

**INSTITUTO DE FÍSICA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**PROPIEDADES ÓPTICAS DE MATERIALES**

**Curso 2022**

**Práctico III – Metales.**

**Fecha de Entrega: 30 de Setiembre de 2022.**<sup>1</sup>

**Ejercicio N° 1 – Dependencia en Frecuencia de la Conductividad Eléctrica.**

Para un electrón de masa  $m$  y carga  $-e$ , ante un campo externo aplicado  $E$  y una fuerza disipativa de tiempo de relajación  $\tau$ , la velocidad de desplazamiento  $v$  del electrón viene dada por la ecuación:

$$m\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau}\right) = -eE$$

A partir de dicha ecuación:

- a) Demuestre que ante un campo estático la conductividad de continua es  $\sigma(0) = ne^2\tau/m$ , donde  $n$  es la densidad volumétrica de electrones.
- b) Demuestre que ante un campo de frecuencia  $\omega$ , la conductividad a la frecuencia  $\omega$  es:

$$\sigma(\omega) = \sigma(0) \left( \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right).$$

- c) Verifique si este resultado cumple la regla suma.

NOTA: Regla suma para  $\hat{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ :  $\chi'_{dc} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\Omega \frac{\chi''(\Omega)}{\Omega}$ .

- d) Halle los límites de esta expresión para  $\omega\tau \gg 1$ , y  $\omega\tau \ll 1$ .
- e) A la luz de este resultado, reinterprete los de la parte c del Ejercicio N° 7 – Material Óhmico del Práctico I.
- f) Encuentre por este método la constante dieléctrica  $\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$  verifique la correspondiente regla suma en este caso. ¿Es la misma de la parte c) anterior?
- g) Considere ahora que el sistema estuvo sometido al campo estático de la parte a), y que este se apaga a partir de un determinado instante. Es

---

<sup>1</sup> - La entrega mínima debe contener los ejercicios marcados con asterisco, que en este repartido son: Ejercicios N° 3, 6 y 7.

decir:  $E(t) = E_0$  para  $t < 0$  y  $E(t) = 0$  para  $t > 0$ . Estudie como será la dependencia temporal de la densidad de corriente  $j(t)$ .

- h) Analice los resultados de las partes anteriores comparando con los obtenidos en el Ejercicio N° 8 – Modelo de Debye para Relajación de la Polarización, del Práctico I.

### Ejercicio N° 2 – Energía de Fermi y Distribución de Fermi-Dirac:

Considere un gas de electrones (o gas de Fermi) libres en un volumen tridimensional  $V$ .<sup>2</sup> Los estados electrónicos estarán ocupados según la distribución de Fermi – Dirac, que da la probabilidad  $f_T(E)$  de que, a una temperatura  $T$ , un estado de energía  $E$  se encuentre ocupado, siendo  $\mu(T)$  el potencial químico a esa temperatura:

$$f_T(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu(T)}{k_B T}\right) + 1}$$

- a) Observe que la energía de Fermi  $E_F$  es  $\mu(T_0)$ , siendo  $T_0 = 0\text{K}$  el cero absoluto.
- b) A partir de que el número total de electrones  $N$  es:

$$N = \int_0^{\infty} dE G(E) f_T(E)$$

siendo  $G(E)$  la densidad energética de estados, calcule la energía de Fermi en función de la concentración volumétrica de electrones  $n = \frac{N}{V}$ .

NOTA: Las densidades de estado a utilizar fueron calculadas en la parte b) el Ejercicio N° 5 del Práctico I.

- c) Demuestre que el potencial químico de un gas de Fermi bidimensional viene dado por:

$$\mu(T) = k_B T \ln \left[ \exp\left(\frac{\pi n \hbar^2}{m k_B T}\right) - 1 \right]$$

para  $n$  electrones por unidad de área.

