

# Sistemas y Control

---

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 3, CLASE 2

# Hoja 3. Ejercicio 5

5\*) El sistema de la **figura 5** está constituido por un carrito de masa **M** sobre el que pivota una barra de masa **m**, que actúa como péndulo invertido.

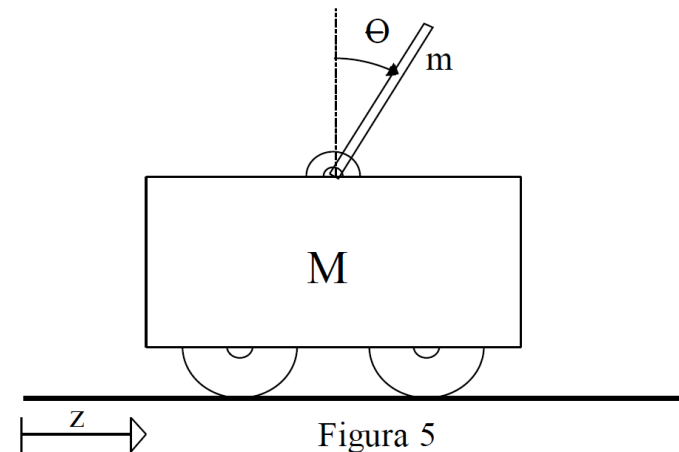
Se puede ver que en unidades adimensionadas apropiadas, el sistema puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones no lineales, que linealizadas para  $\theta$  pequeño dan lugar a:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \theta + u \\ \ddot{z} &= -a\theta - u\end{aligned}\quad \text{donde } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

donde **u** es la fuerza debida al par que un motor eléctrico ejerce sobre las ruedas.

a) Realice un diagrama de bloques del sistema.

b) Se considera como estado al vector  $\mathbf{x} = [z, dz/dt, \theta, d\theta/dt]^t$ , y salida al vector  $\mathbf{y} = [z, \theta]^t$ . Encuentre las ecuaciones de la descripción en variables de estado.



# Hoja 3. Ejercicio 5

5\*) El sistema de la **figura 5** está constituido por un carrito de masa **M** sobre el que pivota una barra de masa **m**, que actúa como péndulo invertido.

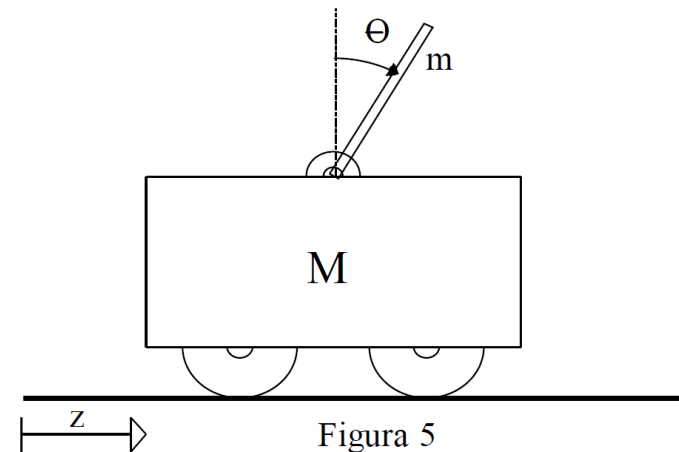
Se puede ver que en unidades adimensionadas apropiadas, el sistema puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones no lineales, que linealizadas para  $\theta$  pequeño dan lugar a:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \theta + u \\ \ddot{z} &= -a\theta - u \end{aligned} \quad \text{donde } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

donde **u** es la fuerza debida al par que un motor eléctrico ejerce sobre las ruedas.

a) Realice un diagrama de bloques del sistema.

b) Se considera como estado al vector  $\mathbf{x} = [z, dz/dt, \theta, d\theta/dt]^t$ , y salida al vector  $\mathbf{y} = [z, \theta]^t$ . Encuentre las ecuaciones de la descripción en variables de estado.



