Resumen de la semana 5

!Llegó el quinto resumen semanal! Seguimos trabajando con ecuaciones autónomas, esta vez tocan raíces complejas. Ya está pronto el librillo virtual, ahí podés encontrar los videos del curso organizados. ¡También salió el cuestionario de autoevaluación de sistemas lineales, no te olvide de hacerlo!

1. Valores propios complejos

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

Como siempre, si lo pasamos a una notación matricial tenemos que este sistema es equivalente a $\dot{X} = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Observar que esta matriz tiene valores propios complejos (la ecuación $(3-\lambda)^{+}1 = 0$ no tiene raíces reales). Para poder resolver esto, pasamos el problema a polares mediante el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsen(\theta) \end{cases}$$

observando que tanto θ como r son funcione de t. Luego, derivando la ecuación $r^2 = x^2 + y^2$ obtenemos la ecuación $\dot{r} = 3r$. Además, derivando $x = rcos(\theta)$ obtenemos la ecuación $\dot{\theta} = \theta$. Resolviendo ambas ecuaciones obtenemos que $r(t) = r_0 e^{3t}$ y $\theta(t) = t + \theta_0$. Estas ecuaciones nos dice como va a ser el diagrama de fase: a medida que avanza el tiempo el ángulo de la trayectoria crece y el módulo se hace más grande, por lo que la solución tendrá forma de una espiral que va creciendo.

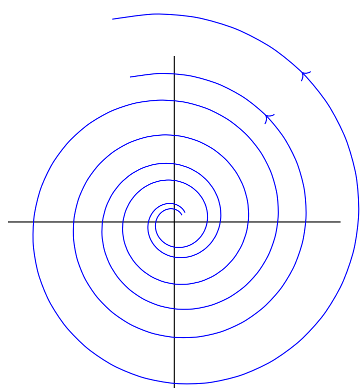

Figura 1: Diagrama de fase para el sistema $\dot{X} = AX$

2. Cambio de base

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

equivalente al sistema $\dot{X} = BX$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Si hallamos la solución a la ecuación $det(B - \lambda Id) = 0$ encontramos que esta matriz tiene valores propios λ y $\bar{\lambda}$ con $\lambda = 1 + i$. Hallamos $Ker(B - (1+i)Id) = Ker \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}$. De acá obtenemos que un vector propio $v = (x, y)$ debe cumplir $-x + (-1-i)y = 0$. Luego, un posible vector propio es $(1+i, -1)$. Si consideramos la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que consiste en poner los vectores $Re(v)$ y $Im(v)$ colgados obtenemos que $P^{-1}BP = C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Es decir que nuestra matriz vista en la base $\{u, v\}$ con $u = (1, -1)$ y $v = (1, 0)$ tiene la misma forma que una matriz como la de la sección anterior. Observar que $C = \begin{pmatrix} Re(\lambda) & Im(\lambda) \\ -Im(\lambda) & Re(\lambda) \end{pmatrix}$. Si hacemos el cambio de variable $X = PY$ obtenemos el sistema $\dot{Y} = CY$, y su solución expresada en polares es

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^t \\ \theta(t) = \theta + \theta_0 \end{cases}$$

A continuación están los dibujos del diagrama de fase.

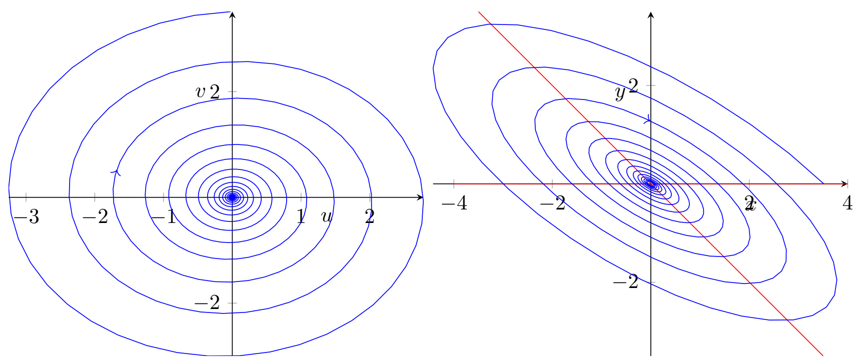

Figura 2: Diagrama de fase de la ecuación $\dot{X} = BX$, a la derecha visto en la base canónica y a la izquierda en la base $\{(1, -1), (1, 0)\}$.