Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 5, CLASE 2

Hoja 5, Ejercicio 5

5) Un cierto proceso químico se realiza en el interior de un reactor continuo, agitado, ideal, de volumen **V**. En este tipo de reactores se toma como hipótesis de trabajo que las condiciones físico-químicas en su interior son homogéneas. Los caudales de entrada y de salida al reactor se consideran constantes e iguales a **Q**.

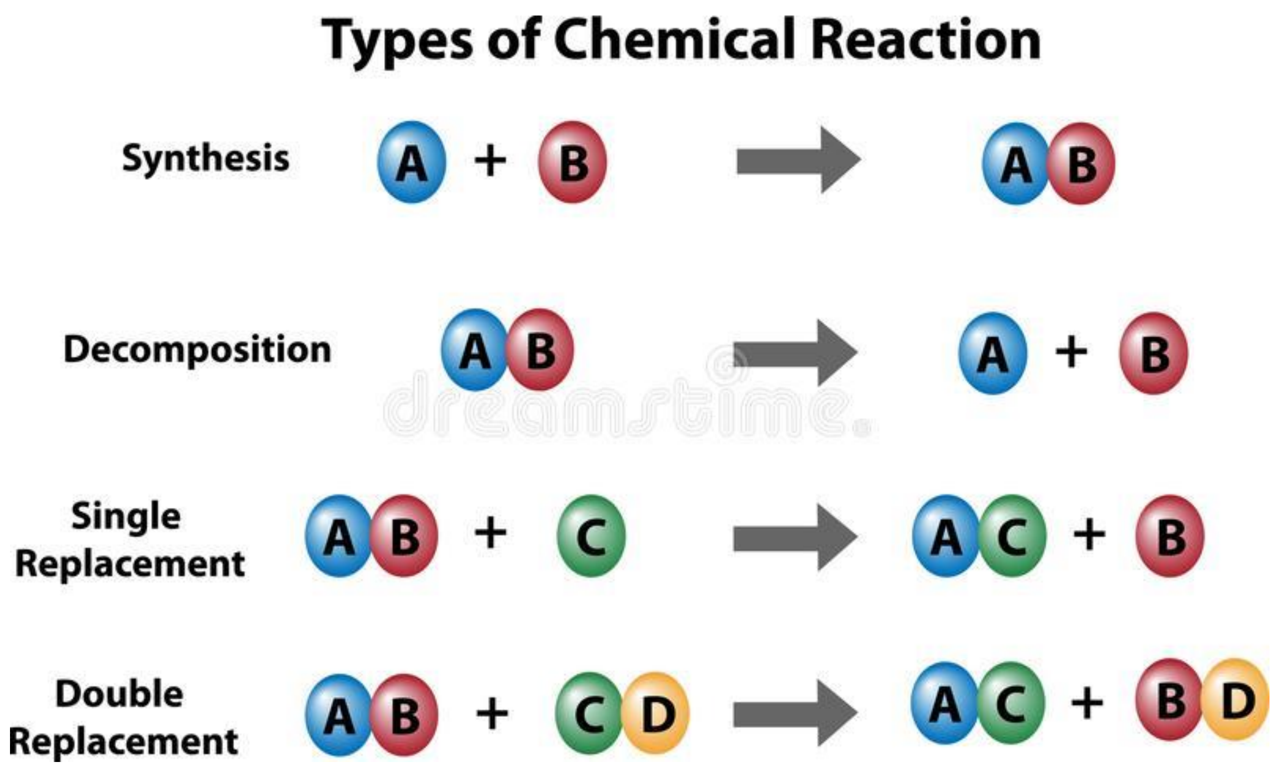
La reacción que se considera es irreversible, de primer orden y su velocidad es proporcional a la concentración de reactivo en el interior del reactor ($\mathbf{C_r}$), es decir:

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} = K.C_r = -\frac{\partial C_r}{\partial t}$$