# Ecuaciones del sistema

Las ecuaciones del sistema pueden obtenerse mediante el diagrama de cuerpo libre de cada elemento

Fuerzas en el carro, ( $\hat{x}$ )

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F$$

Fuerzas en el péndulo, ( $\hat{x}$ )

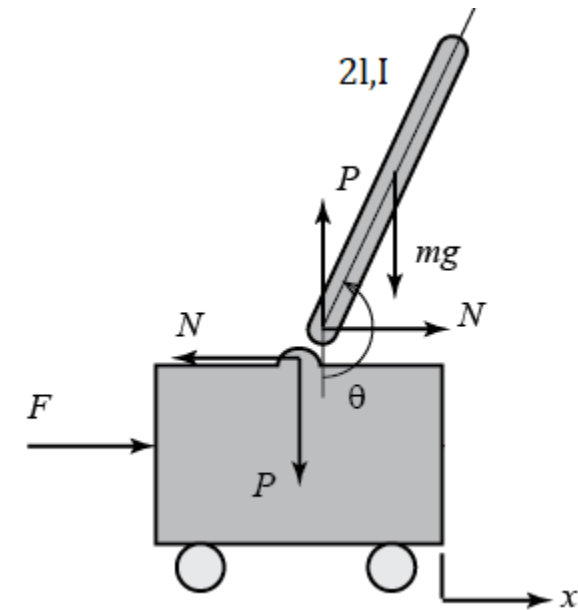
$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

Combinando

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

Operando en el otro eje

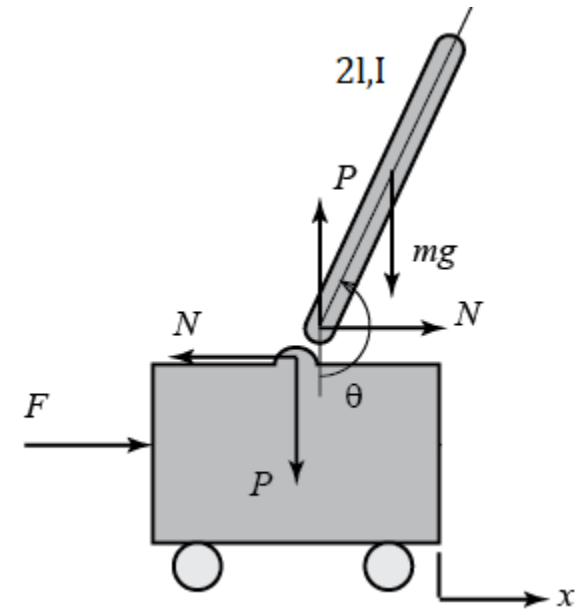
$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -ml\ddot{x}\cos\theta$$



<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling>

# Ecuaciones del sistema

- Podemos encontrar una representación lineal “aproximada” del sistema
- Varios métodos
  - Pequeños apartamientos del equilibrio  
 $\cos\theta \approx -1, \text{sen}\theta \approx \theta, \dot{\theta}^2 \approx 0$
  - Aproximación tangencial en el entorno de un punto (linealización)
- El nuevo modelo es “bueno”? Por que?



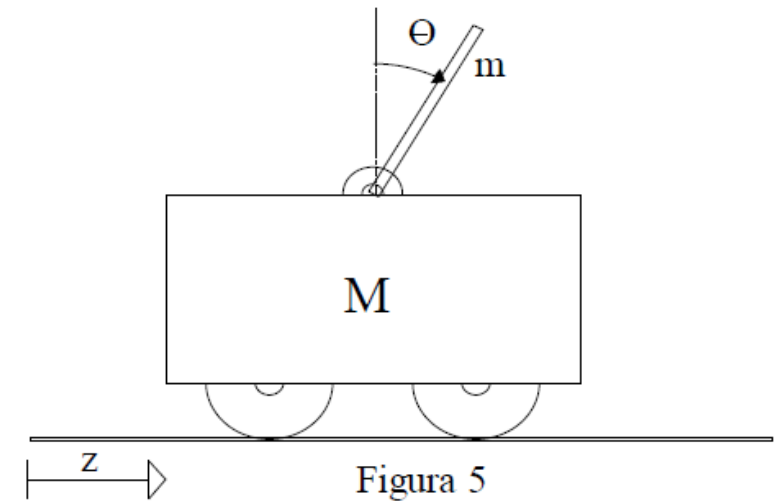
# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

Para  $\theta \approx 0$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Cómo realizar un diagrama de bloques del sistema a partir de las ecuaciones del sistema?



