

PRÁCTICO 1: SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y DIVISIBILIDAD.

Ejercicio 1. *Sistemas de numeración.*

- Escribir en las bases 2, 4 y 16 los números decimales 137 y 6243.
- Escribir en la base 28 el número decimal 16912.
- Escribir en las bases 2 y 10 los números hexadecimales $A7$, $4C2$, $1C2B$ y $A2DFE$.
- Escribir en las bases 10 y 16 los números binarios 11001110, 00110001, 11110000 y 01010111.
- Escribir en la base decimal el número dado en la base indicada: $OJO_{(25)}$.

Ejercicio 2. En este ejercicio vamos a utilizar la siguiente numeración de los **28** símbolos:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	␣
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

El objetivo de este ejercicio es asociar una secuencia de números enteros a una secuencia de palabras (por ejemplo una frase) de la siguiente manera. Primero separamos el texto en bloques de a tres caracteres (incluyendo el espacio en blanco); por ejemplo si el texto es "MUY BIEN" nos quedan tres bloques: $\boxed{MUY} \boxed{ \quad BIEN} \boxed{ \quad}$. A cada bloque de tres letras le hacemos corresponder un entero entre 0 y $28^3 - 1$ con el siguiente criterio. Si tenemos un bloque de letras \boxed{xyz} , le asociamos el bloque de enteros según la tabla de arriba \boxed{xyz} , y a este bloque le asociamos el entero $x28^2 + y28^1 + z(28)^0$. Por ejemplo, al bloque \boxed{MUY} , letra a letra le corresponde el bloque $\boxed{12 \quad 21 \quad 25}$ al cual le hacemos corresponder el entero $12(28)^2 + 21(28)^1 + 25(28)^0$.

- Asocie la secuencia de enteros que se obtienen de la frase: "Me encanta el carnaval".
- Halle la frase correspondiente a la secuencia de enteros: 768, 7048, 337, 6397.

Ejercicio 3. En un libro de mil hojas numeradas del 1 al 1000 se arrancan todas las hojas cuyo número contenga algún dígito impar (p. ej. se eliminan las páginas 7, 12, 93, 100, pero no la 248).

- ¿Qué página ocupará la posición 100 luego de que le fueran arrancadas dichas hojas?
- ¿Qué posición ocupará la página que aparece con el número 888?

Ejercicio 4. El *Juego del Polinomio* consiste en que alguien piensa un polinomio de coeficientes enteros no negativos y de grado cualquiera, y nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para averiguar el polinomio se nos permite preguntar a la otra persona cuánto vale su polinomio evaluado en los valores que nos parezcan oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio en la menor cantidad de evaluaciones.

- Dar una estrategia que permita adivinar cualquier polinomio, en la menor cantidad de preguntas (evaluaciones). [Nota: las preguntas pueden ser todas al mismo tiempo, o de forma secuencial, luego de conocer el resultado de cualquiera de las preguntas anteriores.]

Ejercicio 5. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

Ejercicio 6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar dando un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

- a. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.
- b. Si $a|b$ entonces $ac|bc$.
- c. Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$.
- d. Si $ac|bc$ entonces $a|b$.
- e. Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$.
- f. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.
- g. Si $4|a^2$ entonces $2|a$.
- h. Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$.
- i. Si $a+c|b+c$ entonces $a|b$.

Ejercicio 7. Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.

Ejercicio 8. Probar que $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible entre 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

- a. $99|10^{2n} + 197$.
- b. $56|13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$.

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ cuya representación en base 10 es $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$. Demostrar que:

- a. $2|n$ si y sólo si $2|a_0$.
- b. $4|n$ si y sólo si $4|a_1 a_0$.
- c. $8|n$ si y sólo si $8|a_2 a_1 a_0$.
- d. Establecer el resultado general sugerido por los casos anteriores.
- e. Investigar si 32 divide a $1.273.460$.

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 11. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

- a. la división de $a^2 + 7$ por 36,
- b. la división de $4a + 1$ por 9,
- c. la división de $7a^2 + 12$ por 28.

Ejercicio 12. Un número natural se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos propios. Por ejemplo, 6 es perfecto pues $6 = 1 + 2 + 3$.

- a. Verificar que 28 y 496 son perfectos.
- b. Probar que si $2^m - 1$ es primo entonces $2^{m-1}(2^m - 1)$ es perfecto.

Ejercicio 13. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

- a. $56|13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$
- b. $256|7^{2n} + 208n - 1$

Ejercicio 14. De los números del 1 al 200 se eligen 101 números cualesquiera. Probar que entre los elegidos hay al menos dos números a y b tales que a divide a b .