Práctico 3: Razonamiento lógico

Ejercicio 1 (Conectivas "y" ($\wedge$), "o" ($\vee$))
Mostrar que cada una de las propiedades siguientes se puede expresar en lenguaje matemático por un enunciado "P y Q" o "P o Q" (x e y son números reales):

a) $(x-2)(x+3)=0$.
Solución: $(x-2)(x+3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \ \ o \ \ x=-3$

b) $x^2-1=0$.
Solución: $x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \ \ o \ \ x=1$

c) $xy>0$.
Solución: $xy>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x>0 \ \ e \ \ y>0) \ \ o \ \ (x<0 \ \ e \ \ y<0)$

d) $(x-2)(x-3)\neq 0$.
Solución: $(x-2)(x-3)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq 2 \ \ y \ \ x\neq -3$

e) $x^2-1\neq 0$.
Solución: $x^2-1\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -1 \ \ y \ \ x\neq 1$

f) $xy\leq 0$.
Solución: $xy\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x\leq 0 \ \ e \ \ y\geq 0) \ \ o \ \ (x\geq 0 \ \ e \ \ y\leq 0)$

Ejercicio 2 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$))

1. *Dado un número real x cualquiera, nos interesamos en la afirmación "$x^2>4$".*
   Determinar si cada una de las condiciones siguientes es suficiente para dicha afirmación:

   a) $x>100$
   b) $x>10^6$
   c) $x>1,9$
   d) $x<-2$
   e) $x<-2 \ \ o \ \ x>2$
   f) $x<-10$
   g) $x<-2,1$
   h) $x<-3 \ \ o \ \ x>3$
   i) $x<0$

   Entre las que son suficientes, indicar cuáles son necesarias.

   Solución:

   a) $x>100$ *es suficiente.*
   b) $x>10^6$ *es suficiente.*
   c) $x>1{,}9$ *no es suficiente.*
   d) $x<-2$ *es suficiente.*
   e) $x<-2$ *o* $x>2$ *es suficiente.*
   f) $x<-10$ *es suficiente.*
   g) $x<-2{,}1$ *es suficiente.*
   h) $x<-3$ *o* $x>3$ *es suficiente.*
   i) $x<0$ *no es suficiente.*

   De las anteriores, sólo la condición $x<-2$ *o* $x>2$ *es necesaria.*

2. *Nos interesamos ahora en la afirmación "$x^2>10^3$".*
   Dar seis condiciones suficientes para dicha afirmación, y una necesaria.

y una necesaria.

Solución:

- $x > 1000$.
- $x > 100$.
- $x < -200$.
- $x \in (50, 100)$.
- $x \in [-160, -150]$.
- $x > 10\sqrt{10}$ *o* $x < -10\sqrt{10}$. *Esta condición es, además, necesaria.*

Una condición necesaria pero no suficiente es, por ejemplo, $|x| > 5$.

Ejercicio 3 (Condición necesaria y suficiente (⇔))

En cada uno de los casos siguientes, reducir la condición suficiente dada para que sea necesaria:

1. *Sea x un real positivo. Si $x > 4$ entonces $x^2 > 10$.* **Solución:**
   Sea x un real positivo. Se tiene que $x > \sqrt{10}$ si y solo si $x^2 > 10$.
   (Obsérvese que ser mayor que $\sqrt{10}$ es menos "exigente" que ser mayor que 4).

2. *Sean x e y reales no negativos. Si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x + y > 0$.* **Solución:**
   Sean x e y reales no negativos. Tenemos que $x > 0$ **o** *$y > 0$ si y solo si $x + y > 0$.*

Ejercicio 4 (Condición necesaria y suficiente (⇔))

En cada uno de los casos siguientes, completar la condición necesaria dada para que sea suficiente:

1. *Para que un cuadrilátero $ABCD$ sea un rombo, es necesario que sus diagonales sean perpendiculares.*

   Solución:
   Para que un cuadrilátero $ABCD$ sea un rombo, es necesario y suficiente que sus diagonales sean perpendiculares y se corten en el punto medio de ambas.

2. *Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario que su intersección sea vacía.*

   Solución:
   Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario y suficiente que su intersección sea vacía y que pertenezcan a un mismo plano.

