Análisis de Fourier en Óptica Clásica – Clase 1

- Motivación: linealidad de los sistemas ópticos

  cierto rango de validez que tenemos que determinar

- Temas de actualidad donde óptica de Fourier es relevante:

  Microscopía de super-resolución

  Ptycografía de Fourier

  Holografía Digital, Lensless Img - - -

- Transformada de Fourier en 2 dimensiones

Goodman, Cap. 2

$g = g(x,y)$; g: compleja ; x, y: variables indep.
(coord. cartesianas en el plano)

- Transformada de Fourier:

$$G(f_x, f_y) = \underbrace{\mathcal{F}\{g\}}_{\text{TF de } g} = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)}\, dx\, dy$$

f_x, f_y : frecuencias $\left([f_x] = \frac{1}{[x]}, \text{etc.} \right)$

- Transformada inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(f_x, f_y)\, e^{+j2\pi(f_x x + f_y y)}\, df_x\, df_y$$

Las anteriores están bien definidas con condiciones de regularidad aceptables para g, G

Sin embargo, tengo que tratar con idealizaciones matemáticas por ejemplo para tratar con un impulso en un sistema, que pueden no cumplir las condiciones de regularidad:

· Delta de Dirac:

$$\delta(x,y) = \lim_{N\to\infty} N^2 e^{-\pi N^2(x^2+y^2)}$$

(y def. equivalentes)

La puedo definir como el límite de una función regular como la anterior o en términos más formales como un

funcional o distribución

función: lleva de un número a otro

funcional: lleva de una función a un número

La característica fundamental de la delta de Dirac es la propiedad de 'cribado' (sifting property):

(caso unid.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - b)\, h(\xi)\, d\xi = \begin{cases} h(b), & h \text{ cont. en } b \\ \frac{1}{2}\left[h(b^+) + h(b^-)\right], & h \text{ discont. en } b \end{cases}$$

$([\delta(x)]?:\ [\delta] = 1/[x])$

$$\mathcal{F}\{\delta(x,y)\} = \int\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,y)\, e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)}\, dx\, dy$$

$$= e^{-j2\pi(f_x 0 + f_y 0)} = 1$$

$$\left(\mathcal{F}\left[N^2 e^{-N^2\pi(x^2+y^2)} \right] = e^{-\pi(f_x^2+f_y^2)/N^2} \right.$$

$$\left. \Rightarrow \mathcal{F}\{\delta(x,y)\} = \lim_{N\to\infty} e^{-\pi(f_x^2+f_y^2)/N^2} = 1 \right)$$

■ La transformada como una descomposición:

$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{G\} =$$

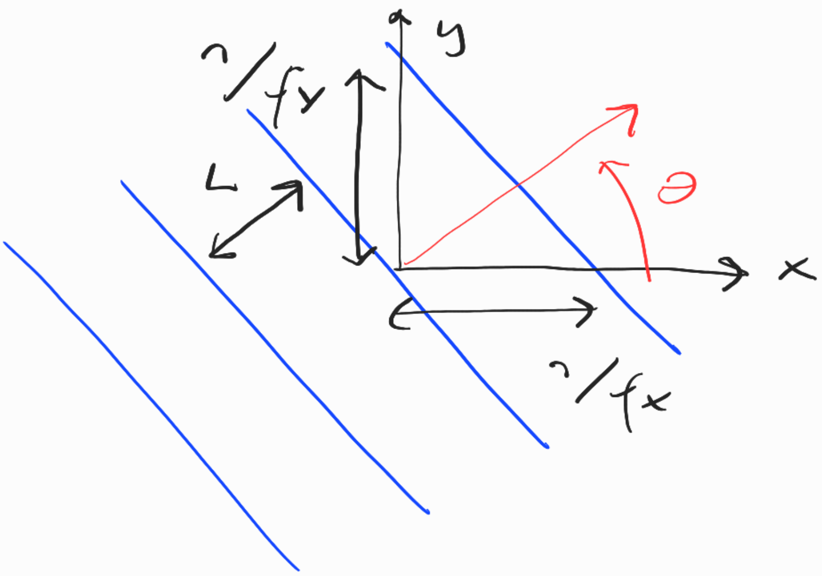
$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} G(f_x,f_y)\, \underbrace{e^{+j2\pi(f_x x + f_y y)}}_{}\, df_x\, df_y$$

superposición de funciones de esta forma con un peso dado por

$e^{+j2\pi(f_x x + f_y y)}$: líneas de fase constante $n\,2\pi$

↑ un múltiplo de 2π

$$f_x x + f_y y = n\,2\pi \; : \; y = -\frac{f_x}{f_y}x + \frac{n}{f_y}$$



$$L = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$$

Teoremas de la Transformada de Fourier:

