INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROPIEDADES ÓPTICAS DE MATERIALES
Curso 2022

Práctico V – Películas Delgadas.

Fecha de Entrega: 4 de Noviembre de 2022. [1]

Ejercicio N° 1 (*) – Reflectancia y Transmitancia de una película delgada: Suma Incoherente.

Considere una onda de luz monocromática que incide normalmente desde el vacío sobre una lámina de espesor L de un material con índice de refracción n y coeficiente de absorción α. La reflectancia en la cara incidente es R, por lo que la fracción de luz que ingresa al material es $1 - R$. De esta luz una fracción $\exp(-\alpha L)$ llega a la cara opuesta. Si esta tiene la misma reflectancia R, saldrá por el otro lado de la lámina una fracción $1 - R$ de la que llega. El resto vuelve a viajar por la lámina y se repite el proceso de reflexiones y transmisiones sucesivas, además de la atenuación $\exp(-\alpha L)$ cada vez que se cruza la lámina de ancho L (vea la figura en donde de arriba abajo se esquematizan las sucesivas reflexiones).

a) Considerando que se pueden sumar tanto las intensidades reflejadas y transmitidas hacia uno y otro lado de la lámina (suma incoherente en que se desprecian efectos de interferencia) demuestre que la transmitancia total de la lámina es:

$$T_{tot} = \frac{(1-R)^2 \exp(-\alpha L)}{1 - R^2 \exp(-2\alpha L)}.$$

NOTA: Este resultado solo es válido en la práctica si $L >> \lambda$, la longitud de onda de la luz. En otro caso serían importantes los efectos de interferencia a estudiar más adelante.

b) Encuentre una expresión similar para R_{tot}, la reflectancia total de la lámina, sumando las infinitas contribuciones que vuelven hacia atrás.

c) Estudie expresiones aproximadas en los casos:

i. $R << 1$.

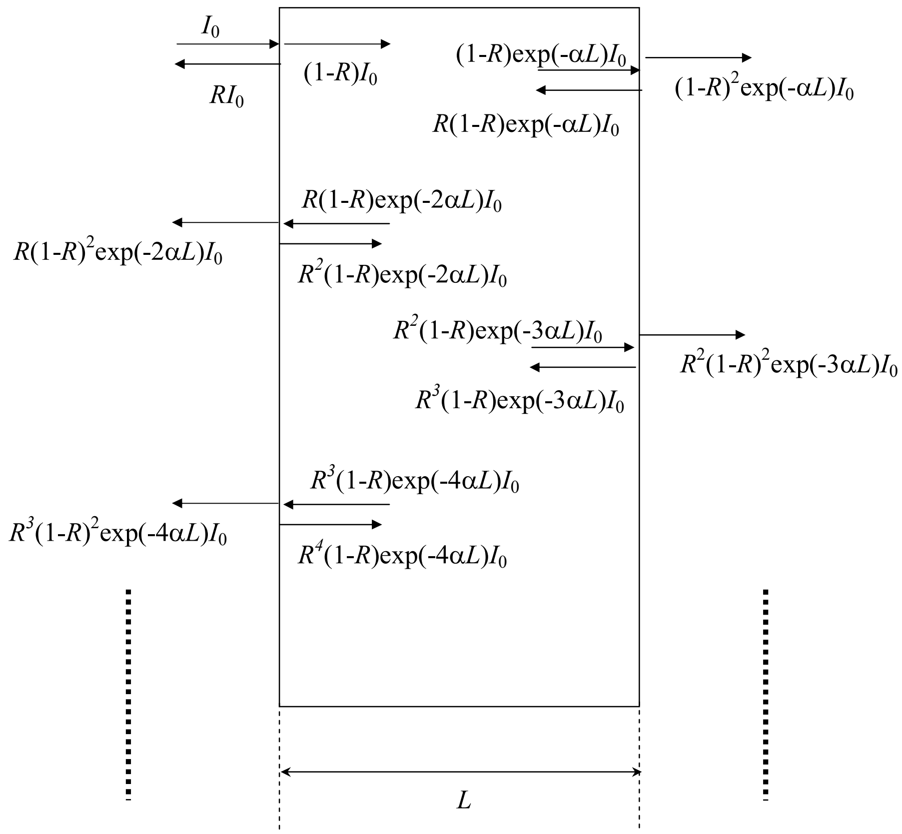
ii. $\alpha = 0$.

iii. $\exp(-\alpha L) << 1$.

d) Diseñe un método para medir α.

---

[1] - La entrega mínima debe contener los ejercicios marcados con asterisco, que en este repartido son: Ejercicios N° 1 y 4.



Ejercicio N° 2 – Reflexión de una película muy delgada: Suma Coherente.

En este ejercicio se obtendrá un resultado similar al estudiado en el Ejercicio anterior, pero cuando el espesor de la película es tan pequeño que lo que se debe sumar es la amplitud del campo y no las intensidades. Suponga una onda incidente $\psi_{inc} = A \exp[-i(\omega t - k_1 z)]$ que se propaga por un medio *1*, siendo A un número real. En $z = 0$ el índice de refracción del sistema sufre un cambio abrupto de n_1 a n_2 (los índices de refracción pueden ser complejos). En $z = L$ el índice de refracción cambia nuevamente de n_2 a n_3. Los coeficientes de reflexión en amplitud en cada interfaz son $r_{12} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -r_{21}$ y $r_{23} = \dfrac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$. Suponga que en el medio 1 hay una onda reflejada que representaremos como $\psi_{ref} = r\, A \exp[-i(\omega t + k_1 z)]$, siendo r un número complejo que puede escribirse como $r = |r|\exp(-j\theta)$.