# Hoja 3. Ejercicio 5a

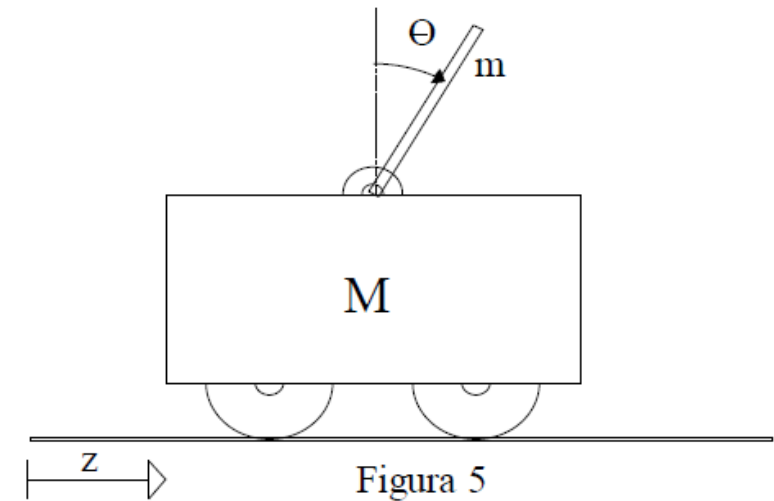
---

Para  $\theta \approx 0$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Cómo realizar un diagrama de bloques del sistema a partir de las ecuaciones del sistema?

Resulta conveniente comenzar por identificar entradas y estados



# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$[u]$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$[u]$

Los estados pueden identificarse como las magnitudes cuyas derivadas pueden expresarse como combinación lineal de otros estados y de las entradas

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$[u]$

Los estados pueden identificarse como las magnitudes cuyas derivadas pueden expresarse como combinación lineal de otros estados y de las entradas

$[\dot{\theta}, \theta, \dot{z}, z]$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

- En el diagrama de bloques, podemos usar bloques
  - Sumadores
  - Proporcionales
  - Integradores

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

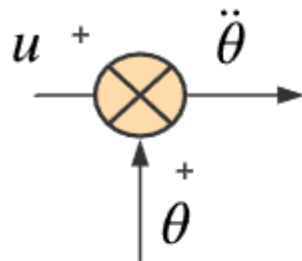
- En el diagrama de bloques, podemos usar bloques
  - Sumadores
  - Proporcionales
  - Integradores
- Para construir el diagrama de bloques, sigamos cada una de las ecuaciones como si fueran “instrucciones”

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

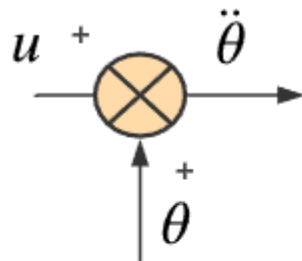


# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

→ No tenemos  $\theta$

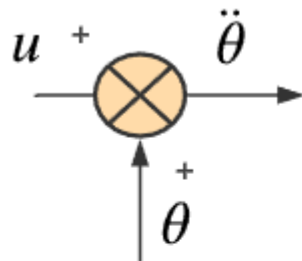


# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

→ No tenemos  $\theta$  → Supongamos que si

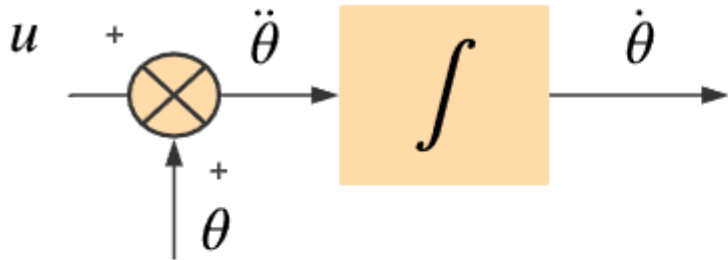




# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

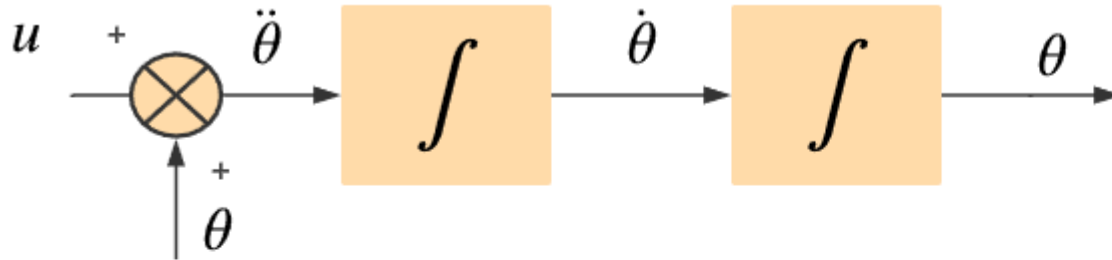
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

