

Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 3, CLASE 2

Hoja 3. Ejercicio 5

5*) El sistema de la **figura 5** está constituido por un carrito de masa **M** sobre el que pivota una barra de masa **m**, que actúa como péndulo invertido.

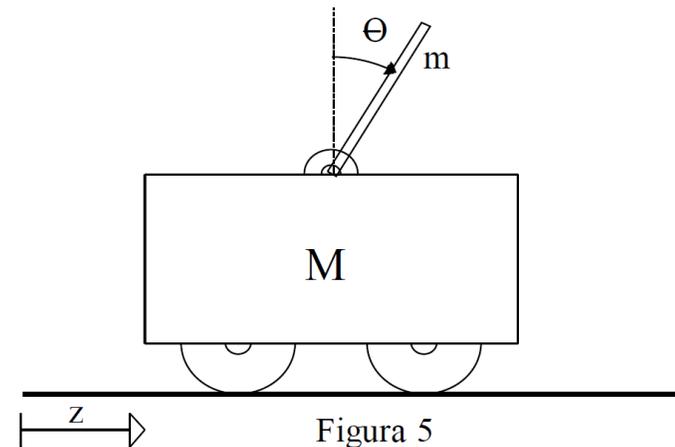
Se puede ver que en unidades adimensionadas apropiadas, el sistema puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones no lineales, que linealizadas para θ pequeño dan lugar a:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \theta + u \\ \ddot{z} &= -a\theta - u\end{aligned}\quad \text{donde } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

donde **u** es la fuerza debida al par que un motor eléctrico ejerce sobre las ruedas.

a) Realice un diagrama de bloques del sistema.

b) Se considera como estado al vector $\mathbf{x} = [z, dz/dt, \theta, d\theta/dt]^t$, y salida al vector $\mathbf{y} = [z, \theta]^t$. Encuentre las ecuaciones de la descripción en variables de estado.



Hoja 3. Ejercicio 5

5*) El sistema de la **figura 5** está constituido por un carrito de masa **M** sobre el que pivota una barra de masa **m**, que actúa como péndulo invertido.

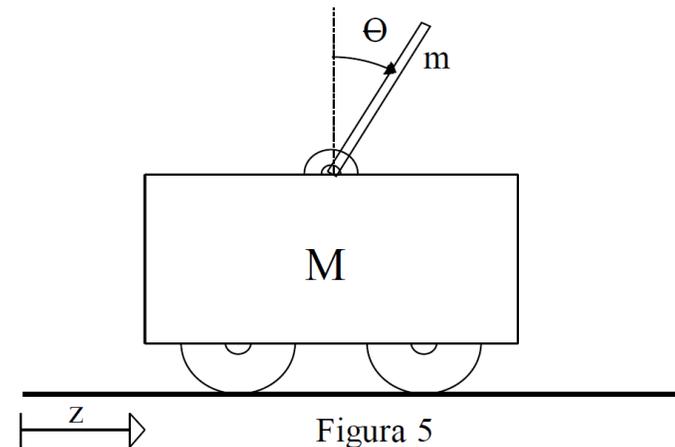
Se puede ver que en unidades adimensionadas apropiadas, el sistema puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones no lineales, que linealizadas para θ pequeño dan lugar a:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \theta + u \\ \ddot{z} &= -a\theta - u \end{aligned} \quad \text{donde } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

donde **u** es la fuerza debida al par que un motor eléctrico ejerce sobre las ruedas.

a) Realice un diagrama de bloques del sistema.

b) Se considera como estado al vector $\mathbf{x} = [z, dz/dt, \theta, d\theta/dt]^t$, y salida al vector $\mathbf{y} = [z, \theta]^t$. Encuentre las ecuaciones de la descripción en variables de estado.



Ecuaciones del sistema

Las ecuaciones del sistema pueden obtenerse mediante el diagrama de cuerpo libre de cada elemento

Fuerzas en el carro, \hat{x})

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F$$

Fuerzas en el péndulo, \hat{x})