- d) Estime en qué región de temperaturas es válido aproximar el potencial químico por la energía de Fermi (definida siempre como el potencial químico al cero absoluto).
- e) Se define la temperatura de Fermi  $T_F$  de forma que  $E_F = k_B T_F$ . Calcule en que rangos variaría  $T_F$  para las concentraciones de portadores típicas de:

<sup>2</sup> - En la parte c) se estudiará el caso particular de un gas de electrones bidimensionales de área  $A$ , que aparecen en películas de espesor nanométrico, ya que es el único caso que puede resolverse en forma exacta para una temperatura  $T$  arbitraria.

1. Metales:  $n \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ .
2. Semimetales:  $n \sim 10^{17} - 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ .
3. Semiconductores dopados fuertemente:  $n \sim 10^{17} - 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ .

f) Estime la velocidad de Fermi  $v_F$  que corresponde a las temperaturas calculadas en la parte anterior.

NOTA: La velocidad de Fermi es la velocidad de un electrón con la cantidad de movimiento de un electrón en el nivel de Fermi, es decir:

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m}, \text{ siendo } k_F \text{ el radio de la esfera de Fermi.}$$

### Ejercicio N° 3 (\*) – Transparencia Ultravioleta.

a) Demuestre que la permitividad relativa (función dieléctrica) de un metal sin pérdidas es de la forma:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$$

siendo  $\omega_p$  la frecuencia de *plasma*, cuyo valor se hallará en función de los parámetros del sistema.

- b) ¿Qué dificultades encontraría si quisiese hallar la función respuesta  $\chi(\xi)$  correspondiente?
- c) Encuentre una relación entre la frecuencia de plasma y la energía de Fermi.
- d) Estudiando cómo son las ondas que se propagan en medios con permitividades negativas y nulas, interprete físicamente el resultado.
- e) Incluyendo los efectos disipativos a través de la inclusión de una constante de tiempo  $\tau$  como en el Ejercicio N° 1, estudie cómo queda el resultado de la parte a cuando no puede despreciarse la fuerza disipativa. En particular:

i. Demuestre que la permitividad relativa puede escribirse como:

$$\hat{\epsilon}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

hallando la disipación (o pérdidas)  $\gamma$  en función de los demás parámetros del sistema. ¿Verifica esta permitividad las relaciones de Kramers-Kronig?

- ii. Halle la frecuencia en que se anula la parte real de la permitividad.
- iii. Estudie e interprete cómo quedan las partes reales e imaginarias de  $\hat{\epsilon}(\omega)$  en ambos límites  $\frac{\omega}{\gamma} \gg 1$  y  $\frac{\omega}{\gamma} \ll 1$ .

- iv. Bosqueje como serán las dependencias de ambas partes reales e imaginarias de la permitividad en función de la frecuencia, a medida que aumentan las pérdidas  $\gamma$ .
- v. (Numérico) Grafique numéricamente para diferentes valores de la relación  $\gamma/\omega_p$  las siguientes cantidades:

1.  $\epsilon' = \text{Re} \left[ \hat{\epsilon}(\omega) \right]$  en función de  $\omega/\omega_p$ ,

2.  $\epsilon'' = \text{Im} \left[ \hat{\epsilon}(\omega) \right]$  en función de  $\omega/\omega_p$ ,

3. el índice de refracción  $n = \text{Re} \left[ \sqrt{\hat{\epsilon}} \right]$  en función de  $\lambda/\lambda_p$ ,  
donde  $\lambda_p$  es la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de plasma  $\omega_p$ ,

4. el coeficiente de extinción  $K = \text{Im} \left[ \sqrt{\hat{\epsilon}} \right]$  en función de  $\lambda/\lambda_p$ ,

5. y la reflectancia  $R(\lambda)$  ante incidencia normal en función de  $\lambda/\lambda_p$ . Para el cálculo de  $R(\lambda)$  recuerde la parte e) del Ejercicio N° 7 – Material Óhmico del Práctico I.

NOTA: Como verificación del resultado es posible plantear algunos casos particulares o casos límites y verificar si la solución numérica los cumple.

#### Ejercicio N° 4 – Frecuencia de Plasma de Metales Alcalinos.

- a) La segunda columna de la siguiente tabla da la concentración de portadores libres  $N_f$  en los metales alcalinos. Calcule los correspondientes valores esperados para la frecuencia de plasma (en Hz), la longitud de onda correspondiente (en nm) y la energía correspondiente en eV.