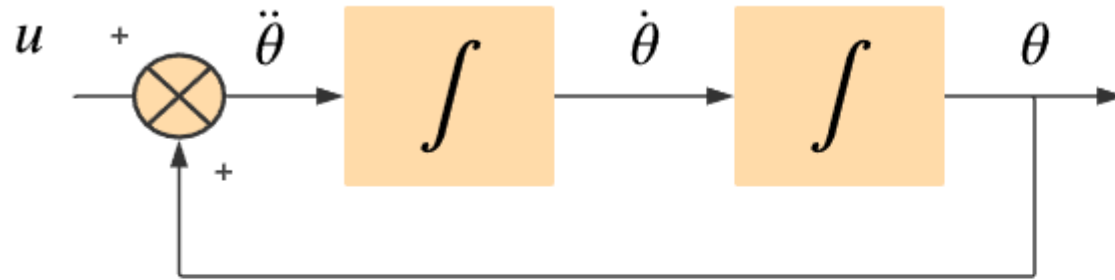
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

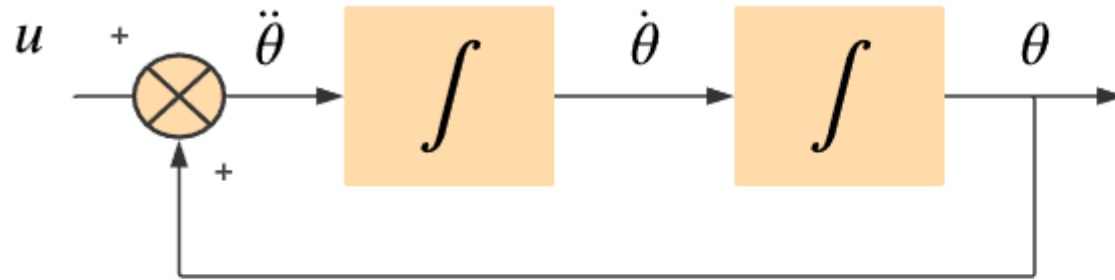
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5a

---

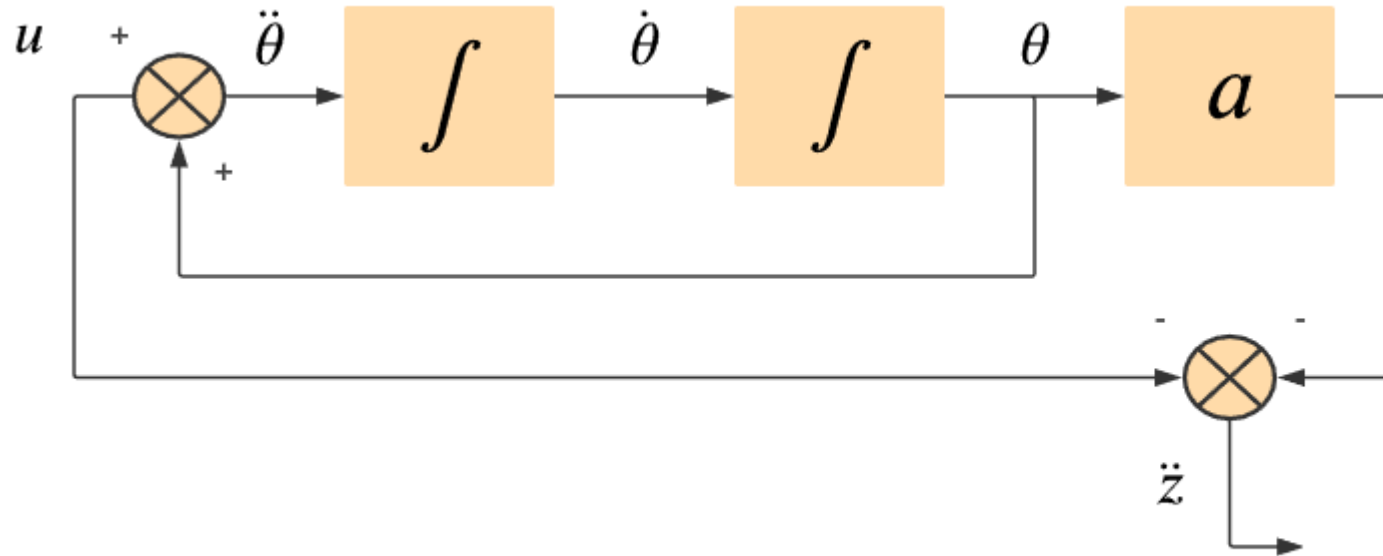
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5a