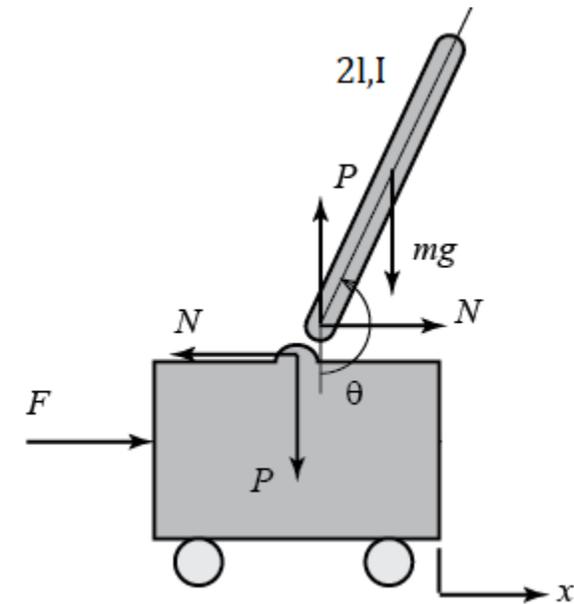
$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

Combinando

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

Operando en el otro eje

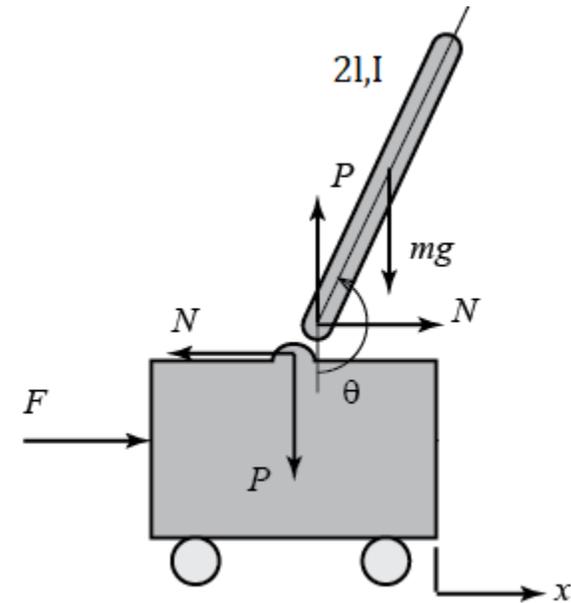
$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -ml\ddot{x}\cos\theta$$



<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum§ion=SystemModeling>

Ecuaciones del sistema

- Podemos encontrar una representación lineal “aproximada” del sistema
- Varios métodos
 - Pequeños apartamientos del equilibrio
 $\cos\theta \approx -1, \text{sen}\theta \approx \theta, \dot{\theta}^2 \approx 0$
 - Aproximación tangencial en el entorno de un punto (linealización)
- El nuevo modelo es “bueno”? Por que?

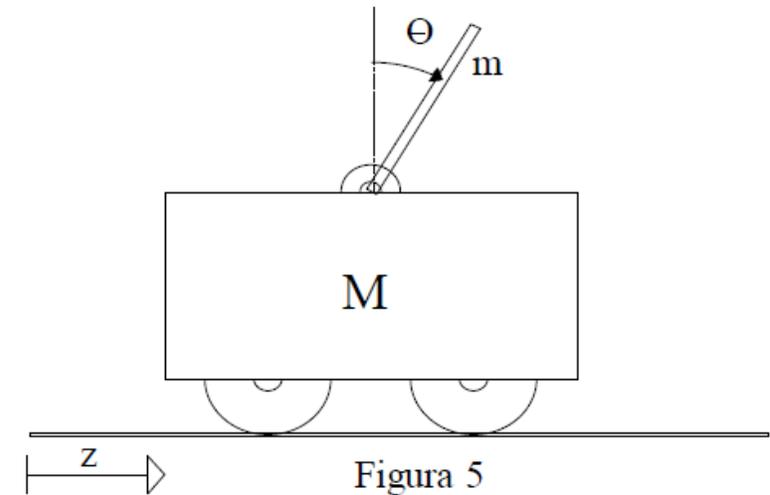


Hoja 3. Ejercicio 5a

Para $\theta \approx 0$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Cómo realizar un diagrama de bloques del sistema a partir de las ecuaciones del sistema?