Material	$N_f (10^{28} \text{ m}^{-3})$	$\lambda_p (\text{nm})^3$	$E_p (\text{eV})^4$
Li	4.70	205	8.0
Na	2.65	210	5.9
K	1.40	315	3.9

<sup>3</sup> - M. Fox, *Optical Properties of Solids*, Oxford Press, 2001.

<sup>4</sup> - J. H. Simmons and K. S. Potter, *Optical Materials*, Academic Press, 2000.

Rb	1.1	360	3.6
Cs	0.91	440	3.4

- b) La tercer columna es un juego de valores medidos para el borde de transmisión en el ultravioleta. La discrepancia es asignada a diferencias en las masas efectivas de los materiales correspondientes. Calcule cuánto sería la masa efectiva (medida relativa a la del electrón libre en reposo) en cada caso ( $m_e/m_0$ ).
- c) La cuarta columna es otro juego de datos diferente en que se asigna la diferencia con los valores esperados a que los electrones no están verdaderamente libres sino que hay interacción entre electrones y puede considerarse que solo una fracción de los mismos están verdaderamente libres. ¿Es esto razonable? ¿Cuál sería esta fracción?

### Ejercicio N° 5 – Influencia Resonancias en Altas Energías.

Cuando existen resonancias a frecuencias mayores que la frecuencia de plasma un mejor modelo para la función dieléctrica de un gas de electrones libres (metal o semiconductor dopado) ideal (sin pérdidas) es:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_p}{\omega} \right)^2 \right]$$

donde  $\epsilon_{\infty}$  es la permitividad a altas frecuencias (UV para metales, región óptica para

semiconductores) y  $\tilde{\omega}_p = \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_{\infty}}}$  siendo  $\omega_p$  la frecuencia de plasma hallada en el Ejercicio

N° 3. Recordando la parte e del Ejercicio N° 7 del Práctico I:

- a) Demuestre que existe una región, que se hallará, para la que el material refleja completamente la luz.
- b) Halle la frecuencia para que la reflexión será nula.
- c) Demuestre que para  $\omega \gg \tilde{\omega}_p$  la reflectividad del material tiende a:

$$R \approx R_{\infty} \left( 1 - \frac{2\sqrt{\epsilon_{\infty}}}{\epsilon_{\infty} - 1} \left( \frac{\tilde{\omega}_p}{\omega} \right)^2 \right)$$

hallando  $R_{\infty}$ .

NOTA: Este resultado no es válido si  $\epsilon_{\infty} = 1$ . ¿Cuál será el resultado correcto en este caso?

- d) Demuestre que para  $\omega > \tilde{\omega}_p$  con  $\omega \sim \tilde{\omega}_p$  la reflectividad será:

$$R \approx 1 - 4 \sqrt{\frac{2\epsilon_{\infty}}{\tilde{\omega}_p}} \sqrt{\omega - \tilde{\omega}_p}.$$

Observe que este resultado tiene pendiente infinita en  $\omega = \tilde{\omega}_p$ .

- e) Bosqueje la reflectividad en función de la frecuencia.

### Ejercicio N° 6 (\*) – Frecuencia de Plasma de Metales Nobles.

Considere la siguiente tabla de datos para los metales nobles<sup>5</sup>:

Material	$\sigma$ (x $10^7 \Omega \text{ m}^{-1}$ )	$m_e/m_o$	$N_f$ (x $10^{23} \text{ m}^{-3}$ )	$\epsilon_{UV}$
Cu	5.88	1.3	8.47	10.9
Ag	6.21	1.1	5.86	4.0
Au	4.55	1.1	5.90	8.2

En esta tabla la segunda columna da la conductividad  $\sigma$  (de continua), la tercera es la masa efectiva (relativa a la masa del electrón en reposo  $m_e/m_o$ ), la cuarta representa la densidad volumétrica de portadores libres  $N_f$  y la última es la constante dieléctrica del resto de los electrones  $\epsilon_{UV}$ . Calcule la frecuencia de plasma  $\omega_p$  (en  $\text{s}^{-1}$  y eV) y la correspondiente longitud de onda  $\lambda_p$  (en nm). Compare las pérdidas del material  $\gamma = \tau^{-1}$  con la frecuencia de plasma y diga cuál metal tendrá un comportamiento más cercano al ideal.

