Resumen Semana 4

1. Matriz diagonalizable

   Supongamos que tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

   Como siempre, si lo pasamos a una notación matricial tenemos que este sistema es equivalente a $\dot{X} = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Si bien esta matriz no es diagonal, es diagonalizable: podemos encontrar una base donde la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = Av$ sí es diagonal (recordar que la matriz asociada a la transformación en la base canónica es A). Para hacer esto calculamos los valores propios resolviendo $det(A - \lambda Id) = 0$. Es decir

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

   De donde deducimos que los valores propios son 1 y 2. Para encontrar los subespacios de vectores propios asociados a cada valor propio, tenemos que hallar el $ker(A - Id)$ y $ker(A - 2Id)$ respectivamente. Para el valor propio 1 debemos hallar el espacio de vectores v tales que $(A - Id)v = 0$. Para eso resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

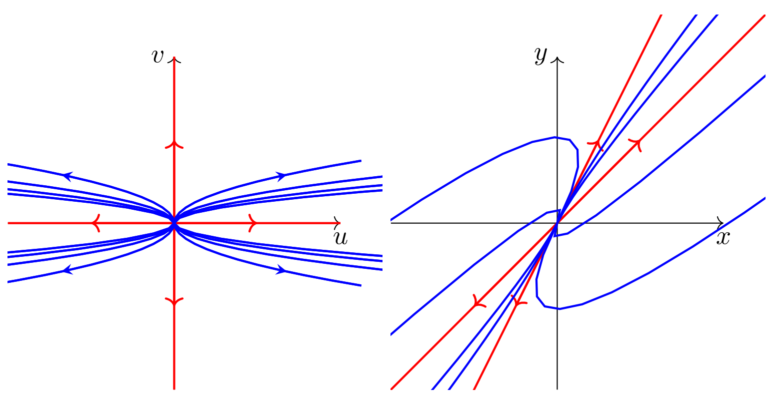

Figura 1: Diagrama de fase de la ecuación $\dot{X} = AX$ y a la izquierda visto en la base canónica y a la derecha en la base $\{(1,1),(1,2)\}$. Observar que el dibujo de la derecha se obtiene multiplicando cada punto del de la izquierda por la matriz P

   De esto sacamos la ecuación $2v_1 - v_2 = 0$ y concluimos que un vector propio del valor propio 1 es, por ejemplo, $(1, 2)$ (recordar que hay todo un subespacio de vectores propios, por lo que cualquier múltiplo de este vector es un vector propio).

   Análogamente para el valor propio 2, encontramos que un vector propio es $(1, 1)$. ¿Qué significa esto geométricamente? Que si vemos nuestro sistema con coordenadas en la base $V = \{(1,2),(1,1)\}$ entonces nuestro sistema es diagonal.

   Algebraicamente tenemos que si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $D = P^{-1}AP$ por la propiedad cambio de base de transformaciones lineales. Luego, si realizamos el cambio de variable

$X(t) = PY(t)$ con $Y(t) = (u(t), v(t))$ entonces nuestro sistema queda $P\dot{Y} = APY$ que es equivalente a $\dot{Y} = DY$ que sí sabemos resolver. Podemos ver el diagrama de fase en la figura 1

2. Matriz de Jordan Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 8y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

equivalente al sistema $\dot{X} = BX$ con $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ Si hallamos la solución a la ecuación $det(B - \lambda Id) = 0$ encontramos que esta matriz tiene un único valor propio 3. Hallamos $Ker(B - 3Id) = Ker \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ encontramos que la matriz tiene un único subespacio de vectores propios generado por el vector $(2, -1)$. Esto implica que dicha matriz no es diagonalizable, lo que implica que no es semejante a una matriz diagonal. Sin embargo, la matriz sí es semejante a una **matriz de Jordan**, es decir, una matriz de la forma $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Para encontrar P tal que $J = P^{-1}BP$ tenemos que hallar una base $\{v_1, v_2\}$ tal que $Bv_1 = 3v_1 + v_2$ y $Bv_2 = 3v_2$. Ya sabemos que $v_2 = (2, -1)$. Vamos a encontrar v_1. Esto es equivalente a resolver el sistema $(B - 3Id)v_1 = v_2$ o, lo que es lo mismo, $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si $v_2 = (x, y)$ esto implica que $2x + 4y = 1$ o que $x = (1 - 4y)/2$ tomando $y = 0$ concluimos que el vector $(1/2, 0)$ cumple lo pedido. Luego, si consideramos $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $J = P^{-1}BP$. Si realizamos el cambio de variable $X = PY$ entonces el sistema queda $\dot{Y} = JY$, es decir

$$\begin{cases} \dot{u} = 3u \\ \dot{v} = u + 3v \end{cases}$$

de donde tenemos que $u = u_0e^{3t}$ y $\dot{v} = u_0e^{3t} + 3v$. Resolviendo esta ecuación (que es lineal de primer orden) tenemos que $v = u_0te^{3t} + v_0e^{3t}$. Su diagrama de fases es el de la figura 2. La recta roja de la figura viene de observar en qué puntos se anula la derivada $\dot{v}$, es decir, en qué puntos la tangente a la solución es colineal con el vector u.

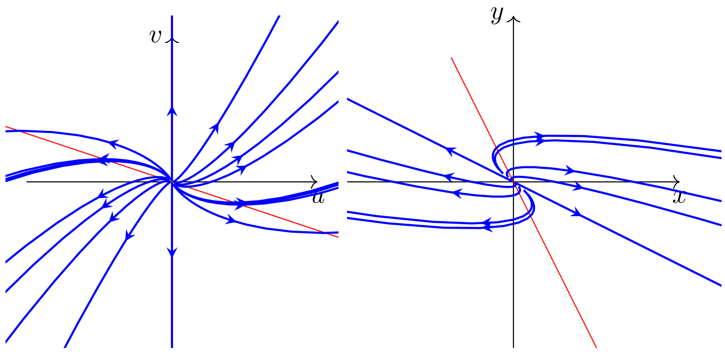

Figura 2: Diagrama de fase de la ecuación $\dot{X} = BX$, a la izquierda visto en la base canónica y a la derecha en la base $\{(1/2, 0), (2, -1)\}$. Observar en el dibujo de la izquierda como cambia el comportamiento cuando se cruza la recta roja $u = -3v$