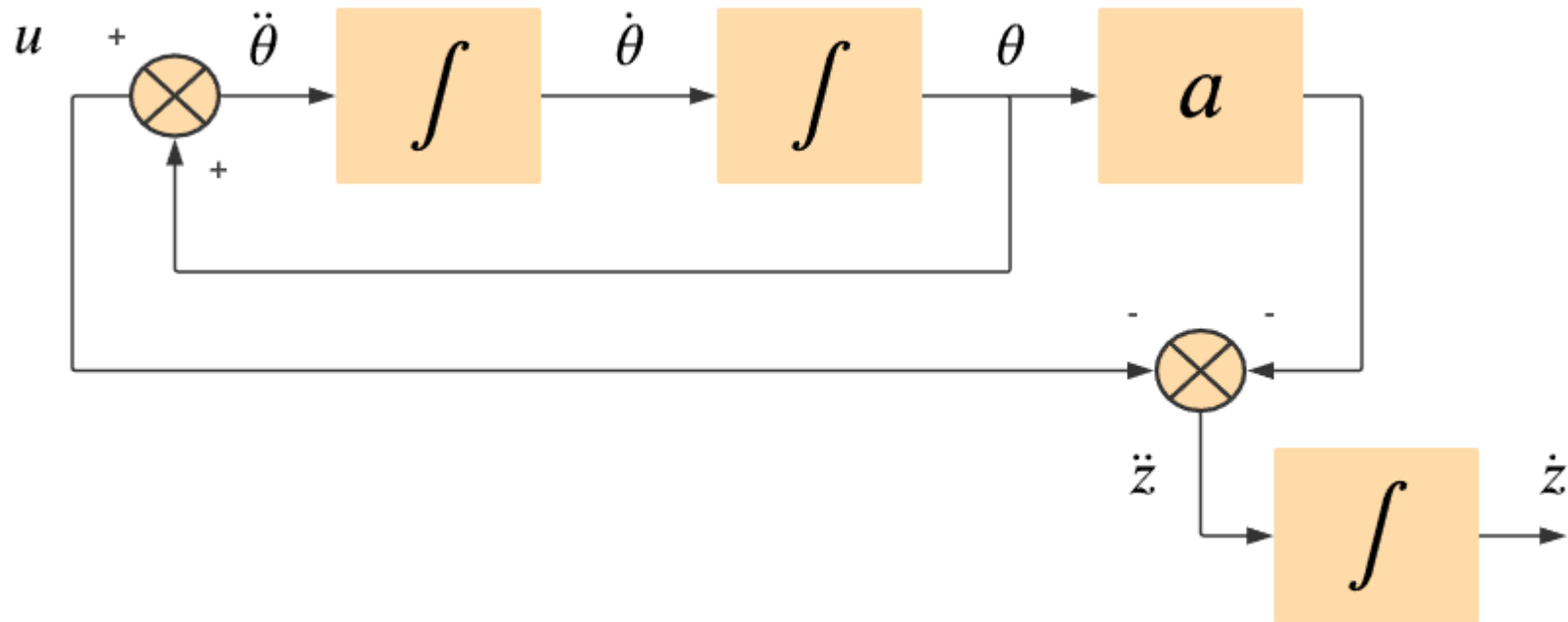
---

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

b) Se considera como estado al vector  $\mathbf{x} = [z, dz/dt, \theta, d\theta/dt]^t$ , y salida al vector  $\mathbf{y} = [z, \theta]^t$ . Encuentre las ecuaciones de la descripción en variables de estado.

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Debemos representar el sistema según la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x = [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]$$

$$y = [z, \theta]$$



# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Debemos representar el sistema según la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x = [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]$$

$$y = [z, \theta]$$

Cuáles son las dimensiones de cada una de las matrices involucradas?

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \begin{matrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{matrix} z \\ \theta \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



# Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} & & -a & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} & & -a & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} -a & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \begin{matrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \\ \begin{matrix} z \\ \theta \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

# Hoja 3. Ejercicio 5b

---

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \\ \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$