SOLUCIÓN - Primer Parcial - MD I

Jueves 29 de setiembre de 2022

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
D	C	D	A	B	A

El problema de desarrollo correcto y completo vale 16 puntos.
Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 4 puntos. Respuestas incorrectas restan 1.
La duración del parcial es de tres horas y media.

Múltiple Opción 1

Contar la cantidad de palabras (con o sin sentido) que pueden formarse reordenando las letras de la palabra PARAGUAS que no tienen ni vocales ni consonantes consecutivas. Por ejemplo, PARAGUAS no se cuenta, pero PARAGUSA sí se debe contar.
A) 120; B) 144; C) 168; D) 192.

Solución - Múltiple Opción 1

Notar que hay 4 vocales y 4 consonantes. Entonces, para que no hayan ni vocales ni consonantes consecutivas debemos intercalar vocales y consonantes. Hay 4 maneras de ordenar las vocales y 4! de ordenar las consonantes. Como podemos empezar en vocal o bien en consonante, aplicando la regla de la suma tenemos un total de $2 \times 4 \times 4! = 192$ palabras posibles, y la respuesta correcta es la D.

Múltiple Opción 2

Cuatro maestras salen de paseo con seis niños y deciden formar tres grupos. ¿Cuántas maneras hay de formar los grupos si cada uno debe tener alguna maestra y algún niño?
A) $S(4,3)S(6,3)$; B) $Sob(4,3)Sob(6,3)$; C) $S(4,3)Sob(6,3)$; D) $Sob(4,3)6^3$.

Solución - Múltiple Opción 2

Armamos los grupos en dos etapas: en la primera etapa creamos tres grupos con las cuatro maestras de $S(4,3) = 6$ maneras posibles y en la segunda etapa asignamos los seis estudiantes a los grupos creados de $Sob(6,3) = 540$ formas posibles. Por la regla del producto tenemos $S(4,3)Sob(6,3)$, y la respuesta correcta es la C.

Múltiple Opción 3

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$ para todo $n \geq 1$ y $a_0 = 1$. Entonces: A) $a_{50} = 2^{50}$; B) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; C) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; D) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Solución - Múltiple Opción 3

La solución del problema homogéneo es $c2^n$. Busquemos una solución particular de la forma $kn \times 2^n$. Al reemplazar debemos tener que $(kn - k(n-1))2^n = 3 \times 2^n$, por lo que $k = 3$, y la solución particular es $3n \times 2^n$. Entonces, la solución de la recurrencia es $a_n = c2^n + 3n \times 2^n$. Usando que $a_0 = 1$ se deduce que $c = 1$ y $a_n = (1 + 3n) \times 2^n$, por lo que $a_{50} = 151 \times 2^{50}$, y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 4

Se dispone de n de golosinas diferentes ($n \geq 1$) y una cantidad m no menor ($m \geq n$) de bolsas idénticas. ¿Cuál de estas expresiones corresponde a la cantidad de formas posibles de embolsar las golosinas? A) $\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$; B) $\sum_{k=1}^{n} Sob(n,k)$; C) $\sum_{k=1}^{n} C_n^{n+k-1}$; D) $\sum_{k=1}^{n} C_k^{n+k-1}$.

Solución - Múltiple Opción 4

Recordemos que $S(n,k)$ es la cantidad de maneras de ubicar n elementos diferentes en k recipientes idénticos. En este caso tenemos que los elementos diferentes son las golosinas, y los recipientes son bolsas de plástico. Como la cantidad de bolsas de plástico no puede ser mayor que la cantidad de golosinas, por la regla de la suma se sigue que la cantidad de maneras de embolsar las golosinas es $\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$, y la opción correcta es la A.

Múltiple Opción 5

Calcular la menor cantidad de estudiantes que deben realizar esta misma prueba para asegurar que al menos dos estudiantes entregan las mismas respuestas de la múltiple opción. Tener en cuenta que se pueden dejar recuadros en blanco: A) 5^6; B) $5^6 + 1$; C) 4^6; D) $4^6 + 1$.

Solución - Múltiple Opción 5

Hay 5 opciones posibles en cada múltiple opción, concretamente, las posibles respuestas A,B,C,D, o responder un recuadro en blanco. Como hay 6 preguntas de múltiple opción, por la regla del producto hay un total de 5^6 entregas distintas posibles. Es claro que si hay 5^6 estudiantes, es posible que no hayan entregas repetidas. Si hay $5^6 + 1$ estudiantes, si identificamos estudiantes con palomas y respuestas con nidos, por el Principio del Palomar sabemos que hay al menos dos entregas idénticas. Luego, la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 6

El coeficiente en x^4yz de la función $(x - x^3 + y - z + 1)^6$ es: A) 330; B) 340; C) 350; D) 360.

Solución - Múltiple Opción 6

Hay dos maneras de construir x^4yz, que son $(x)^4(-x^3)^0(y)^1(-z)^1(1)^0$ y $(x)^1(-x^3)^1(y)^1(-z)^1(1)^2$. El primer caso aporta $-6!/4! = -30$, mientras que el segundo aporta $6!/2! = 360$ unidades al coeficiente en x^4yz. Luego, el coeficiente en x^4yz es 330, y la opción correcta es la A.

Problema de Desarrollo

Probar que todo número natural mayor que 1 se puede escribir como producto finito de números primos (posiblemente repetidos).

Solución - Problema de Desarrollo

Vamos a probar el enunciado mediante el principio de inducción fuerte. El paso base consiste en probar que 2 se descompone en factores primos. Como 2 ya es primo, se descompone en sí mismo, y el paso base es cierto. Sea ahora n un entero mayor que 2 cualquiera, y supongamos que el enunciado es cierto para todo entero comprendido entre 2 y $n-1$. Si n es primo entonces se descompone en sí mismo, y terminamos. Si n no es primo entonces tiene algún divisor no trivial, y n se descompone en producto, es decir, $n = n_1 \times n_2$, donde tanto n_1 como n_2 están comprendidos entre 2 y $n-1$. Por hipótesis inductiva, estos dos enteros n_1 y n_2 admiten descomposición en factores primos, y por lo tanto n también admite descomposición en factores primos, como queríamos demostrar.

Comentario: también se puede demostrar unicidad de tal factorización, a menos del orden de sus factores. Este resultado se denomina el Teorema Fundamental de la Aritmética, y se estudia en detalle en el curso de Matemática Discreta 2.