1) <u>Linealidad</u>:

$$\mathcal{F}\{\alpha g+\beta h\} = \alpha \mathcal{F}\{g\} + \beta \mathcal{F}\{h\}$$

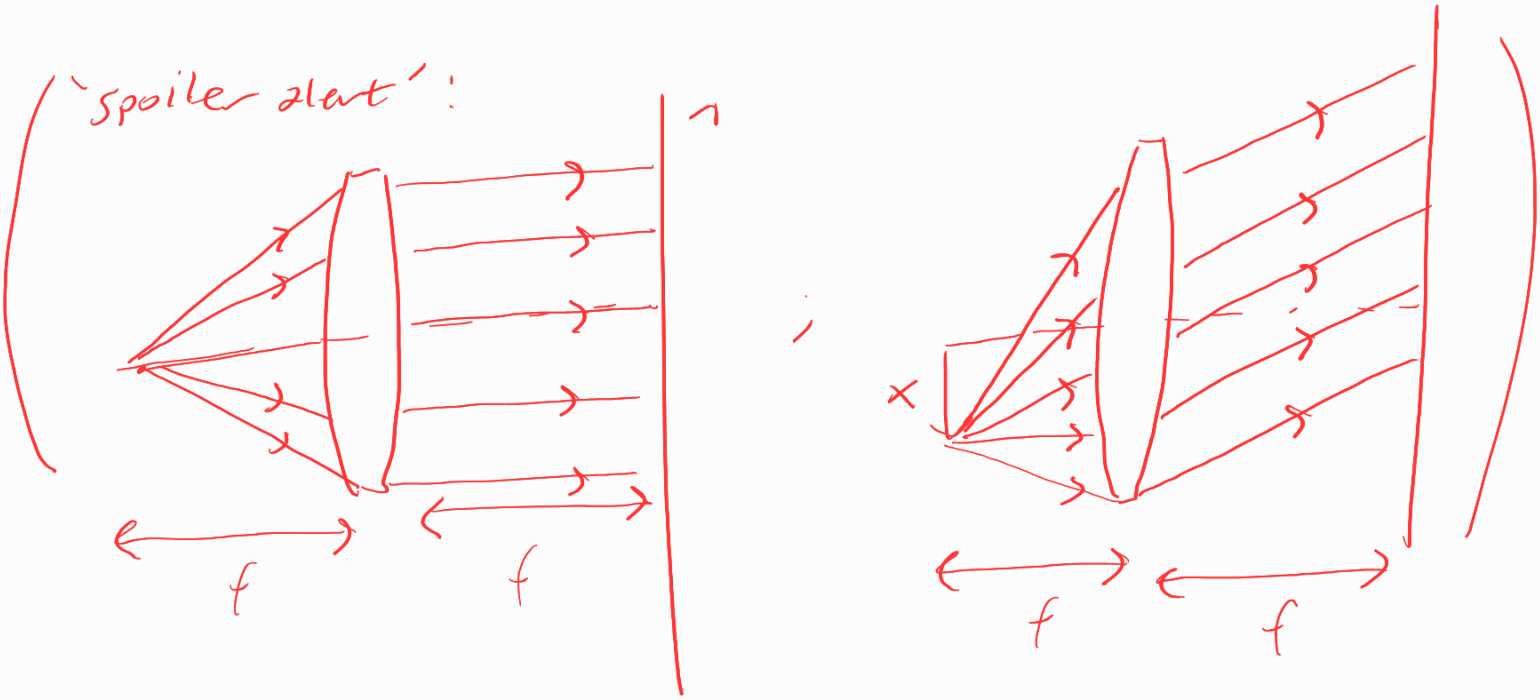
2) <u>Similaridad</u>:

$$\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(f_x, f_y):$$

$$\mathcal{F}\{g(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|} G(f_x/a, f_y/b)$$

3) <u>Corrimiento</u> ('shift'):

$$\mathcal{F}\{g(x-a,y-b)\} = e^{-j2\pi(f_x a + f_y b)} G(f_x, f_y)$$



4) Teo. de Rayleigh (o Parseval):

$$\underbrace{\iint_{-\infty}^{+\infty} |g(x,y)|^2 \, dx\,dy}_{\text{Energía de la señal}} = \underbrace{\iint_{-\infty}^{+\infty} |G(f_x,f_y)|^2 \, df_x\, df_y}_{\text{densidad espectral}}$$

Energía de la $\Rightarrow$ densidad espectral

señal

5) <u>Convolución</u>:

$$g * h \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta)\, h(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g*h\} = G(f_x,f_y)\, H(f_x,f_y)$$

6) <u>Autocorrelación</u>:

• Correlación :

$$g \otimes h \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta)\, h^*(\xi-x, \eta-y)\, dx\,dy$$

$$= g(x,y) * h^*(-x,-y) \Rightarrow \mathcal{F}\{g \otimes g\} = |G|^2$$

7) Teorema integral de Fourier

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[g(x,y)] = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[g(x,y)] = g(x,y)$$