### Ejercicio N° 7 (\*) – Función Pérdida Dieléctrica.

Se define la función pérdida dieléctrica:

$$LF \equiv -\text{Im} \left[ \frac{1}{\hat{\epsilon}(\omega)} \right] = \frac{\epsilon_2(\omega)}{[\epsilon_1(\omega)]^2 + [\epsilon_2(\omega)]^2}$$

- a) Considere la densidad volumétrica de energía eléctrica almacenada en un material dieléctrico por cualquier variación en los campos eléctricos:  $\delta w = \vec{E} \cdot \delta \vec{D}$ . Demuestre que ante la acción de campos electromagnéticos monocromáticos de amplitud de desplazamiento eléctrico constante, la potencia perdida por unidad de volumen es proporcional a la función pérdida dieléctrica definida anteriormente.
- b) Demuestre que la función pérdida en el caso de un metal usando el modelo de Drude puede escribirse como:

$$LF \equiv -\text{Im} \left[ \frac{1}{\hat{\epsilon}(\omega)} \right] = \frac{\gamma \omega_p^2 \omega}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

- c) Bosqueje la función anterior y encuentre la posición del pico, en la aproximación de metales con pocas pérdidas:  $\gamma/\omega_p \ll 1$ .

<sup>5</sup> - C. Kittel, Introducción a la Física del Estado Sólido, 1998.

**Ejercicio N° 8 – Plasmón Superficial.**

Un modo de plasmón superficial con una frecuencia correspondiente a una longitud de onda de vacío de 600 nm se excita en la interfaz entre la plata y el aire. La permitividad relativa de la plata a esta frecuencia es aproximadamente  $\epsilon_m = -18 + i$ .

- Calcule las longitudes de decaimiento del campo en la dirección normal a la superficie tanto en el aire como en el metal.
- La longitud de propagación en la dirección paralela a la superficie se define como la distancia sobre que la intensidad cae por un factor de  $1/e$ . Calcular la longitud de propagación de la plata a 600 nm.

**Ejercicio N° 9 – Resonancias de Plasmones en Superficies Planas.**

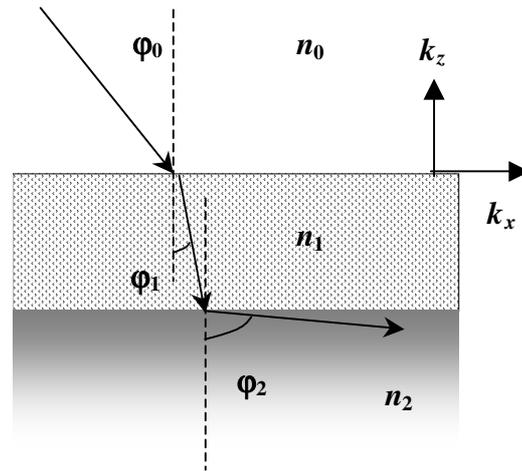
Considere una interfaz metal/vacío en la aproximación electrostática donde el metal (plasma) semi-infinito se encuentra en el lado positivo del plano  $z = 0$ . Una solución de la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \Phi = 0$  para el potencial electrostático en el plasma es  $\Phi_m(x,z) = A \cos(kx) \exp(-kz)$ .