3. *Para que los tres números reales a, b, c sean positivos, es necesario que $ab > 0$ y que $bc > 0$.*

   Solución:
   Para que los tres números reales a, b, c sean positivos, es necesario y suficente que $ab > 0$, que $bc > 0$ y que a sea positivo.

Ejercicio 5 (Cuantificadores (∀, ∃))

Para cada una de las proposiciones siguientes, indicar (en los puntos "...") el cuantificador que permite que dicha proposición sea verdadera:

1. $\ldots x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1$.

   Solución:
   $\exists!\ x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1$.

2. $\ldots x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2+2x+1$.

   Solución:
   $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2+2x+1$;
   (observar que si el cuantificador $\forall$ sirve, entonces también servirá el cuantificador $\exists$, por ejemplo, en este caso: $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2+2x+1$).

3. $\ldots a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = 0$.

   Solución:
   $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = 0$.

4. $\ldots x \in \mathbb{R},\ x^3-2x^2+1 = 0$.

   Solución:
   $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3-2x^2+1 = 0$.

5. $\ldots x \in \mathbb{R}, \sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$.

   Solución:
   $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$.

6. $\ldots x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \cos(x)$.

   Solución:
   $\exists x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \cos(x)$

Ejercicio 6 (Negación)
Completar el cuadro siguiente:

P	*no* P
$x \in \mathbb{N}$	$x \notin \mathbb{N}$
$x \neq 1$	$x = 1$
$13{=}12$	$13 \neq 12$
$x > 0$	$x \leq 0$
$x \leq 1$	$x > 1$

Ejercicio 7 (Negación) *Completar el cuadro siguiente:*

P	P (v o f)	no P (v o f)	no P
Todos los triángulos son rectángulos.	F	V	*Existe un triángulo que no es rectángulo*
Existe un real x tal que $x^2 < 0$.	F	V	*Todos los números reales x cumplen $x^2 \geq 0$*
Todos los cuadriláteros no se pueden inscribir en una cfa.	F	V	*Existe algún cuadrilátero que se puede inscribir en una cfa.*
Existen triángulos que tienen ángulos obtusos.	V	F	*Todos los triángulos no tienen ángulos obtusos*
Todos los números reales verifican $x^2 \geq 1$.	F	V	*Existe un número real x que verifica $x^2 < 1$*
Existe al menos un divisor de 12 que no es divisor de 18	V	F	*Todos los divisores de 12 son divisores de 18*

Entonces:

- *la negación de una frase que empieza por "existe..." es para todo.*
- *la negación de una frase que empieza por "todos los..." es existe.*

Ejercicio 8 (Negación)
Decir si cada afirmación es verdadera o falsa y negarla

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$ F $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 > x$ V $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq x$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 = x$ V $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \neq x$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = x$ V $\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 1 \neq x$

Ejercicio 9 (Contrarrecíproco)
Escribir el contrarrecíproco de cada una de los enunciados siguientes:

1. *Si es el 1^{ero} de enero entonces el museo está cerrado.*

   Solución: *Si el museo está abierto entonces no es el 1^{ero} de enero.*

2. *Un número entero que es múltiplo de 6 es también múltiplo de 3.*

   Solución: *Un número entero que no es múltiplo de 3 tampoco es múltiplo de 6.*

3. *Si un número es mayor que 7 entonces es mayor que 4.*

   Solución: *Si un número es menor o igual a 4, entonces es menor o igual a 7.*

4. *Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ entonces $x + 4 > 0$.*

   Solución: *Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x + 4 \leq 0$ entonces $x \leq 0$.*

5. *Si un triángulo ABC es rectángulo en A entonces $BC^2 = AC^2 + AB^2$.*

   Solución: *Si $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$ entonces el triángulo ABC no es rectángulo en A.*

Ejercicio 10 (Demostraciones)
Probar que las siguientes afirmaciones son falsas.

1. *Un número siempre es inferior a su cuadrado.*
   Contraejemplo: $a = \frac{1}{2}$, *pues* $a^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = a$.

