)$, punto (D) de la gráfica del apartado anterior, con valor óptimo $z_1^* = 5/2 = 2{,}5$. Como x_1^* es entera, la solución (x_1^*, y_1^*) es factible para P, por lo cual no es necesario ramificar y generan otros subproblemas a partir de P_1.

La solución óptima de P_2 es $(x_2^*, y_2^*) = (2, 2/3)$, punto (E) de la gráfica del apartado anterior, con valor óptimo $z_2^* = 8/3 \approx 2{,}67$. Como x_2^* es entera, la solución (x_2^*, y_2^*) es factible para P, por lo cual no es necesario ramificar y no se generan más subproblemas a partir de P_2. Alternativamente, se puede argumentar que no es necesario generar más subproblemas a partir de P_2 porque el valor objetivo de su solución óptima es peor (valor objetivo mayor en este caso) que el de la solución óptima de P_1, que es factible para el problema original P.

Como $z_2^* > z_1^*$, la solución óptima de P es $(x^*, y^*) = (x_1^*, y_1^*) = (1, 3/2)$, punto (D) de la gráfica del apartado anterior, con valor óptimo $z^* = z_1^* = 5/2 = 2{,}5$.

El árbol de subproblemas generados es el siguiente:



Problema 2 [10 puntos]

Dado el problema de programación lineal

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & 3x+2y & \\ \text{s.a} & x+y\geq 4 & (1)\\ & 2x+y\geq 6 & (2)\\ & x,y\geq 0. & \end{cases}$$

a) Dada la inversa de la base B, $B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, demostrar que es una base factible y óptima de (P), utilizando para ello las condiciones de factibilidad y optimalidad en las que se basa el método Simplex.

b) Determinar la solución óptima y el valor del óptimo del problema dual del problema (P).

c) Determinar cuanto varía el valor del óptimo de (P) si el término independiente de la inecuación (1) incrementa en una unidad.

Solución

a) La forma estándard del problema (P) es

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & 3x+2y\\ s.a & \\ & x+y-w=4\\ & 2x+y-z=6\\ & x,y,w,z\geq 0\end{cases}$$

Condición de factibilidad: $x_B=B^{-1}b\geq 0$:

Se tiene que $B^{-1}b=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 2\end{pmatrix}\geq 0.$

Por lo que se cumple la condición de factibilidad.

Condición de optimalidad: $\overline{c}_N^{\tau}=c_N^{\tau}-pN\geq 0$, donde $p=c_B^{\tau}B^{-1}$.

Se tiene que $p=c_B^TB^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\end{pmatrix}.$

Se calcula $\overline{c}_N^{\tau}=c_N^{\tau}-pN=\begin{pmatrix} 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\end{pmatrix}\geq 0.$

Por lo tanto la base cumple la condición de optimalidad.

b) La solución óptima es $p=\begin{pmatrix} 1 & 1\end{pmatrix}$.

El valor del óptimo es $p^{\tau}b=\begin{pmatrix} 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 6\end{pmatrix}=10.$

c) El valor del óptimo incrementa en un unidad debido a la solución dual $p_1=1$ y a que la base sigue siendo óptima: $\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{5}\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 4\end{pmatrix}\geq 0.$

Problema 3 [10 puntos]

Una empresa desea manufacturar un producto a través del refinado y mezclado de cinco tipos de aceites. Los tipos de aceites se pueden dividir en dos categorías: aceites vegetables, y aceites no vegetales. Se pueden adquirir dos tipos de aceites vegetales: VEG1 y VEG2. A su vez, se pueden adquirir tres tipos de aceites no vegetales: NO_VEG1, NO_VEG2 y NO_VEG3.

Existen dos líneas de refinado dedicadas, una línea para el refinado de los aceites vegetales y otra para el refinado de los aceites no vegetales. La capacidad de la línea de aceites vegetales es de 200 toneladas de aceite, mientras que la línea de aceites no vegetales tiene capacidad de 250 toneladas.

El producto final se obtiene mezclando los aceites, de modo que el peso del producto final debe coincidir con el peso de los distintos tipos de aceites utilizados en su producción.

Cada tipo de aceite tiene una dureza determinada, que es independiente de la cantidad utilizada. A su vez, se conocen los costos de los aceites. Estos datos se presentan en la siguiente tabla:

	Costo (dólares por tonelada)	Dureza
VEG1	110	8.8
VEG2	120	6.1
NO_VEG1	130	2.0
NO_VEG2	110	4.2
NO_VEG3	115	5.0

El producto final tiene una dureza que queda determinada exclusivamente por las proporciones utilizadas de cada uno de los aceites en su producción. Se desea que la dureza del producto final se encuentre entre 4 y 6. El precio del producto final se fija en 150 dólares por tonelada.

Se desea determinar las cantidades a ser adquiridas de los distintos aceites, así como la cantidad en toneladas del producto final que se vende, de modo de maximizar las ganancias, sujeto a las restricciones de dureza, y las restricciones de capacidad de las líneas de refinado.

```
   No.   Row name    St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 ganancia     B        17592.6
     2 refinado_veg NU           200                         200       29.6296
     3 refinado_noveg
                    NU           250                         250       46.6667
     4 dureza_minima
                    B            900            -0
     5 dureza_maxima
                    NU             0                          -0        3.7037
     6 peso         NS             0            -0             =       172.222

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 x[VEG1]      B        159.259             0
     2 x[VEG2]      B        40.7407             0
     3 x[NO_VEG1]   NL             0             0                    -11.8519
     4 x[NO_VEG2]   B            250             0
     5 x[NO_VEG3]   NL             0             0                    -7.96296
     6 y            B            450             0
```

Se pide: Interpretar los resultados considerando los valores y propiedades del objetivo, las variables y las restricciones.

Solución

La ganancia máxima que se puede obtener cumpliendo con las restricciones del problema tiene un valor de 17592,6 dólares.

Las restricciones de refinado (*refinado_veg*, *refinado_noveg*) se encuentran activas (St. = NU), por lo que con la solución obtenida se utiliza al máximo la capacidad de ambas líneas. Por cada tonelada de capacidad adicional que se pudiera tener, se obtendría un beneficio de 29,6 y 46,6 dólares para las líneas de refinado vegetal y no vegetal respectivamente.

La restricción de dureza mínima del material no está activa (St. = B), por lo que la dureza del producto final es superior a la cota inferior fijada en 4. La dureza máxima se encuentra activa (St. = NU), por lo que la dureza del producto final tiene un valor de 6, que coincide con la cota superior fijada. Por cada unidad de dureza adicional que se pudiera tener, el objetivo mejoraría en 3,7 dólares.

La solución requiere comprar aceites vegetales en las siguientes cantidades: 159,2 toneladas de VEG1 y 40,7 toneladas de VEG2. A su vez, se compran 250 toneladas de aceite no vegetal NO_VEG2, mientras que no se compran los aceites NO_VEG1 y NO_VEG3. El peso del producto final es de 450 toneladas, que coincide con la suma de los pesos de los aceites utilizados

Los costos reducidos de las variables no básicas (St. = NL) son todos negativos, por lo que al tratarse de un problema de maximización, podemos afirmar que se ha alcanzado la solución óptima del problema.