Universidad de la República | **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería | **Segundo semestre 2023**
Instituto de Matemática y Estadística

PRÁCTICO 10: Grupos normales, Grupos cociente, Teoremas de isomorfismo.

Ejercicio 1.

a. Sea G un grupo conmutativo. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G.

b. Pruebe que $H = 3\mathbb{Z}$ es normal en $G = (\mathbb{Z}, +)$. Calcule el grupo cociente $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y su tabla de Cayley.

c. Sea G un grupo cíclico. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G. Sugerencia: pruebe que G es conmutativo.

d. Pruebe que $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es subgrupo normal en $G = U(9)$. Halle el cociente G/H y calcule $(\bar{2}H)(\bar{4}H)$.

Ejercicio 2. Sean

$$T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}, \quad U = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a. Pruebe que U es un subgrupo de T y de $GL_2(\mathbb{R})$.

b. Pruebe que U es un subgrupo normal de T.

c. Determine si U es un subgrupo normal de $GL_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 3. Sea $(S_3, \circ)$ el grupo de las permutaciones.

a. Pruebe que el siguiente subgrupo H no es normal en S_3:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}. \quad \text{Sugerencia: considere } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3.$$

b. Pruebe que el siguiente subgrupo H es normal en S_3. Calcule S_3/H y su tabla de Cayley.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que S_3 no es conmutativo, y sin embargo el grupo cociente S_3/H sí es conmutativo.

Ejercicio 4. Sea $\{H_i\}_{i \in I}$ una familia de subgrupos normales de un grupo G. Probar que $\cap_{i \in I} H_i$ es un subgrupo normal en G.

Ejercicio 5. Sea H un subgrupo con índice 2 en un grupo G. Es decir: H tiene exactamente 2 clases laterales por izquierda en G. Probar que H es un subgrupo normal de G. Sugerencia: todo grupo G se puede escribir como la unión disjunta de las clases laterales por izquierda de cualquier subgrupo H de G.

Ejercicio 6. Sea G un grupo y H un subgrupo de G de orden finito.

a. Pruebe que gHg^{-1} es un subgrupo de G, para todo $g \in G$.

b. Pruebe que la conjugación preserva el orden del subgrupo. Es decir: $|gHg^{-1}| = |H|, \ \forall \ g \in G$.

c. Supongamos que G posee un único subgrupo H de orden d. Demuestre que H es normal.

Ejercicio 7. Se define el el centro de un grupo G como: $Z_G = \{x \in G : xg = gx, \text{ para todo } g \in G\}$.

a. Calcule el centro de $GL_2(\mathbb{R})$.

b. Probar que Z_G es un subgrupo normal de G, para todo grupo G.

Ejercicio 8. Sea $f : G \to G'$ un morfismo de grupos. Pruebe que $Ker(f)$ es un subgrupo normal de G. Dar un ejemplo en el cual $Im(f)$ no sea un subgrupo normal de G'.

Ejercicio 9. Sea $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) = 1\}$. Pruebe que $SL_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $GL_n(\mathbb{R})$. Sugerencia: considere $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \ / \ \phi(A) = \det(A)$.

Ejercicio 10. Sea G un grupo. Probar que $G/\{e\} \simeq G$ y $G/G \simeq \{e\}$.

Ejercicio 11. Sea $f : G \to K$ un homomorfismo de grupos sobreyectivo, con K grupo cíclico de orden 10. Pruebe que G tiene subgrupos normales de índices 2, 5 y 10.

Ejercicio 12. ¿Cuántos homomorfismos sobreyectivos existen del grupo diedral D_{13} en $\mathbb{Z}_{12}$? Sugerencia: Recordar que el grupo diedral D_n es un grupo de orden $2n$.

Ejercicio 13. Se consideran los siguientes subconjuntos de plano complejo $\mathbb{C}$:

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad H = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}.$$

a. Probar que G y H son subgrupos de $\mathbb{C}$.

b. Probar que $\phi : \mathbb{R} \to G$, dado por $\phi(x) = e^{2\pi i x}$ es un morfismo de grupos sobreyectivo.

c. Probar que G es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

d. Probar que H es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 14. Sea H un subgrupo de G, tal que $g^2 \in H$, para todo $g \in G$.

a. Probar que H es un subgrupo normal de G.

b. Probar que $gH = g^{-1}H, \ \forall \ g \in G$. Es decir: $\bar{g} = \bar{g}^{-1}$ en G/H, para todo $g \in G$.

c. Probar que G/H es un grupo abeliano. Sugerencia: usar la parte anterior.

Ejercicio 15. Sea D_4 el grupo de simetrías del cuadrado, y $H = \{i, r^2\}$; donde r es la rotación de 90 grados respecto al origen del plano. Pruebe que H es un subgrupo normal de D_4, y que el cociente D_4/H es abeliano. Notar que D_4 no es abeliano. Sugerencia: usar el ejercicio anterior.