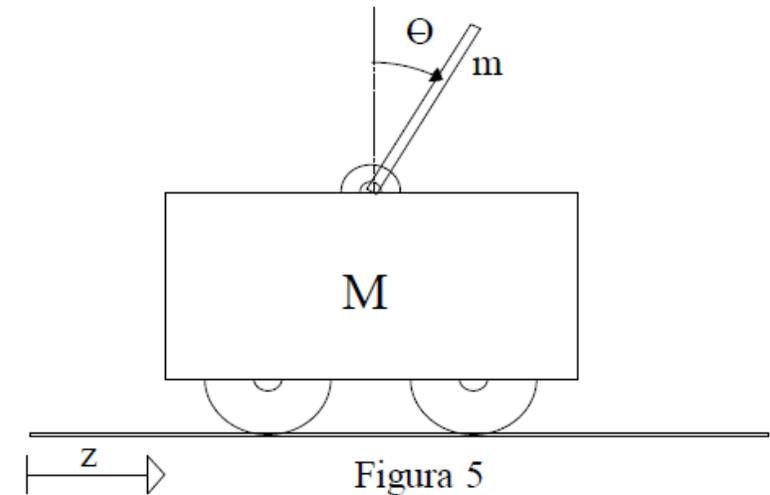
Hoja 3. Ejercicio 5a

Para $\theta \approx 0$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Cómo realizar un diagrama de bloques del sistema a partir de las ecuaciones del sistema?

Resulta conveniente comenzar por identificar entradas y estados



Hoja 3. Ejercicio 5a

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Hoja 3. Ejercicio 5a

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$[u]$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Hoja 3. Ejercicio 5a

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$[u]$

Los estados pueden identificarse como las magnitudes cuyas derivadas pueden expresarse como combinación lineal de otros estados y de las entradas

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Hoja 3. Ejercicio 5a

La entrada del sistema puede identificarse por no ser dependiente de la dinámica del sistema

$[u]$

Los estados pueden identificarse como las magnitudes cuyas derivadas pueden expresarse como combinación lineal de otros estados y de las entradas

$[\dot{\theta}, \theta, \dot{z}, z]$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Hoja 3. Ejercicio 5a

- En el diagrama de bloques, podemos usar bloques
 - Sumadores
 - Proporcionales
 - Integradores

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

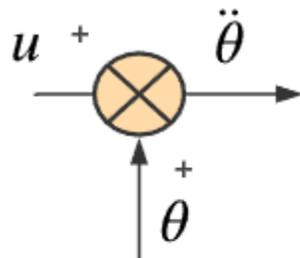
Hoja 3. Ejercicio 5a

- En el diagrama de bloques, podemos usar bloques
 - Sumadores
 - Proporcionales
 - Integradores
- Para construir el diagrama de bloques, sigamos cada una de las ecuaciones como si fueran “instrucciones”

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases} \text{ con } a = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{m+M}$$

Hoja 3. Ejercicio 5a

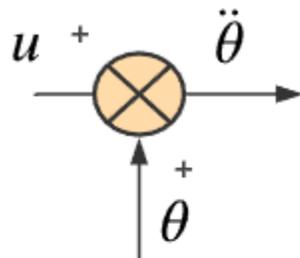
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

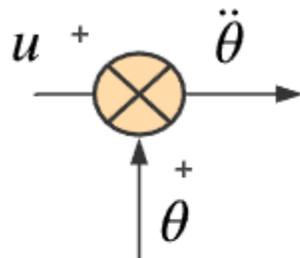
→ No tenemos θ



Hoja 3. Ejercicio 5a

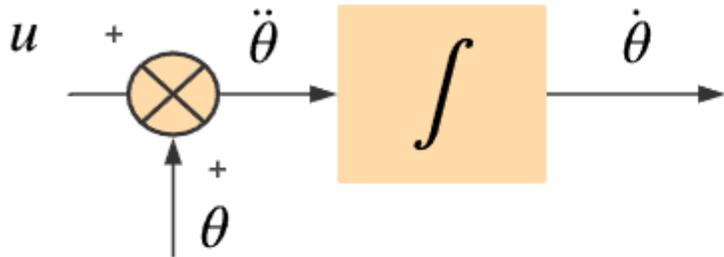
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

→ No tenemos θ → Supongamos que si



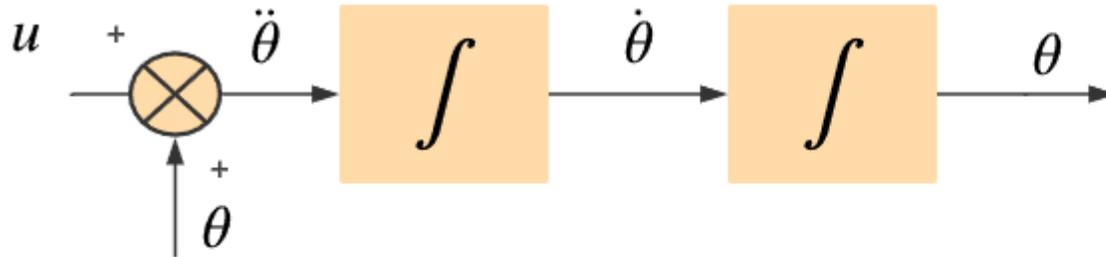
Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