- Halle las componentes del campo eléctrico paralela y perpendicular a la superficie que origina dicho potencial electrostático.
- Demuestre que en el vacío  $\Phi_o(x,z) = A \cos(kx) \exp(kz)$  es una solución posible que para  $z < 0$  satisface la condición de contorno para la componente tangencial del campo eléctrico  $\vec{E}$ .
- Observe que el desplazamiento eléctrico en el metal  $\vec{D}_m = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}_m$ , mientras que en el vacío  $\vec{D}_o = \epsilon_0 \vec{E}_o$ . Demuestre que la condición de contorno para la componente normal de  $\vec{D}$  en la frontera requiere que  $\epsilon(\omega) = -1$ .
- Utilizando el modelo de Drude sin pérdidas (parte a del Ejercicio N° 3) deduzca el resultado de *Stern-Ferrell*  $\omega_s^2 = \frac{1}{2} \omega_p^2$  para la frecuencia  $\omega_s$  de una oscilación superficial del plasma.
- ¿Por qué es razonable llamarle oscilación *superficial*?

**Ejercicio N° 10 – Propagación de Plasmones Superficiales.**

Considere la geometría de la figura para excitar oscilaciones superficiales de plasma, consistente en la interfaz plano paralela de un medio que denominaremos 1 entre otros dos, que denominaremos 0 y 2. Se considera una onda electromagnética incidiendo desde el material dieléctrico (sin pérdidas) con índice de refracción  $n_0$  y ángulo de incidencia  $\varphi_0$ . Este ángulo es real y bien definido de forma que  $\sin \varphi_0 \leq 1$ . Tras propagarse por la película delgada de índice de refracción  $\hat{n}_1$ , llega a la otra cara de esta película que está en contacto con el medio de índice de refracción  $n_2$ .

Se desea excitar una onda superficial en la interfaz entre los medios 1 y 2 de modo que se exigirá que una vez la onda llega a esa interfaz no sea reflejada ni transmitida. Para ello se asume que la onda incidente está polarizada paralela al plano de incidencia.



- Escriba las leyes de refracción de Snell para cada una de las interfaces.
- Escriba la condición que sale de imponer que  $\varphi_1$  sea el ángulo de Brewster en que el coeficiente de Fresnel  $\hat{r}_p$  es nulo entre los medios 1 y 2.
- Escriba la condición para que haya reflexión total (transmitancia nula por  $\sin \varphi_2 > 1$ ) en la interfaz 1-2.
- Verifique que las condiciones resultantes pueden cumplirse en el caso que  $\hat{n}_1^2 \leq -n_2^2$ , es decir, si el medio material 1 es un metal sin pérdidas.
- En caso se verifique la igualdad, compare la condición resultante para la frecuencia de resonancia con el resultado de Stern-Ferrell hallado en el Ejercicio anterior por argumentos puramente electrostáticos.
- Encuentre las componentes del vector de onda paralelo a la interfaz,  $k_x$  y las componentes del mismo normal a la interfaz  $k_{z0}$ ,  $k_{z1}$  y  $k_{z2}$  en cada uno de los medios 0, 1 y 2, respectivamente.
- ¿Cuál es la longitud de onda de la excitación que se propaga a lo largo de la superficie?
- Estudiando la naturaleza de  $k_{z1}$  y  $k_{z2}$  encuentre cómo son los campos electromagnéticos entorno a la interfaz 1 – 2. Compare con el Ejercicio anterior.
- Estudiando la dependencia de  $k_x$  en función de  $\omega$ , grafique la relación de dispersión  $\omega(k_x)$  (relación de dispersión de plasmones superficiales).

### Ejercicio N° 11 – Resonancias de Plasmones en Superficies Esféricas Pequeñas.

Se puede excitar una resonancia de plasma en partículas metálicas pequeñas. La forma más fácil de estudiar esta resonancia es como se hizo en la parte a) del Ejercicio N° 9 para una resonancia de plasmón en una superficie plana, es decir suponer la aproximación electrostática con una constante dieléctrica que depende de la frecuencia. El problema exacto puede resolverse para una geometría esférica estudiando la luz absorbida y dispersada por una esfera arbitraria que se denomina teoría de scattering de Mie. Fue Gustav Mie quien primero resolvió en forma exacta en 1908 el problema de la

dispersión de la luz por una esfera de radio  $a$  y constante dieléctrica  $\hat{\epsilon}_1(\omega)$  inmersa en un medio de constante dieléctrica  $\epsilon_2$ .

