Universidad de la República **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería **Segundo semestre 2023**
Instituto de Matemática y Estadística

PRÁCTICO 2: Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.

Ejercicio 1. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\operatorname{mcd}(ca, cb) = c \operatorname{mcd}(a, b)$.

b. Si $c|a$ y $c|b$ entonces:
$$\operatorname{mcd}(a/c, b/c) = \operatorname{mcd}(a, b)/c.$$

c. $\operatorname{mcd}(b, a + bc) = \operatorname{mcd}(a, b)$.

d. Si a es par y b impar entonces
$$\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(a/2, b).$$

e. $\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(a - b, b)$.

f. Si a y b son primos entre sí, entonces:
$$\operatorname{mcd}(a - b, a + b) = 1 \text{ o } 2.$$

Ejercicio 2. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que a y b son primos entre sí. Probar o dar contraejemplos que:

a. Si $a|(bc)$ entonces $a|c$.

b. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

c. ¿Valen las partes anteriores si $\operatorname{mcd}(a, b) \neq 1$?

Ejercicio 3. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a. Se define la sucesión de Fibonacci como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Demostrar que dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci son coprimos.

b. Demostrar que $\operatorname{mcd}(7k + 3, 12k + 5) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

c. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, tales que $(ad - bc)|a$ y $(ad - bc)|c$. Probar que:

i) $\operatorname{mcd}(b, d) = 1$, y

ii) $\operatorname{mcd}(an + b, cn + d) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. En cada caso, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ que verifiquen las condiciones dadas.

a. $ab = 22275$ y $\operatorname{mcd}(a, b) = 15$.

b. $ab = 1008$ y $\operatorname{mcm}(a, b) = 168$.

c. $a + b = 1271$ y $\operatorname{mcm}(a, b) = 330 \cdot \operatorname{mcd}(a, b)$.

d. $a + b = 122$ y $\operatorname{mcd}(a, b) + \operatorname{mcm}(a, b) = 1802$.

Ejercicio 5. Hallar $\operatorname{mcd}(a, b)$ sabiendo que $\operatorname{mcd}(a, b) \cdot \operatorname{mcm}(a, b) = 48$ y $a^2 = b^2 + 28$.