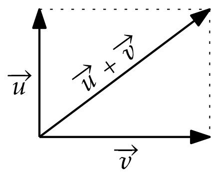
2. *Para todo par de reales a y b positivos se cumple que* $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$.
   Contraejemplo: $a = 3$ *y* $b = 4$. *Tenemos que* $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$, *mientras* $a+b = 7$.

3. *Para todo par de reales a y b no nulos,* $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
   Contraejemplo: $a = b = 1$. *Tenemos que* $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{2}$ *mientras* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$.

4. *Si a, b, c y d son cuatro números reales que verifican $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a - c \leq b - d$.*
   Contraejemplo: $a = b = c = 0$ *y* $d = 1$. *Tenemos que $a \leq b$ y $c \leq d$, pero* $a - c\ (= 0) > b - d\ (= -1)$.

5. *Si un número x verifica $-2 \leq x \leq 4$ entonces $4 \leq x^2 \leq 16$.*
   Contraejemplo: $x = -1$. *Tenemos que* $x^2 = 1 < 4$.

6. *Para todo par de vectores $\vec{y}$ y $\vec{v}$ se cumple que* $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
   Contraejemplo: *En el plano, se consideran los vectores* $\vec{u} = (0,3)$ *y* $\vec{v} = (4,0)$. *Tenemos que* $\vec{u} + \vec{v} = (4,3)$, *luego:*



$$\begin{array}{rcccl} \|\vec{u}\| & = & \sqrt{0^2+3^2} & = & 3 \\ \|\vec{v}\| & = & \sqrt{4^2+0^2} & = & 4 \\ \|\vec{u}+\vec{v}\| & = & \sqrt{4^2+3^2} & = & 5 \neq 7 \end{array}$$

Ejercicio 11 (Demostración enunciados falsos)
Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \textit{para todo par de números reales positivos } a \textit{ y } b.$$

Para demostrar que es falsa, ¿debo probar que la igualdad nunca vale? o ¿debo hallar un par de números reales positivos a y b para los cuales no vale? Demostrar que dicha afirmación es falsa.

Solución: *para demostrar que la afirmación es falsa basta encontrar* ***un*** *par de reales positivos a y b que no verifiquen* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. *Por ejemplo $a = 3$ y $b = 2$, ya que* $\sqrt{5} \neq \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Ejercicio 12 (Demostración enunciados verdaderos)
Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \textit{para todo par de números reales positivos } a \textit{ y } b.$$

Solución: *Para demostrar que es verdadera, ¿es suficiente con probar que la igualdad vale para un par de números reales positivos a y b? ¿es suficiente probar que vale para muchos pares de números reales positivos a y b? Demostrar que dicha afirmación es verdadera.*

Para demostrar que es verdadera, no alcanza probar que la igualdad vale para un par de núúmeros, ni para muchos números. Como hay infinitos pares de números reales positivos a y b no es posible demostrar la igualdad caso por caso.

Una demostración: llamemos $x = \sqrt{a}\sqrt{b}$. *Entonces* $x^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = ab$. *Por otra parte x es positivo, pues es el producto de dos reales positivos (*$\sqrt{a}$ *y* $\sqrt{b}$*). Entonces $x > 0$ y $x^2 = ab$, y por lo tanto* $x = \sqrt{ab}$. *Concluimos que* $\sqrt{ab} = x = \sqrt{a}\sqrt{b}$, *como queríamos probar.*

Un razonamiento que no es una demostración:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} & \Longrightarrow & (\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 \\ & \Longrightarrow & (\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 \\ & \Longrightarrow & ab = ab \quad \checkmark \end{array}$$

¿Por qué no sirve como demostración? Todos los pasos son correctos. Sin embargo se utiliza lo que se quiere demostrar como premisa *y se obtiene una conclusión que es claramente cierta pero que no aporta nada. Para tener una demostración hay que utilizar como premisa afirmaciones que sean claramente ciertas o que se conozcan de otras propiedades, y obtener la afirmación como conclusión.*

Ejercicio 13 (Igualdad e inclusión de conjuntos) *Probar o refutar las afirmaciones siguientes:*

1. *Si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$.*

   Solución: *Tomamos $x \in B^c$, como $x \notin B$ y $A \subseteq B$, tenemos que $x \notin A$. Hemos probado que $B^c \subseteq A^c$*