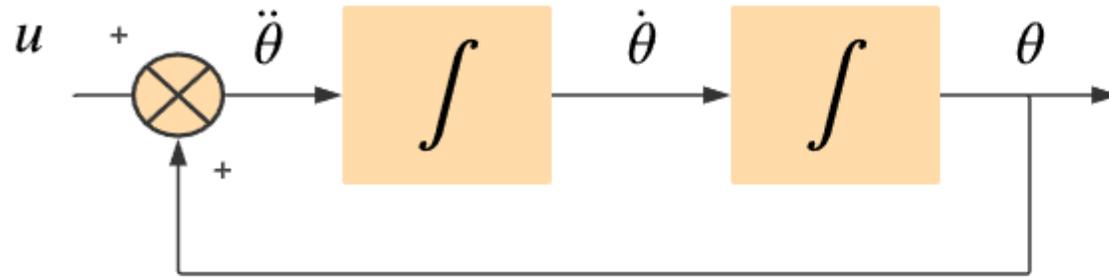
Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



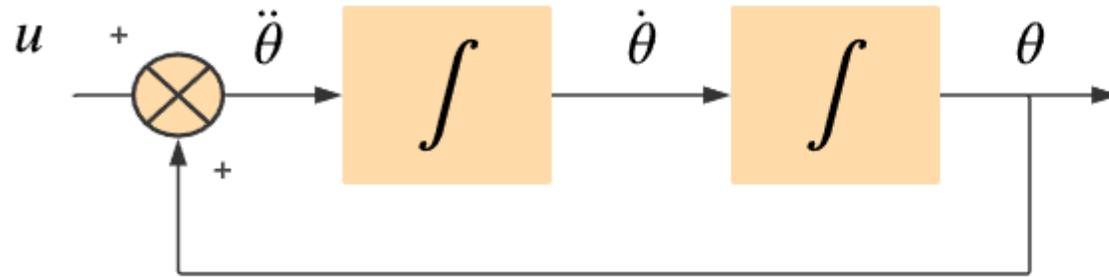
Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



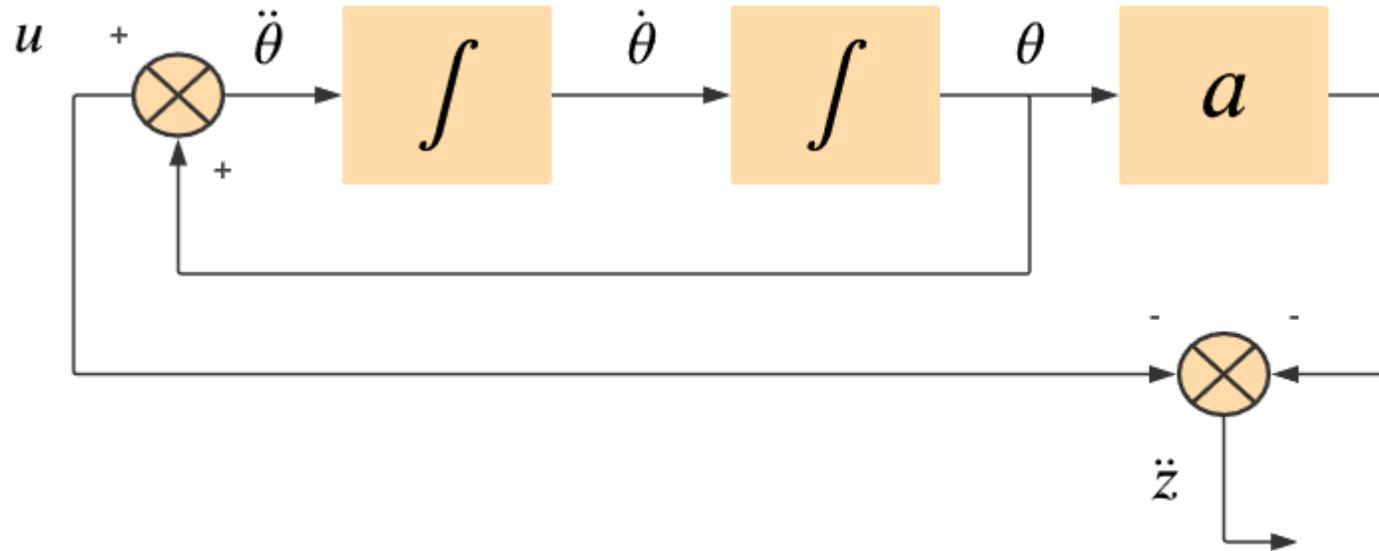
Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