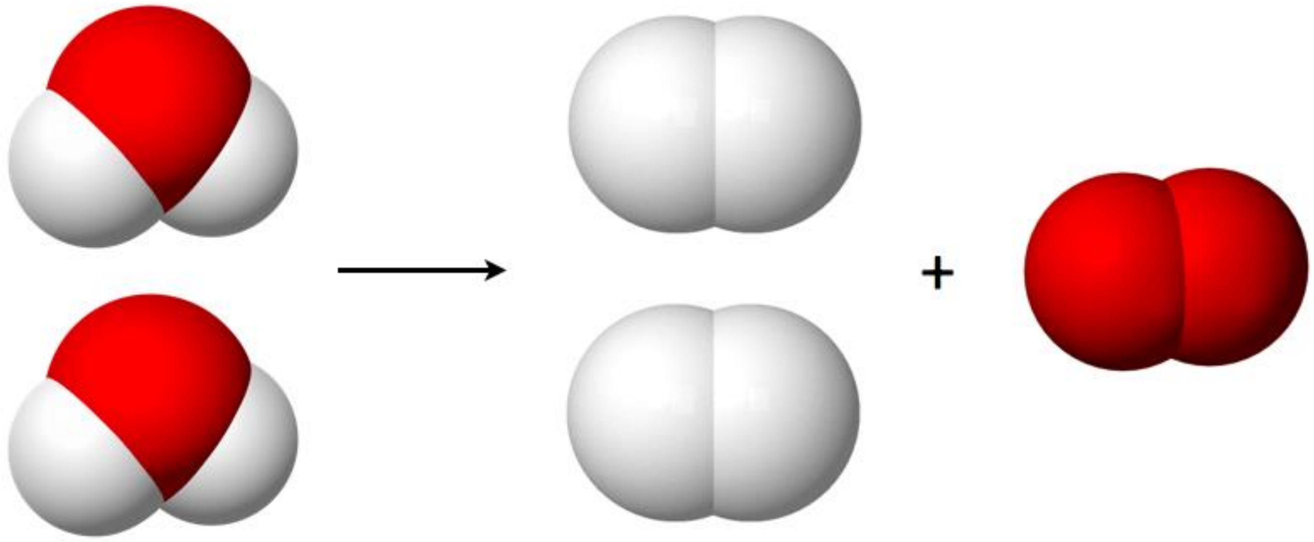
donde $\mathbf{C_p}$ es la concentración del producto en el interior del reactor.

a) Tomando como entrada la concentración de reactivo en el caudal de entrada $\mathbf{C_{ri}}$ y como salida la concentración de producto en el caudal de salida $\mathbf{C_p}$ halle una representación en variables de estado para este sistema.

Hoja 5, Ejercicio 5



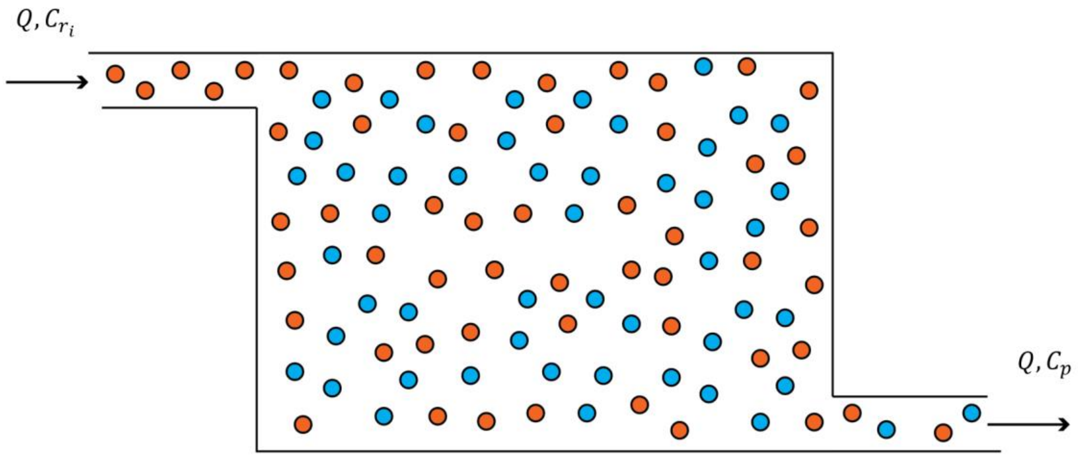
Hoja 5, Ejercicio 5



$$2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$



Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

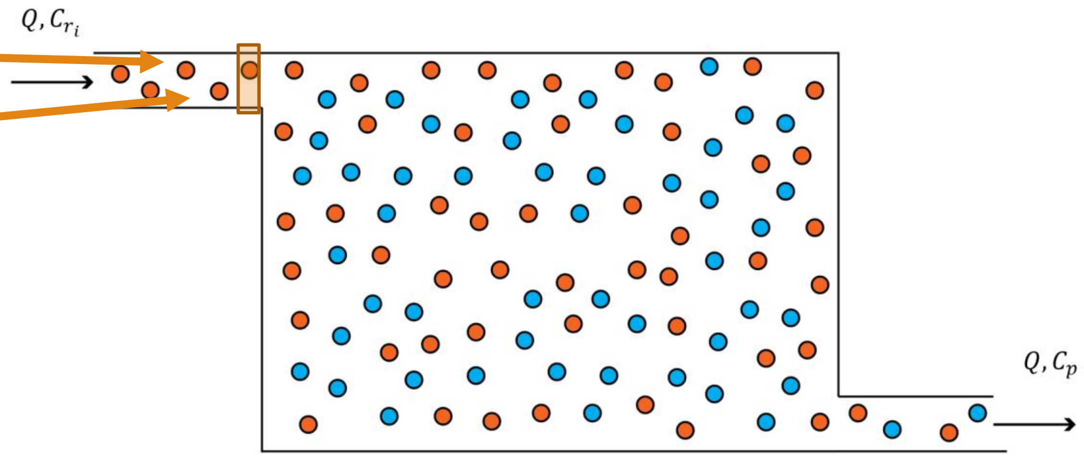
$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$V\dot{C}_R = QC_{r_i}$$

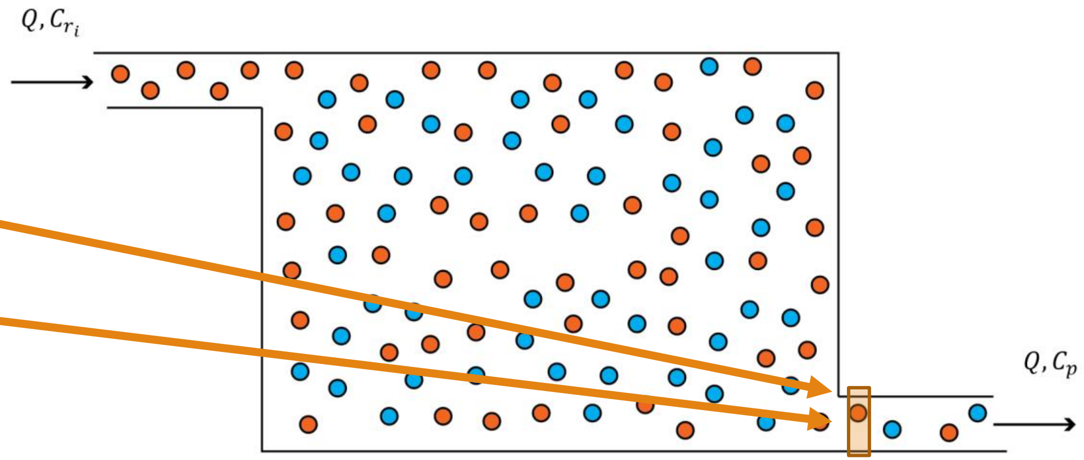


Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$V\dot{C}_R = QC_{r_i} - QC_r$$

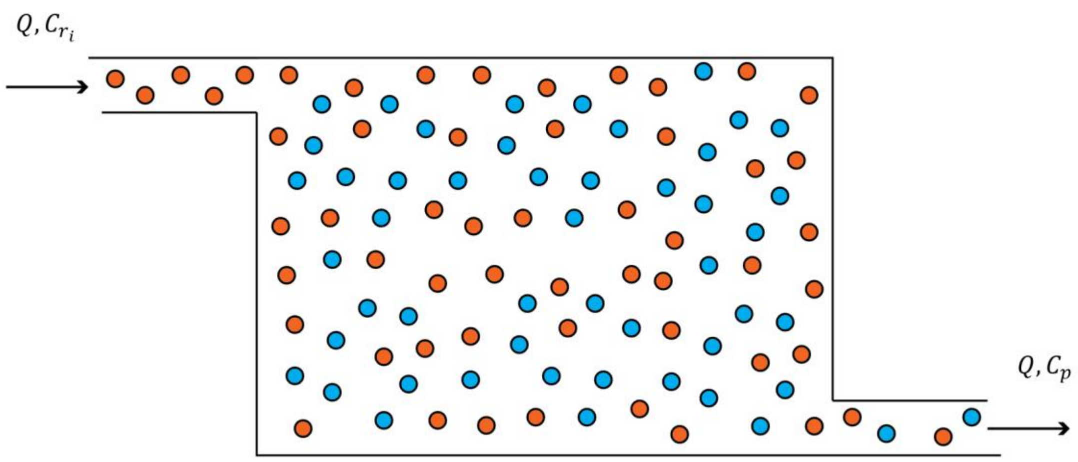


Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$V\dot{C}_R = QC_{r_i} - QC_r + 0$$

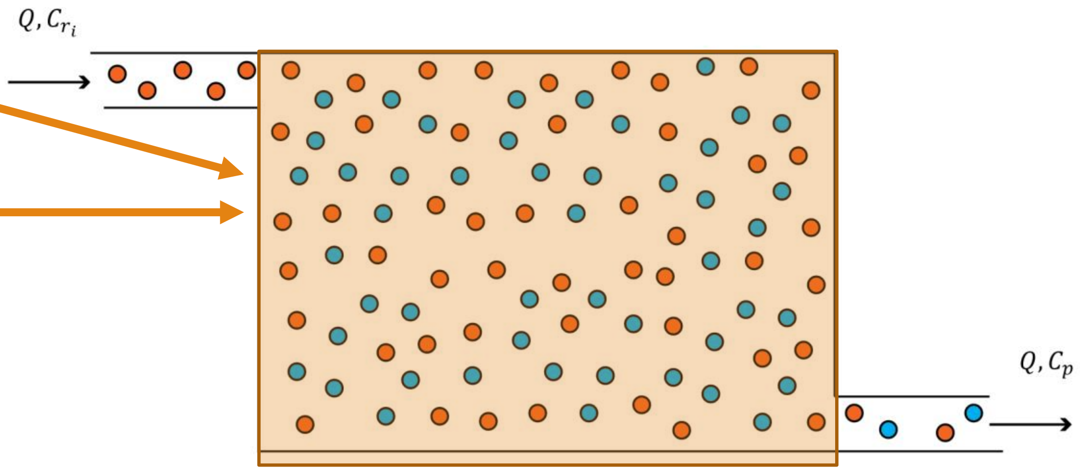


Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$V\dot{C}_R = QC_{r_i} - QC_r + 0 - V.KC_r$$

