Solución del Examen - MD I
VERSIÓN 1

Martes 26 de julio de 2022

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
D	D	C	C	B

Múltiple Opción 1

Si x_i denota la cantidad de bolitas dentro de la caja i, debemos contar soluciones naturales de la ecuación $x_1+\ldots+x_6 = 10$ sujeto a que $1 \leq x_i \leq 3$ para cada $i \in \{1,\ldots,6\}$. Tomando un cambio de variables $y_i = x_i - 1$, podemos contar equivalentemente la cantidad de soluciones naturales de $y_1 + \ldots + y_6 = 4$ sujeto a que se deben cumplir las desigualdades $y_i \leq 2$ para cada $i \in \{1,\ldots,6\}$. Para efectuar tal conteo podemos utilizar el Principio de Inclusión y Exclusión considerando el universo cuyos elementos son todas las soluciones naturales de $y_1 + \ldots + y_6 = 4$ y las condiciones $c_i : y_i \geq 3$ para cada $i \in \{1,\ldots,6\}$. Notando que se pueden cumplir 0 o bien 1 de las condiciones, tenemos que:

$$n(\overline{c_1},\ldots,\overline{c_6}) = CR_6^4 - \binom{6}{1} CR_1^6 = \binom{9}{4} - 6\binom{6}{1}\binom{6}{1} = 90,$$

por lo que la respuesta correcta es la D.

Múltiple Opción 2

Se pide contar las ternas $\{a,b,c\}$ tales que $1 \leq a < b < c \leq 100$ y $(a+b+c)/3 = b$, o equivalentemente $a + c = 2b$. Como $a < b < c$ debemos tener $a = b - i$ y $c = b + i$ para cierto entero positivo i. Luego debemos contar ternas de la forma $\{k-i, k, k+i\}$ donde tanto i como k son enteros positivos que cumplen $1 \leq k - i$ y $k + i \leq 100$.

Para cada elección de k dentro del conjunto $\{1,\ldots,50\}$ hay $k-1$ posibles opciones para i. Análogamente, para cada elección de k dentro del conjunto $\{51,\ldots,100\}$ hay $100-k$ posibles opciones para i. Por la regla de la suma la cantidad solicitada, que llamamos N, vale:

$$N = \sum_{k=1}^{50}(k-1) + \sum_{k=51}^{100}(100-k) = 2\sum_{k=1}^{50}(k-1) = 2\binom{50}{2},$$

y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 3

Para contar todas las relaciones de orden parcial con 3 elementos, llamemos α a la cadena de tamaño máximo. Notemos que $\alpha \in \{1,2,3\}$:

- Si $\alpha = 1$, los tres elementos están aislados, y hay 1 solo orden parcial posible.
- Si $\alpha = 2$, tenemos 3 relaciones que consisten en un elemento minimal y dos maximales relacionados con el primero, 3 relaciones que consisten en un elemento maximal y dos minimales relacionados con el primero, o bien $\binom{3}{2} \times 2 = 6$ relaciones que consisten en una cadena de tamaño 2 y un tercer elemento no relacionado con los otros dos. Luego, hay $3 + 3 + 6 = 15$ relaciones de orden parcial que tienen tamaño máximo de cadena $\alpha = 2$.
- Si $\alpha = 3$ hay $3! = 6$ relaciones que consisten en una única cadena de tamaño 3.

Por la regla de la suma, tenemos en total $1 + 15 + 3 = 19$ relaciones de orden parcial posibles con 3 elementos, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 4

Como las E se deben ubicar en su lugar original, la palabra es de la forma $\_E\_\_\_\_E\_\_E\_\_E$. Notar que hay 5 ubicaciones posibles del digrama RR y, una vez ubicado el digrama, hay $PR^7_{3,2,1,1} = 7!/(3! \times 2! \times 1! \times 1!)$ maneras de ubicar las restantes letras con sus repeticiones (tres T, dos N, una A y una I). Entonces, hay en total $5 \times 7!/(3! \times 2!)$ palabras posibles que cumplen lo pedido, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 5

Para resolver el problema homogéneo $a_{n+1} - 2a_n = 0$, hallamos las raíces del polinomio característico $p(x) = x - 2$, que es $x = 2$. Luego, la solución al problema homogéneo es $k2^n$, siendo k una constante cualquiera.

Para encontrar una solución particular a nuestra recurrencia $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ notemos que al ser 2 raíz del polinomio característico vamos a encontrar una solución particular con la forma $cn2^n$, siendo c una constante a determinar. Reemplazando, tenemos que $c(n+1)2^{n+1} - 2cn2^n = 2^n$, y cancelando en ambos miembros el factor común 2^n resulta que $2c(n+1) - 2cn = 1$, por lo que $c = 1/2$.

Tenemos entonces que la solución general a nuestro problema es $a_n = k2^n + n2^{n-1}$, y considerando el hecho que $a_0 = 0$ tenemos que $k = 0$, por lo que $a_n = n2^{n-1}$ y $a_{100} = 100 \times 2^{99}$. Luego, la respuesta correcta es la B.

Ejercicios de Desarrollo

(1) Sea G un grafo no conexo simple cualquiera, y sea G_1 una componente conexa de G. Observemos que el grafo complemento $\overline{G}$ tiene como subgrafo al grafo bipartito completo que tiene los vértices de $V(G_1)$ en una parte y los vértices de $V(G - G_1)$ en otra parte. Como $\overline{G}$ tiene un subgrafo conexo que es recubridor, es necesariamente conexo, como queríamos demostrar.

(2) Vamos a probar que todo grafo simple con 2 o más vértices tiene al menos dos vértices con el mismo grado. De hecho, si el grafo es simple conexo y tiene n vértices entonces los grados de sus vértices varían entre 1 y $n-1$. Por el Principio del Palomar (siendo los n vértices las palomas y sus correspondientes grados los nidos), necesariamente existen al menos dos vértices con el mismo grado.

Supongamos ahora que G no es conexo. Como tiene al menos 2 vértices, si el grafo G consiste únicamente de vértices aislados entonces tiene al menos 2 vértices aislados. En tal caso, existen al menos 2 vértices con el mismo grado igual a 0. En caso contrario tendremos alguna componente conexa con 2 vértices o más, y el anterior razonamiento para grafos conexos aplica, encontrando nuevamente al menos 2 vértices con el mismo grado, como queríamos demostrar.

(3) Para calcular el polinomio cromático del grafo $K_{2,3}$ procedemos aplicando la regla de arista contracción y sustracción agregando una arista entre los vértices no adyacentes de grado 3. Entonces:

$$\begin{aligned}
p_{K_{2,3}}(x) &= \frac{p_{K_3}(x)^3}{p_{K_2}(x)^2} + p_{K_{1,3}}(x) \\
&= x(x-1)(x-2)^3 + x(x-1)^3 \\
&= x(x-1)[x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^2 - 2x + 1] \\
&= x(x-1)(x^3 - 5x^2 + 10x - 7)
\end{aligned}$$

Notar que $p_{K_{2,3}}(2) = 2$, lo que es correcto pues $K_{2,3}$ es bipartito y al elegir un color para una parte tenemos necesariamente que usar el segundo color para la segunda parte, habiendo 2 coloraciones propias posibles.