• Transformada de funciones separables:

Sea $g(x,y) = g_x(x)\, g_y(y)$

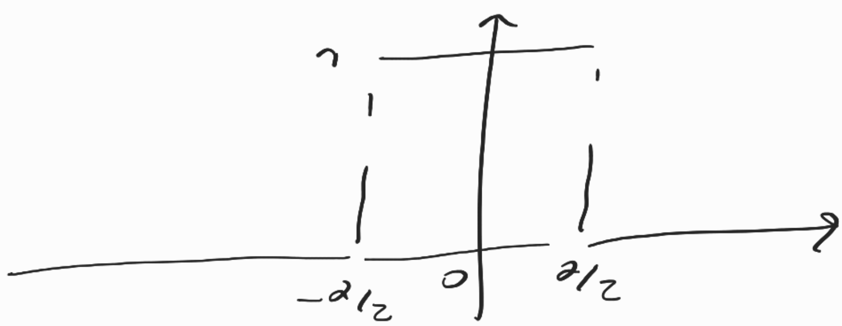
$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g(x,y)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\; g_x(x)\, g_y(y)\, e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)}$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; g_x(x)\, e^{-j2\pi f_x x}\right)}_{\underbrace{\mathcal{F}_x(g_x(x))}_{G_x(f_x)}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy\; g_y(y)\, e^{-j2\pi f_y y}\right)}_{\underbrace{\mathcal{F}_y(g_y(y))}_{G_y(f_y)}}$$

Para funciones separables, podemos trabajar sobre la transformada de cada dimensión espacial (TF 1D)

• Ejemplos unidimensionales:

▫ Función rectángulo: $\text{rect}(x/a),\ \Pi(x/a)$: $\begin{cases} 1, & |x| \leq a/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$



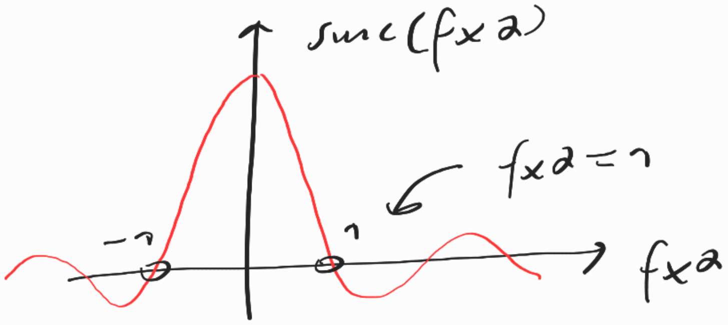
+ gral: $\Pi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

$(b - a/2 \leq x \leq b + a/2)$

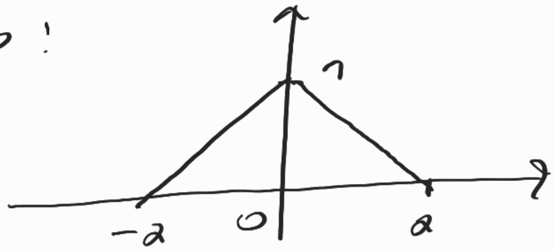
$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\Pi(x/a)\} = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j2\pi f_x x}\, dx =$$

$$a\,\frac{1}{\pi f_x a}\;\frac{e^{j\pi f_x a}-e^{-j\pi f_x a}}{2j}=\underline{a\,\mathrm{sinc}(f_x a)}$$

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

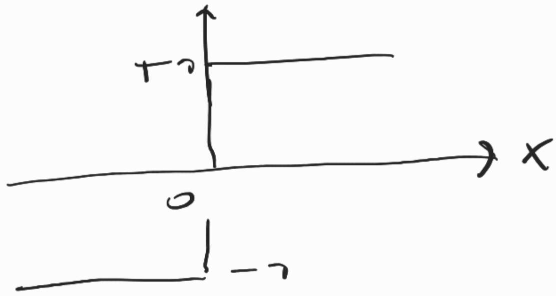


1. Función triángulo:



Ejercicios entregable

2. Función signo:



$$sg(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ +1, & x>0\end{cases}$$

ver en ejercicios que:

$$\mathcal{F}\{sg(x)\}=\frac{1}{j\pi f_x}$$

3. Función escalón: (Heaviside)

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

(más simple tb: $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$)

$$H(x)=\frac{1}{2}(1+sg(x))\Rightarrow\mathcal{F}\{H(x)\}=\frac{1}{2}\left(\delta(f_x)+\frac{1}{j\pi f_x}\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\underbrace{\mathcal{F}[\delta(x)]}_{1}\}=\delta(f_x);\ \mathcal{F}\{1\}=\delta(f_x)$$

$\mathcal{F}\{H(x)\}$: