Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Mayo 2022**

Primer parcial – 04 Mayo de 2022

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Respuestas Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Respuestas Ejercicios Multiple Opción

E. 1	E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10

Importante

- El parcial dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Tienen 10 ejercicios verdadero/falso de 1 punto cada uno y 10 ejercicios múltiple opción de 3 puntos cada uno. El parcial es de 40 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.

1. Verdadero - Falso.

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

(1) Sea $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ converge también.

(2) Si z es un numero complejo entonces $z\overline{z} = Re(z) + Im(z)$

(3) Si $a \neq 0$, entonces la función $f(z) = az$ transforma el cuadrado con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$ en otro cuadrado.

(4) Si y_1 e y_2 son soluciones de la misma ecuación diferencial entonces $4y_1 - 2022y_2$ es solución también de la ecuación diferencial.

(5) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada entonces $(a_n)_{n\geq 1}$ es convergente.

(6) Si $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $a_n = f(n)$ entonces $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ se comportan de la misma manera.

(7) Si z_0 es raiz de un polinomio P tal que $P(0) = i$ entonces $P(z_0) + P(\overline{z_0}) = 0$.

(8) Si z_0 es un complejo tal que $Re(z_0) = 0$ entonces $e^{z_0} = e^{Im(z_0)}$

(9) Sea $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ no converge entonces $(\frac{1}{a_n})_{n\geq 1}$ converge

(10) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge entonces $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)dx$ converge para todo $b \geq a$.

2. Múltiple Opción

Puntajes: 3 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

1. Considera el siguiente número complejo:

$$z_0 = \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{1+i}}}$$

La forma binómica de z_0 es igual a:

A. 1. B. i. C. -1 D. $-i$

2. El número complejo $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ es la raíz sexta de un cierto complejo, las otras cinco raíces son:

A. $i,\ -i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

B. $2i,\ -2i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

C. $i,\ -i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D. $i,\ -i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. Consideremos la sucesión de números reales $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ que satisface la relación

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{{a_n}^2 + 2}{a_n + 2}}$$

y tal que $a_1 = 7$.

Entonces:

A. $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ es monótona decreciente y tiene límite $\neq 1$.

B. $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ es monótona decreciente y tiene límite 1.

C. $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ no es ni creciente ni decreciente, pero converge a 1.

D. $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ es monótona creciente y no está acotada superiormente.

4. Sea $m = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$. Entonces la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^m\left(\frac{1}{n}\right)$$

A. Converge.

B. Oscila.

C. Diverge.

D. $m = +\infty$, por lo que la serie que se define luego no existe.

5. Considere la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{2n+n^2}$$

Entonces:

A. La serie converge a $\frac{5}{6}$.
B. La serie converge a $\frac{3}{2}$.
C. La serie converge a $\frac{1}{2}$.
D. La serie diverge.

6. La rapidez con que cierto medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial

$$x'(t) = A - Bx(t), \quad x(0) = 0,$$

donde A y B son constantes positivas. La función $x(t)$ describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera t.

Entonces:

A. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{A}{B}$ y el tiempo que tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite es $t = \frac{\log(2)}{B}$.
B. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{A}{B}$ y el tiempo que tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite es $t = \log(2)$.
C. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{A}{B}$ y el tiempo que tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite es $t = \frac{1}{B}\log\left(\frac{2(A-B)}{A}\right)$.
D. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{B}{A}$ y el tiempo que tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite es $t = \log(2)$.

7. Sea E_1 la ecuación diferencial de segundo órden homogénea, lineal y de coeficientes constantes, tal que $y(x) = 3e^x\cos(2x)$ es solución.

Se le llama $y_2(x)$ a la solución de E_1 con las condiciones iniciales: $\begin{cases} E_1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

¿Cuánto vale $y_2(\pi/2)$?

A. 0.
B. e.
C. e^2.
D. Ninguna de las anteriores.

8. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos ($a_n > 0$, $\forall n$). Además sabemos que:

$(a_{2n})_{n\geq 1}$ es monótona creciente y acotada.
$(a_{2n+1})_{n\geq 1}$ no converge y es acotada.

Considere las siguientes afirmaciones:

I) $(a_n)_{n\geq 1}$ no puede converger.
II) $(a_{2n+1})_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.
III) $(a_{4n})_{n\geq 1}$ es necesariamente convergente.
IV) $(a_{3n})_{n\geq 1}$ no puede converger.

Entonces:

A. I, II y III son verdaderas y IV es falsa.
B. Todas son verdaderas.
C. I y II son verdaderas, III y IV son falsas.
D. Solamente I es verdadera.

9. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - 1}{(x^2 - \ln(1+x^2))^{\alpha}}\, dx$$

A. Converge solamente para todo α con $0 < \alpha < 1/4$.
B. Converge para todo α con $0 < \alpha < 1/2$.
C. Converge para todo α con $1 < \alpha$.
D. No converge únicamente si $\alpha < 0$.

10. Si $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x^2+4)(x+1)}$, consideramos la siguiente integral impropia

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Entonces:

A. Converge y lo hace a $\frac{\pi}{4}$.
B. Converge y lo hace a $\frac{\pi}{4} - \log 2$.
C. No converge.
D. Converge y lo hace a $\frac{\pi}{2}$.