a) Demuestre que si se desprecian todas las contribuciones excepto la reflexión desde $z = 0$ y la primera reflexión desde $z = \mathrm{L}$, se obtiene:

$$r \cong r_{12} + t_{12} r_{23} t_{21} \exp(2 j k_2 L)$$

donde $t_{12} = 1 + r_{12}$ y $t_{21} = 1 + r_{21} = 1 - r_{12}$.

b) Muestre, sumando explícitamente la serie infinita correspondiente a un número infinito de reflexiones múltiples, que la solución exacta para r es:

$$r = r_{12} + \frac{\left(1 - r_{12}^2\right) r_{23} \exp\left(2 j k_2 L\right)}{1 - r_{23} r_{21} \exp\left(2 j k_2 L\right)}$$

donde el primer término, r_{12}, se debe a la reflexión en la discontinuidad en z = 0 y el resto se debe a una o más reflexiones en $z = L$.

c) Muestre que el resultado de la parte anterior se reduce al obtenido en la parte a para pequeñas reflexiones r_{23}.

d) Vea que el resultado exacto de la parte b puede escribirse en la forma:

$$r = \frac{r_{12} + r_{23} \exp\left(2 j k_2 L\right)}{1 - r_{23} r_{21} \exp\left(2 j k_2 L\right)}$$

e) En el caso que los medios sean transparentes (no hay absorción), halle el valor de k_2L y del índice de refracción n_2 que anulan la expresión anterior.

f) En el mismo caso que la parte anterior, y para el mismo valor de k_2L, verifique que si n_2 es mayor que el que hallado allí, la reflectividad $R = |r|^2$ aumenta con n_2.

Ejercicio N^o 3 – Transmitancia de una película muy delgada: Suma Coherente.

a) Repita los cálculos de la parte b del Ejercicio anterior para hallar el coeficiente de transmisión, definido de forma tal que la onda transmitida en el medio 3 es $\psi_{ref} = t\,A \exp[-i(\omega t - k_3 z)]$.

b) Asumiendo que los materiales son transparentes (todos los índices de refracción reales), calcule una expresión para la transmitancia del sistema.

c) Verifique que para las condiciones halladas en la parte e del Ejercicio anterior, la transmitancia hallada en la parte anterior vale 100 %.

d) Estudiando los extremos del denominador de la expresión hallada en la parte b, encuentre cómo se vinculan las longitudes de onda λ_j y $\lambda_{j+\Delta j}$ (o los números de onda ν_j y $\nu_{j+\Delta j}$) de los extremos relativos en el espectro de transmitancia con el espesor L y el índice de refracción n_2. Diseñe un método para medir L o n_2 conociendo el otro.

e) Verifique que cuando $k_2 L = \pi$ el resultado de la parte b no depende de n_2.

f) Si ahora los medios 1 y 3 son iguales y transparentes pero el medio 2 es absorbente:

   i. Encuentre una expresión para la transmitancia del sistema.

   ii. Verifique que se recupera el resultado de la parte c.i) del Ejercicio N^o 1 en ese mismo límite.

   iii. Verifique que la misma tiende a 100 % cuando el espesor tiende a cero.

Ejercicio N° 4 (*) – Reflectancia Difusa y Función de Kubelka Munk.

Considere una onda electromagnética viajando en un medio de coeficiente de absorción α y coeficiente de scattering σ. Para estudiar la dependencia de la intensidad de la luz con la profundidad z se plantea un modelo de dos flujos: un flujo de intensidad $I_+(z)$, que se propaga en la dirección creciente de z, y un flujo de intensidad $I_-(z)$, que se propaga en la dirección decreciente de z. Cada vez que un fotón es absorbido desaparece de ambos flujos; y cada vez que un fotón es dispersado pasa de un flujo al otro.

a) Razonando como en el caso que permite deducir la ley de Beer, deduzca que las ecuaciones que permiten escribir la dependencia de las intensidades $I_+(z)$ e $I_-(z)$ son:

$$dI_+ = -(\alpha + \sigma)I_+ dz + \sigma I_- dz$$
$$dI_- = (\alpha + \sigma)I_- dz - \sigma I_+ dz$$

<u>NOTA</u>: Observe que $I_-(z)$ debe verificar una ecuación similar a $I_+(z)$, solo que se propaga en la dirección contraria.

b) Verifique que $r(z) = \frac{I_-(z)}{I_+(z)}$ obedece una ecuación diferencial de variables separables.

<u>SUGERENCIA</u>: Plantee $\frac{d\ln(r)}{dz}$ y utilice los valores que se obtienen de las ecuaciones de la parte a.

c) Encuentre la reflectancia difusa R de una película de espesor d, resolviendo la ecuación diferencial anterior planteando como condiciones de borde que $R = r(0)$ y $r(d) = 0$, ya que la luz incide de un solo lado.

<u>SUGERENCIA</u>: Verifique que $\int \frac{dr}{r^2 - 2ar + 1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln\left|\frac{r - a - \sqrt{a^2-1}}{r - a + \sqrt{a^2-1}}\right|$ y para evaluar los módulos considere que R es chico.

d) Para una película muy gruesa ($d \to \infty$) encuentre R en función de α y σ y demuestre que $\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{(1-R)^2}{2R}$, donde al segundo miembro se le llama Función de Kubelka – Munk.

<u>NOTA</u>: Si se supone que el coeficiente de scattering depende suavemente de la longitud de onda, la función de Kubelka – Munk nos permite hallar la dependencia del coeficiente de absorción en la longitud de onda a partir de un espectro de reflectancia difusa. Debe excluirse la reflectancia especular de la medida.