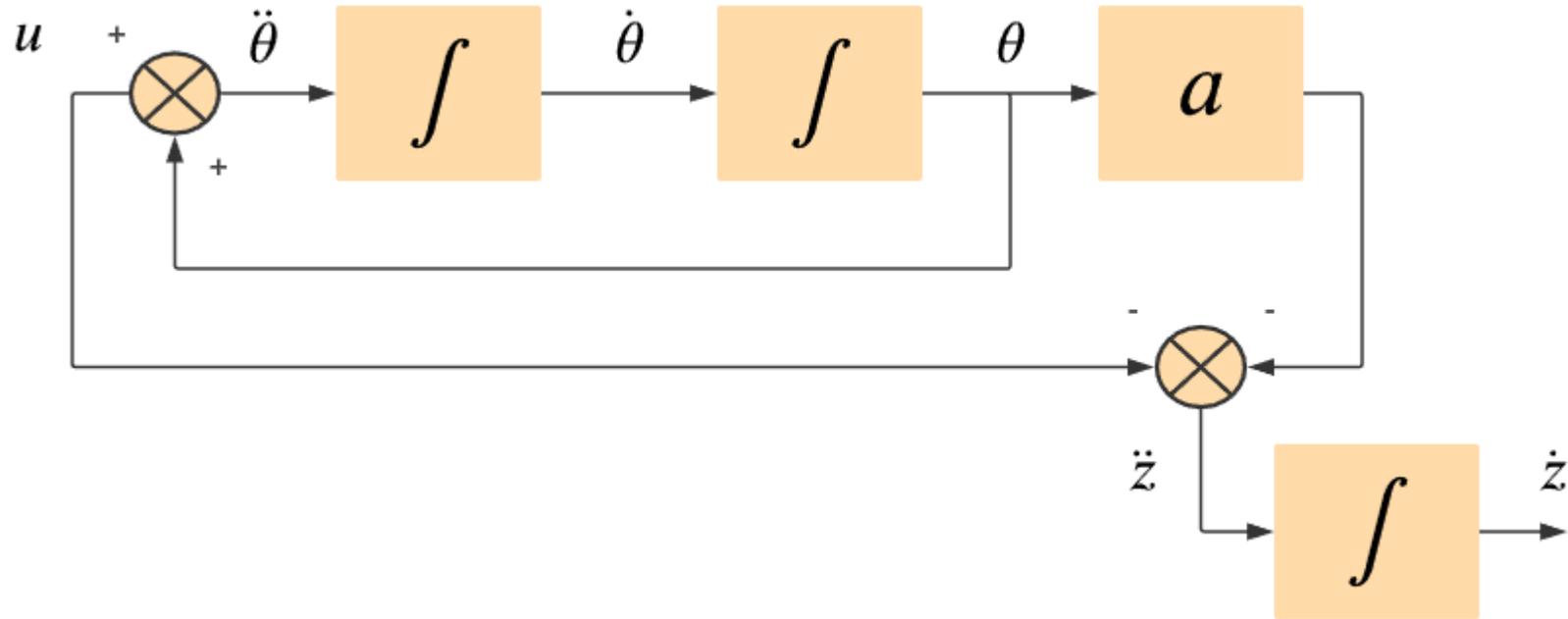
Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



Hoja 3. Ejercicio 5a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \dot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$



Hoja 3. Ejercicio 5b

b) Se considera como estado al vector $\mathbf{x} = [z, dz/dt, \theta, d\theta/dt]^t$, y salida al vector $\mathbf{y} = [z, \theta]^t$. Encuentre las ecuaciones de la descripción en variables de estado.

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Debemos representar el sistema según la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x = [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]$$

$$y = [z, \theta]$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Debemos representar el sistema según la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x = [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]$$

$$y = [z, \theta]$$

Cuáles son las dimensiones de cada una de las matrices involucradas?

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \begin{matrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{matrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} & -a & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} & & -a & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} -a & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \begin{matrix} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \\ \begin{matrix} z \\ \theta \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$

Hoja 3. Ejercicio 5b

$$\begin{cases} \ddot{z} \\ \dot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$
$$\begin{cases} z \\ \theta \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \theta + u \\ \ddot{z} = -a\theta - u \end{cases}$$