- a) En el caso de una esfera de radio  $a \ll \lambda$ , longitud de onda, los campos electromagnéticos propagándose en la esfera pueden suponerse uniformes. La solución para el campo en el interior de una esfera de constante dieléctrica  $\epsilon_1$  ubicada en el vacío y sometida a un campo externo uniforme  $E_0$  (en el infinito) es: <sup>6</sup>

$$E_1 = \frac{3}{\epsilon_1 + 2} E_0$$

- i. Escriba como quedan el desplazamiento dieléctrico y la polarización.
  - ii. Encuentre la condición de resonancia (condición de Fröhlich) en este caso.
  - iii. Verifique que para una esférica metálica ideal ubicada en el vacío habrá una resonancia cuando  $\omega_0^2 = \frac{\omega_p^2}{3}$ .
  - iv. ¿Cómo se modifica esa relación si la esfera se encuentra en presencia de un medio de constante dieléctrica  $\epsilon_2$  en lugar del vacío?
- b) La teoría de Mie predice que habrá resonancias (de primer orden) cuando se verifique la condición: <sup>7</sup>

$$m\psi_1(mx)\xi_1'(x) - \xi_1(x)\psi_1'(mx) = 0$$

donde  $m = \frac{\hat{n}_1}{n_2}$ , con  $\hat{n}_1, n_2$  los índices de refracción de la esfera y medio circundante

respectivamente,  $x = \frac{2\pi n_2 a}{\lambda}$  y  $\psi_1(\rho), \xi_1(\rho)$  son las funciones de Ricatti-Bessel de orden 1 (' indica sus derivadas); que para  $\rho \ll 1$  pueden aproximarse por:

$$\psi_1(\rho) \approx \frac{\rho^2}{3} - \frac{\rho^4}{30} + \dots \text{ y } \xi_1(\rho) \approx -\frac{i}{\rho} - \frac{i\rho}{2} + \frac{\rho^2}{3} + \dots$$

- i. Encuentre como queda expresada la condición de resonancia para  $a \ll \lambda$ , y compare con la parte a)ii anterior.
- ii. En el caso de un metal ideal, encuentre como se expresa la frecuencia de resonancia y compare con las partes a) iii y iv anterior.

<sup>6</sup> - J. R. Reitz, F. J. Milford, *Fundamentos de Teoría Electromagnética*.

<sup>7</sup> - J. H. Simmons and K. S. Potter, *Optical Materials*, Academic Press, 2000; C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*.

- iii. Considere una partícula metálica esférica de tamaño nanométrico que presenta una resonancia de plasmón superficial en el visible. Si el tamaño de la esfera aumenta, la frecuencia de resonancia de plasmón superficial, ¿se desplaza hacia el infrarrojo o hacia el ultravioleta?
- c) Si en lugar de tener un metal ideal sin pérdidas tenemos un metal que obedece el modelo de Drude pero con pérdidas  $\frac{\gamma}{\omega_p} \ll 1$ :
- Comente sobre cómo se modificarán las condiciones de resonancia anteriores.
  - En el caso que el tamaño de la partícula sea muy pequeño puede suponerse que las pérdidas aumentan debido a colisiones de los electrones con las paredes de la esfera metálica<sup>8</sup>. De esta forma:  $\gamma_a = \gamma_{bulk} + \frac{v}{a}$  donde  $v$  es una constante con unidades de velocidad (del orden de la velocidad de Fermi). ¿Cómo se modifica la condición anterior? ¿Para qué tamaños de partícula será la corrección relevante?

### Ejercicio N° 12 – Metales Reales.

La tabla de la derecha da las propiedades ópticas reales (índice de refracción y coeficiente de extinción) del Aluminio, mientras que los datos similares para los metales nobles cobre, plata y oro (en función de la energía del fotón se encuentran) en la tabla al final del presente repartido.<sup>9</sup>

- Halle y grafique las correspondientes reflectancia para interfaz plana de estos metales ante incidencia normal.
- Halle y grafique las correspondientes partes reales e imaginarias de la constante dieléctrica.
- Halle y grafique la función pérdida LF (ver Ejercicio N° 7).
- Comente en qué partes del espectro, si hay alguna, los mismos se comportan como metales obedeciendo el modelo de Drude.

