Análisis de Fourier en Óptica Clásica
Entregable 1

Ejercicio 1. Pruebe las siguientes propiedades de la delta de Dirac:

a) $\delta(ax, by) = \dfrac{1}{|ab|}\delta(x, y)$

b) $\mathrm{III}(ax)\mathrm{III}(by) =$
$$\frac{1}{|ab|}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(x-\frac{n}{a}\right)\delta\left(y-\frac{m}{b}\right)$$

Ejercicio 2. Halle las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

a) $Sg(ax)Sg(by)$

b) $\Lambda(ax)\Lambda(by)$

c) $exp\left[j2\pi\left(ax+by\right)\right]$

d) $exp\left[j\pi\left(a^2x^2+b^2y^2\right)\right]$

e) $exp\left[-\pi\left(a^2x^2+b^2y^2\right)\right]$

Ejercicio 3.

a) Sea $g(x, y)$ una función suficientemente derivable con transformada de Fourier conocida: $\mathcal{F}\left\{g(x, y)\right\} = G(f_X, f_Y)$. Determine la transformada de Fourier de su derivada parcial de orden n en x:
$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n g}{\partial x^n}\right\}$$

b) Dada la ecuación de Poisson:
$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
donde $\rho(\vec{r})$ es una distribución de carga conocida, halle una expresión integral para $\Phi(\vec{r})$ en términos de la transformada de Fourier de la distribución de carga.

c) *Operando adecuadamente sobre la expresión integral anterior, pruebe que el potencial se puede expresar como:
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r'}\,\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

Ejercicio 4. Halle la transformada de Hankel de orden cero (también conocida como transformada de *Fourier-Bessel*) de las siguientes funciones:

a) $g_0(r) = \delta(r - r_0)$

b) función anillo: $g_0(r) = 1$ para $a \leq r \leq b$ y cero en otro caso.

Ejercicio 5.

a) Muestre que las exponenciales complejas: $exp\left[j2\pi\left(f_X x + f_Y y\right)\right]$ son funciones propias de los sistemas lineales invariantes. ¿Cuáles son los valores propios asociados a las mismas?

b) Considere la siguiente entrada sinusoidal a un sistema lineal invariante:

$$g(x,y) = cos\left[2\pi\left(\overline{f_X}x + \overline{f_Y}y\right)\right]$$

Determine qué condición debe cumplir la respuesta al impulso del sistema para que la salida tenga la misma forma sinusoidal y frecuencia $\left(\overline{f_X}, \overline{f_Y}\right)$.

Ejercicio 6. Pruebe que una función $g(x,y)$ sin componentes espectrales fuera de un círculo de radio B en el espacio de frecuencias, obedece el siguiente teorema del muestreo:

$$g(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n}{2B}, \frac{m}{2B}\right)\frac{\pi}{4}\left\{\frac{2J_1\left[2\pi B\sqrt{\left(x-\frac{n}{2B}\right)^2 + \left(y-\frac{m}{2B}\right)^2}\right]}{2\pi B\sqrt{\left(x-\frac{n}{2B}\right)^2 + \left(y-\frac{m}{2B}\right)^2}}\right\}$$