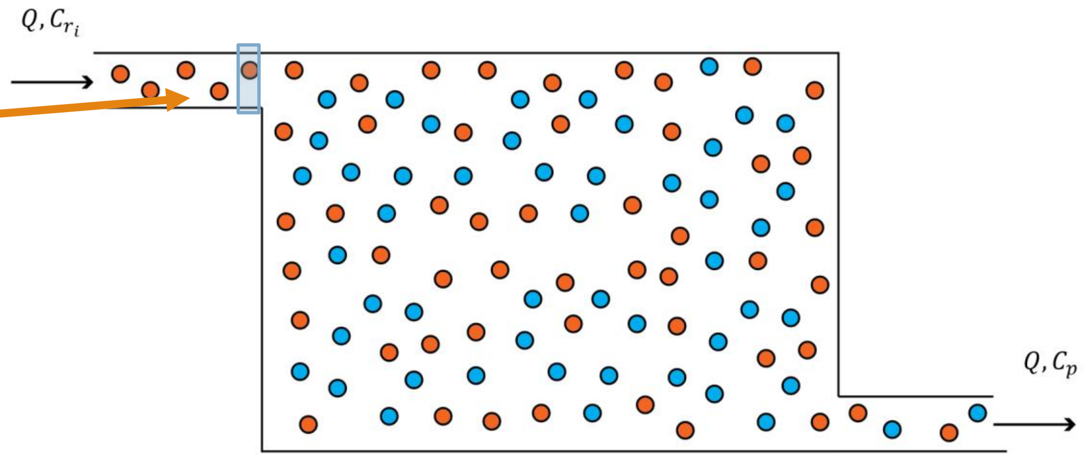


Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$V\dot{C_P} = 0$$

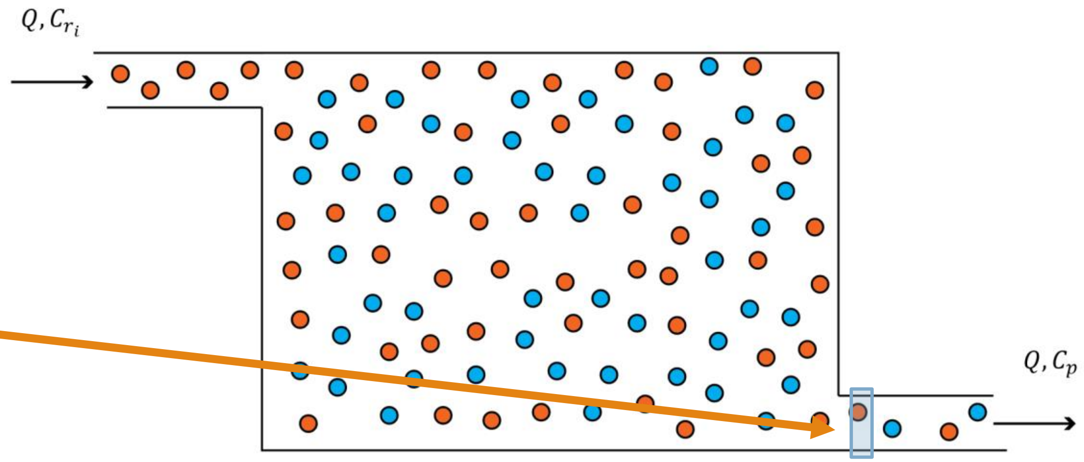


Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$V\dot{C_P} = 0 - QC_P$$

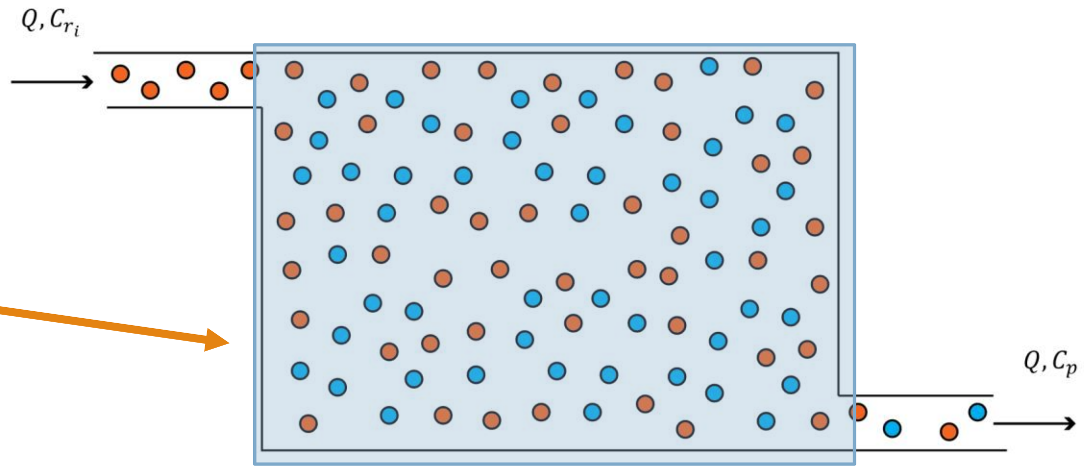


Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

$$V\dot{C_P} = 0 - QC_P + V.KC_r$$

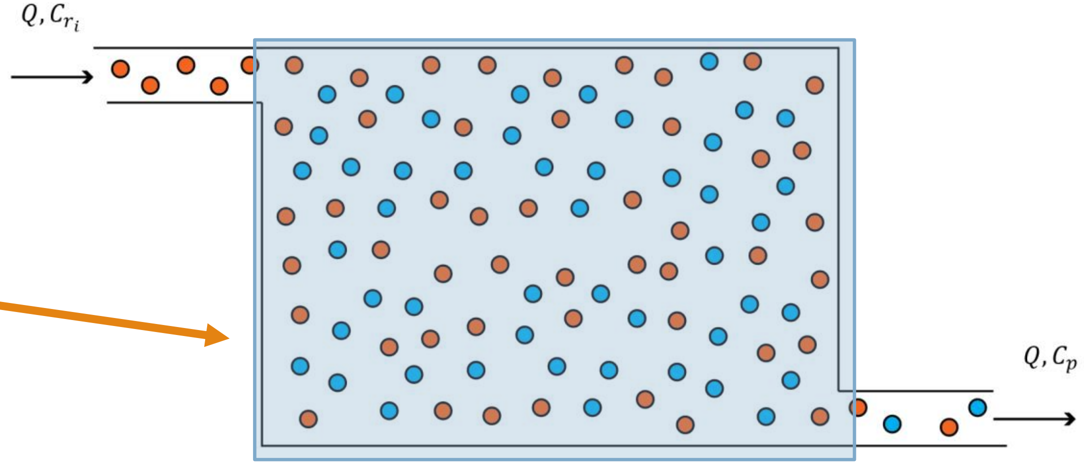


Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$

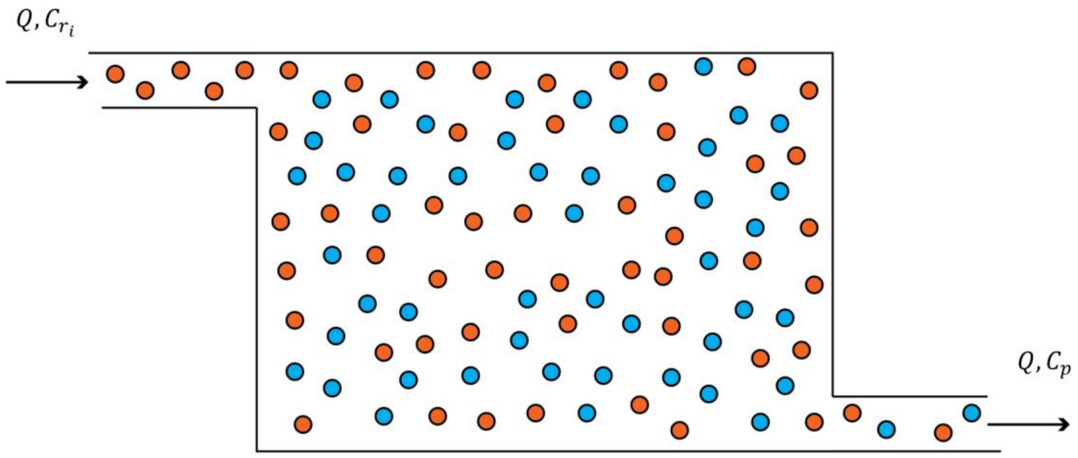
$$V\dot{C_P} = 0 - QC_P + V.KC_r - 0$$



Hoja 5, Ejercicio 5

$$\frac{\delta C_P}{\delta t} = K.C_r = -\frac{\delta C_r}{\delta t}$$

$$Variación = Entrada - Salida + Generación - Destrucción$$



$$V\dot{C}_P = 0 - QC_P + V.KC_r - 0$$

$$V\dot{C}_R = QC_{r_i} - QC_r + 0 - V.KC_r$$

Cuáles son las variables de estado?

Hoja 5, Ejercicio 5

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{C}_r \\ C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\dfrac{Q}{V} + K\right) & 0 \\ K & -\dfrac{Q}{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r \\ C_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{Q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} \left(C_{r_i}\right) \\ C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r \\ C_p \end{pmatrix} + 0.\, C_{r_i} \end{cases}$$

Hoja 5, Ejercicio 5

b) Halle la respuesta del sistema a un impulso en la entrada.

c) Considerando que aplicamos al sistema una entrada del tipo:

$$C_{ri}(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq 0 \\ 0, & 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Calcular $\mathbf{C_r(t)}$ y $\mathbf{C_p(t)}$ para $\mathbf{t > 0}$.

Respuesta de SLPC

Sea un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Con A, B, u seccionalmente continuas. Se cumple que

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

Con $\phi(t, t_0)$ la matriz de transición de estados

* Repaso de teórico. Ver notas de "Sistemas lineales de parámetros concentrados"

Respuesta de SLPC

Sea un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Con A, B, u seccionalmente continuas. Se cumple que

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

Con $\phi(t, t_0)$ la matriz de transición de estados

¿Cómo podemos determinarla?

* Repaso de teórico. Ver notas de "Sistemas lineales de parámetros concentrados"

Respuesta libre

$x(t) = \phi(t, to)x_0$ es la solución al problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ \quad x(t_0) = x_o \end{cases}$$

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Respuesta libre

$x(t) = \phi(t, to)x_0$ es la solución al problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ \quad x(t_0) = x_o \end{cases}$$

Solución del problema para SLIT

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.\,x(t) \\ \; x(t_0) = x_o \end{cases}$$

$$\phi(t, to) = e^{A(t-t_0)}$$

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Cálculo de $e^{A(t-t_0)}$

En el teórico se ven varios métodos (cálculo directo, Cayley Hamilton, …)

En este caso, utilizaremos Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d\left(e^{At}\right)}{dt}\right\} = s\,\mathcal{L}\{e^{At}\} - e^{At}\big|_{t=0}$$

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Cálculo de $e^{A(t-t_0)}$

En el teórico se ven varios métodos (cálculo directo, Cayley Hamilton, …)

En este caso, utilizaremos Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d\left(e^{At}\right)}{dt}\right\} = s\,\mathcal{L}\{e^{At}\} - e^{At}\big|_{t=0} = s\,\mathcal{L}\{e^{At}\} - I$$

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Cálculo de $e^{A(t-t_0)}$

En el teórico se ven varios métodos (cálculo directo, Cayley Hamilton, …)

En este caso, utilizaremos Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d\left(e^{At}\right)}{dt}\right\} = s\,\mathcal{L}\{e^{At}\} - e^{At}\big|_{t=0} = s\,\mathcal{L}\{e^{At}\} - I$$

$$s\,\mathcal{L}\{e^{At}\} - I = A\mathcal{L}\{e^{At}\}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

* Repaso de teórico. Ver notas de "Sistemas lineales de parámetros concentrados"

Matriz de respuesta al impulso

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Matriz de respuesta al impulso

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Calculando las transformadas de Laplace

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ \quad Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = x_0 + BU(s) \\ \quad Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Matriz de respuesta al impulso

$$\begin{cases}(sI-A)X(s)=x_0+BU(s)\\ Y(s)=CX(s)+DU(s)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X(s)=(sI-A)^{-1}x_0+(sI-A)^{-1}BU(s)\\ Y(s)=C[(sI-A)^{-1}x_0+(sI-A)^{-1}BU(s)]+DU(s)\end{cases}$$

$$Y(s)=C.(sI-A)^{-1}x_0+[C(sI-A)^{-1}B+D]U$$

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Matriz de respuesta al impulso

$Y_h(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$: Componente de la salida debida al estado inicial

$Y_\sigma(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U$: Componente de la salida debida a la salida con condición inicial nula

* Repaso de teórico. Ver notas de “Sistemas lineales de parámetros concentrados”

Matriz de respuesta al impulso

$Y_h(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$: Componente de la salida debida al estado inicial