2. $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$

   Solución: *Esta afirmación es falsa. Miremos por ejemplo los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$: $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$. Entonces $(A \cap B)^c = A^c = \mathbb{N} \setminus A$. Por otro lado $A^c \cap B^c = B^c = \mathbb{N} \setminus B$. Claramente estos dos conjuntos no son iguales.*

3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

   Solución: *$x \notin A \cap B$ si y solo si $x \notin A$ o $x \notin B$ si y solo si $x \in A^c$ o $x \in B^c$ si y solo si $x \in A^c \cup B^c$.*

4. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

   Solución: *Esta afirmación es falsa. Miremos el mismo ejemplo de subconjuntos de números naturales que en 2: $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$. Entonces $(A \cup B)^c = B^c = \mathbb{N} \setminus B$. Por la parte 1, $B^c \subseteq A^c$ y por lo tanto $A^c \cup B^c = A^c = \mathbb{N} \setminus A$.*

5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   Solución: *$x \notin A \cup B$ si y solo si $x \notin A$ y $x \notin B$ si y solo si $x \in A^c \cap B^c$.*

6. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B^c$

   Solución: *Esta afirmación es falsa. Consideremos $A = \{1,2,3\} \subseteq \mathbb{N}$ y $B = \{2\} \subseteq \mathbb{N}$. Como $B \subseteq A$, $A^c \subseteq B^c$. Por lo tanto $A^c \cup B^c = B^c = \mathbb{N} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{N} \setminus \{2\}$. Por otro lado $(A \setminus B)^c = \{1,3\}^c = \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$.*

Ejercicio 14 (Igualdad e inclusión de conjuntos) *Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.*

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   Solución: *Verdadera*

   $(\subseteq)$ $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$
   $(\supseteq)$ $x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in A \cup B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B$ *o* $x \in C \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   Solución: *Verdadera*
   $(\subseteq)$ *Si $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ y $x \in B \cap C$, o sea, $x \in A$ y ($x \in B$ y $x \in C$). En definitiva $x \in A, x \in B$ y $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$ y $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$.*
   $(\supseteq)$ *Si $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A \cap B$ y $x \in C \Rightarrow x \in A, x \in B$ y $x \in C \Rightarrow x \in A$ y $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$.*

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   Solución: *Verdadera*
   Observemos primero que por definición de unión, dado un conjunto D, si $x \in D \Rightarrow x \in D \cup F$ para cualquier conjunto F.

($\subseteq$) *Si* $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ *o* $x \in B \cap C$.
Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ *y* $x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Si $x \notin A \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ *y* $x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
($\supseteq$) *Si* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B$ *y* $x \in A \cup C \Rightarrow$ *(*$x \in A$ *o* $x \in B$*) y (*$x \in A$ *o* $x \in C$*).*
Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.
Si $x \notin A \Rightarrow x \in B$ *y* $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Solución: *Verdadera*
   La demostración es similar a la anterior

Ejercicio 15 (Demostraciones por absurdo)

1. *Probar que* $\sqrt{2}$ *es irracional.*

   Dem.: Supongamos que $\sqrt{2}$ *es racional. Entonces existen p y q números naturlaes sin divisores en común, tales que* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

   $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2qq = pp$. *Entonces 2 es divisor de pp por lo tanto tiene que ser divisor de p, por lo tanto* $\exists k,\ p = 2k$.

   $\Rightarrow 2qq = 2k2k \Rightarrow qq = 2kk$. *Haciendo el mismo razonamiento, q es par. Pero eso es absurdo dado que p y q serían pares, por lo tanto tendrán a 2 como divisor común, pero asumimos que no tenían divisores comunes.*

2. *Probar que hay infinitos números primos.*

   Dem.: Supongamos que la cantidad de números primos es finita, o sea que existen n números primos y los escribimos de manera genérica como $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

   Si definimos $q = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$*, entonces la división de q por cualquier número primo tiene resto 1, o sea, que q no es divisible por ningún número primo. Por lo tanto encontramos otro número primo que no estaba en el conjunto inicial que comprendía a todos los números primos. Por lo tanto es absurdo.*

3. *Si n no es un cuadrado perfecto entonces* $\sqrt{n}$ *es irracional.*

La demostración es análoga al de 2.