INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROPIEDADES ÓPTICAS DE MATERIALES

Curso 2022

Primer Prueba

18 de Octubre de 2022

Ejercicio N° 1 – Modelo de Debye.

Un campo electrostático E_0 produce una polarización macroscópica (según la dirección del campo) $P_0 = \varepsilon_0\chi_0 E_0$, siendo χ_0 la susceptibilidad estática del material. Al apagar el campo en un instante $t = 0$ la polarización decrece exponencialmente con constante de tiempo τ (debido al rozamiento).

a) Halle la función respuesta $\kappa(\xi)$ para todo atraso temporal ξ.

SUGERENCIA: Suponga que ante la acción del campo que se anula instantáneamente $E(t) = E_0(1-\theta(t))$, siendo $\theta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$ la polarización del medio es $P(t) = P_0\, exp\left(-{}^{t}\!/\!{}_{\tau}\right)$ para $t > 0$. Para $t < 0$ $P(t) = P_0$.

b) Verifique que la susceptibilidad compleja $\hat{\chi}(\omega)$ es:

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{\chi_0}{1 - i\omega\tau}$$

c) Grafique parte real e imaginaria de la constante dieléctrica $\hat{\in}(\omega)$. Halle la frecuencia en que se encuentra el máximo de $Im\left[\hat{\in}(\omega)\right]$.

d) Estudie el límite de $\kappa(\xi)$, $Re[\in(\omega)]$ e $Im[\in(\omega)]$ en el límite que $\tau \to 0$.

e) Compare el resultado en el límite $\tau \to \infty$, $\chi_0 \to \infty$ con $\chi_0/\tau = A$ constante, con el resultado para un material óhmico de conductividad σ, permeabilidad μ_0 y permitividad ε_0; todas supuestas constantes independientes de la frecuencia. Interprete el significado de la constante A.

f) Calcule la función pérdida $LF = -\mathrm{Im}\left[{}^{1}\!/\!{}_{\hat{\in}(\omega)}\right]$ en el caso que $\chi_0 \ll 1$. Encuentre su valor máximo.

Ejercicio N° 2 – Modelo de Drude

Para un electrón de masa m y carga $-e$, ante un campo externo aplicado E y una fuerza disipativa de tiempo de relajación τ, la velocidad de desplazamiento v del electrón viene dada por la ecuación:

$$m\left(\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}\right)=-eE$$

A partir de dicha ecuación:

a) Demuestre que ante un campo de frecuencia ω, la conductividad a la frecuencia ω es:

$$\sigma(\omega)=\sigma(0)\left(\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\right),$$

siendo $\sigma(0)=n^*e^2\tau/m$, donde $n^* = N/V$ es la densidad volumétrica de electrones.

<u>NOTA</u>: No confundir la densidad de electrones n^* con el índice de refracción complejo, $\hat{n}$, o su parte real, $n(\omega)$.

b) Verifique si este resultado cumple la regla suma.

<u>NOTA</u>: La regla suma para $\hat{\chi}(\omega)=\chi'(\omega)+i\chi''(\omega)$ es: $\chi'(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\Omega\frac{\chi''(\Omega)}{\Omega}$.

c) Encuentre la constante dieléctrica $\hat{\in}(\omega)=\in'(\omega)+i\in''(\omega)$.

<u>NOTA</u>: Suponga $\in_\infty=1$.

d) Halle los límites (no nulos) de $\in'(\omega)$ y $\in''(\omega)$ para:

i. $\omega\tau$>>1 con ω>>ω_p,

ii. $\omega\tau$<<1 con ω<<ω_p.

siendo $\omega_p{}^2=\frac{n^*e^2}{m\varepsilon_0}=\frac{\sigma(0)}{\tau\varepsilon_0}$.

e) Calcule, en ambos límites, el coeficiente de absorción α.

f) Calcule la reflectancia del material en incidencia normal en ambos límites:

$$R=\left|\hat{r}\right|^2=\left|\frac{\hat{n}-1}{\hat{n}+1}\right|^2$$

Algunas relaciones que pueden ser de utilidad:

$$\ln(1+x) \cong x \qquad \exp(x) \cong 1+x \qquad th(x) \cong x$$

$$tg(x) \cong x \qquad sen(x) \cong x \qquad cos(x) \cong 1-\frac{x^2}{2} \qquad (1+x)^m \cong 1+mx$$

$$\sum_{m=0}^{N} x^m = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \qquad \int_0^\infty dx\, exp(-\alpha x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \int_0^\infty dx\, x^2 \exp(-\alpha x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}$$

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = -\frac{d}{dx}\ln\left(e^{-x}+1\right)$$

$$\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e^x}{e^x+1}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^2} = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} \qquad \int_b^c dx f(x)\delta(x-a) = \begin{cases} f(a) & si\ b < a < c \\ 0 & si\ a < b\ o\ a > c \end{cases}$$

$$\int_0^\infty d\xi e^{i\omega\xi} = \pi\delta(\omega) + \frac{i}{\omega} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\omega\xi} = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{\kappa}(\xi) e^{i\omega\xi} = \chi(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{-i\omega\xi} = \tilde{\kappa}(\xi)$$

$$\sqrt{i} = \pm\frac{i+1}{\sqrt{2}} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$