$Y_\sigma(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U$: Componente de la salida debida a la salida con condición inicial nula

$H(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]$: Transformada de Laplace de matriz de respuesta al impulso

* Repaso de teórico. Ver notas de "Sistemas lineales de parámetros concentrados"

Hoja 5, Ejercicio 5

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{Q}{V} + K\right) & 0 \\ K & -\frac{Q}{V} \end{pmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s + \left(\frac{Q}{V} + K\right) & 0 \\ -K & s + \frac{Q}{V} \end{pmatrix}$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj\left((sI - A)^t\right)}{\det(sI - A)}$$

$$\det(sI - A) = \left(s + \frac{Q}{V} + K\right)\left(s + \frac{Q}{V}\right)$$

$$adj\left((sI - A)^t\right) = \begin{pmatrix} s + \frac{Q}{V} & 0 \\ K & s + \left(\frac{Q}{V} + K\right) \end{pmatrix}$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\left(s + \frac{Q}{V} + K\right)\left(s + \frac{Q}{V}\right)} \begin{pmatrix} s + \frac{Q}{V} & 0 \\ K & s + \left(\frac{Q}{V} + K\right) \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{Q}{V} + K\right)\left(s + \frac{Q}{V}\right)} \begin{pmatrix} s + \frac{Q}{V} & 0 \\ K & s + \left(\frac{Q}{V} + K\right) \end{pmatrix}\right\}$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$H(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$

$$H(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{Q}{V} + K\right)\left(s + \frac{Q}{V}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{Q}{V} & 0 \\ K & s + \left(\frac{Q}{V} + K\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Q}{V} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{Q}{V} + K\right)\left(s + \frac{Q}{V}\right)} \left(K.\frac{Q}{V}\right)$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$H(s) = \frac{1}{\left(s+\frac{Q}{V}+K\right)\left(s+\frac{Q}{V}\right)}\left(K.\frac{Q}{V}\right)$$

Aplicando fracciones simples

$$H(s) = \left[\frac{\frac{-1}{K}}{\left(s+\frac{Q}{V}+K\right)}+\frac{\frac{1}{K}}{s+\frac{Q}{V}}\right]\left(K.\frac{Q}{V}\right)$$

Antitransformando

$$h(t) = \frac{Q}{V}\left(e^{\frac{-Q}{V}t} - e^{-\left(\frac{Q}{V}+K\right)t}\right)$$

Hoja 5, Ejercicio 5

b) Halle la respuesta del sistema a un impulso en la entrada.

c) Considerando que aplicamos al sistema una entrada del tipo:

$$C_{ri}(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq 0 \\ 0, & 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Calcular $\mathbf{C_r(t)}$ y $\mathbf{C_p(t)}$ para $\mathbf{t > 0}$.

Hoja 5, Ejercicio 5

$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0$

Cuanto vale x_0?

Hoja 5, Ejercicio 5

$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$

Cuanto vale x_0?

Como el sistema es estable, $\dot{\mathrm{C}}_{\mathrm{r}} = \dot{C}_p = 0$ con $t \to \infty$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{Q}{V} + K\right) & 0 \\ K & -\frac{Q}{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{r_0} \\ C_{p_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{Q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} (1)$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{Q}{V} + K\right) & 0 \\ K & -\frac{Q}{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{r_0} \\ C_{p_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{Q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} (1)$$

$$C_{r\,0} = \frac{\frac{Q}{V}}{\left(\frac{Q}{V} + K\right)}$$

$$C_{p_0} = \frac{K}{\left(\frac{Q}{V} + K\right)}$$

Hoja 5, Ejercicio 5

$$C_{r_0} = \frac{\frac{Q}{V}}{\left(\frac{Q}{V} + K\right)}$$

$$C_{p_0} = \frac{K}{\left(\frac{Q}{V} + K\right)}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s + \frac{Q}{V} + K\right)\left(s + \frac{Q}{V}\right)}\begin{pmatrix} s + \frac{Q}{V} & 0 \\ K & s + \left(\frac{Q}{V} + K\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{r_0} \\ C_{p_0} \end{pmatrix}\right]$$