Solución al Segundo Parcial MD1 2022

Miércoles 20 de julio de 2022

M01	M02	M03	M04	M05	M06
B	D	A	C	B	D

Múltiple Opción 1

Contemos la cantidad de particiones de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, donde el conjunto que contiene a 6 tiene exactamente 4 elementos. Hay $\binom{6}{3} = 20$ maneras de elegir los 3 elementos que pertenecen al mismo conjunto que el elemento 6. Con los tres restantes elementos hay 5 maneras de agruparlos en distintas particiones. Por la regla del producto tenemos $20 \times 5 = 100$ relaciones de equivalencia posibles que cumplen lo pedido, y la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 2

Eligiendo $G = K_{6,7}$ tenemos que $\overline{G} = K_6 \cup K_7$ y ninguno de los dos grafos es plano, ni hamiltoniano ni euleriano. Luego, la única opción posible, que es correcta, es la D.

De hecho, probemos que si G no es conexo entonces $\overline{G}$ debe ser conexo. Sea G_1 una componente conexa cualquiera de G. En $\overline{G}$ tenemos, al menos, un grafo bipartito completo con todas las aristas entre los vértices de G_1 y todos los vértices de $G - G_1$. Como los grafos bipartitos completos son conexos y $\overline{G}$ contiene un bipartito completo recubridor, entonces $\overline{G}$ es conexo.

Múltiple Opción 3

Sea $T = (V, E)$ un árbol que cumple lo pedido. Sabemos que $|E| = |V| - 1$. Si x es la cantidad de vértices de grado 3 entonces por letra sabemos que $|V| = x + 11$, por lo que $|E| = x + 10$. Por la fórmula de los grados de los vértices: $7 + 4 + 4 + 5 + 3x = 2(x + 10)$. Despejando obtenemos $x = 0$, y la opción correcta es la A.

Múltiple Opción 4

El grafo de Petersen tiene todos sus vértices de grado impar, por lo que no tiene circuito euleriano. Petersen tiene el camino hamiltoniano 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10. La correcta es la opción C.

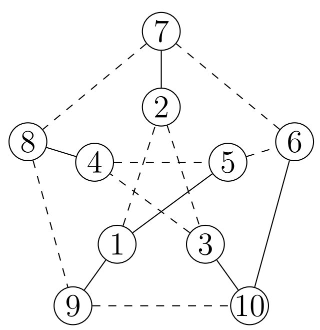

FIGURA 1. Grafo de Petersen. Se indica el camino hamiltoniano en línea punteada.

Múltiple Opción 5

Como el grafo es acíclico cada componente es un árbol; en particular un grafo bipartito. Luego cada componente admite 2 coloreos usando dos colores. Como G tiene 3 componentes, por la regla del producto $p_G(2) = 2^3 = 8$, y la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 6

La relación de divisibilidad tiene como cadenas 1—3—6—18—36 y 1—3—9—18—36, por lo que el diagrama de Hasse correcto es el D.

Problema 1

Representemos la relación de conocidos mediante un grafo $G = (V, E)$, donde la arista $e = (v, w)$ significa que las personas v y w se conocen. Debemos probar que existe un triángulo en G o en $\overline{G}$. Se observa que el grado de un vértice cualquiera en G, más el grado del mismo vértice en el complemento, siempre vale 5. Luego, existe un vértice v que tiene grado 3 o más en G o en su complemento $\overline{G}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $gr(v) \geq 3$ en G (el mismo razonamiento aplica si $gr(v) \geq 3$ en el grafo complemento). Sean w_1, w_2 y w_3 vértices adyacentes a v en G. Hay dos posibilidades:

- Existe alguna arista (w_i, w_j) en E, en cuyo caso las tres aristas $\{(v, w_i), (w_i, w_j), (w_j, v)\}$ forman un triángulo en G, o
- No hay aristas de la forma $\{(w_i, w_j)\}$ en E, en cuyo caso las tres aristas $\{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_1)\}$ forman un triángulo en $\overline{G}$.

Hemos probado que existe un triángulo en G o en $\overline{G}$. Luego, hay tres personas que se conocen entre sí, o tres personas que no se conocen entre sí, como se desea. Se observa que pueden ocurrir ambas condiciones simultáneamente. De hecho, basta con tomar tres personas que se conocen entre sí, y las otras tres personas que no se conocen entre ellas.