$\lambda$ (nm)	$n_{Al}$	$K_{Al}$
24.8	0.97	0.01
49.6	0.81	0.02
72.9	0.47	0.04
103.3	0.03	0.79
206.6	0.13	2.39
310	0.29	3.74
400	0.49	4.86
500	0.77	6.08
600	1.02	7.26
650	1.47	7.79
700	1.83	8.31
800	2.8	8.45
1130	1.2	11.2
1500	1.38	15.4
2000	2.15	20.7
4000	6.43	39.8
7000	14	66.2
10000	25.3	89.8
20000	60.7	147
32000	103	208

<sup>8</sup> - Es un caso particular de la Regla de Matthiessen.

<sup>9</sup> - Se dispone de una tabla Excel con estos datos.

- e) ¿Cuál será, para aquellos casos en que pueda hallarse, la frecuencia de plasma real y la longitud de onda correspondiente?
- f) ¿En qué frecuencia y en qué longitud de onda podrán hallarse modos de resonancia de plasmones en superficies planas aire metal? ¿Y en interfaces metal agua?
- g) Repita la parte e) para partículas esféricas de radio pequeño.

E (eV)	$n_{Cu}$	$K_{Cu}$	$n_{Ag}$	$K_{Ag}$	$n_{Au}$	$K_{Au}$
1.64	0.24	4.665	0.03	5.242	0.14	4.542
1.76	0.21	4.205	0.04	4.838	0.13	4.103
1.88	0.22	3.747	0.05	4.483	0.14	3.697
2.01	0.3	3.205	0.06	4.152	0.21	3.272
2.13	0.7	2.704	0.05	3.858	0.29	2.863
2.26	1.02	2.577	0.06	3.586	0.43	2.455
2.38	1.18	2.608	0.05	3.324	0.62	2.081
2.5	1.22	2.564	0.05	3.093	1.04	1.833
2.63	1.25	2.483	0.05	2.869	1.31	1.849
2.75	1.24	2.397	0.04	2.657	1.38	1.914
2.88	1.25	2.305	0.04	2.462	1.45	1.948
3	1.28	2.207	0.05	2.275	1.46	1.958
3.12	1.32	2.116	0.05	2.07	1.47	1.952
3.25	1.33	2.045	0.05	1.864	1.46	1.933
3.37	1.36	1.975	0.07	1.657	1.48	1.895
3.5	1.37	1.916	0.1	1.419	1.5	1.866
3.62	1.36	1.864	0.14	1.142	1.48	1.871
3.74	1.34	1.821	0.17	0.829	1.48	1.883
3.87	1.38	1.783	0.81	0.392	1.54	1.898
3.99	1.38	1.729	1.13	0.616	1.53	1.893
4.12	1.4	1.679	1.34	0.964	1.53	1.889
4.24	1.42	1.633	1.39	1.161	1.49	1.878
4.36	1.45	1.633	1.41	1.264	1.47	1.869
4.49	1.46	1.646	1.41	1.331	1.43	1.847
4.61	1.45	1.668	1.38	1.372	1.38	1.803
4.74	1.41	1.691	1.35	1.387	1.35	1.749
4.86	1.41	1.741	1.33	1.393	1.33	1.688
4.98	1.37	1.783	1.31	1.389	1.33	1.631
5.11	1.34	1.799	1.3	1.378	1.32	1.577
5.23	1.28	1.802	1.28	1.367	1.32	1.536
5.36	1.23	1.792	1.28	1.357	1.3	1.497
5.48	1.18	1.768	1.26	1.344	1.31	1.46
5.6	1.13	1.737	1.25	1.342	1.3	1.427
5.73	1.08	1.699	1.22	1.336	1.3	1.387
5.85	1.04	1.651	1.2	1.325	1.3	1.35
5.98	1.01	1.599	1.18	1.312	1.3	1.304