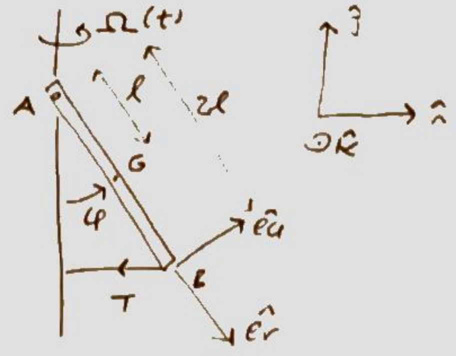
Ejercicio VIII.3



$\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$: base solidaria al plano vertical que contiene a la barra

$\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\}$: base solidaria a la barra

■ En A tenemos una articulación cilíndrica lisa, cuyo sistema de fuerzas distribuidas alrededor de A se reduce a
$\begin{cases} \text{un momento: } \vec{M}_A^{(art)} \ / \ \left| \vec{M}_A^{(art)} \cdot \hat{k} = 0 \right| \\ \text{una resultante: } \vec{R}^{(art)} \end{cases}$ (no tenemos ninguna restricción sobre sus componentes) (¿qué pasa si planteo la Primera Cardinal a la barra?)

a) Segunda Cardinal a la barra desde A:

$$m(G-A)\times \vec{a}_A + \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_A \vec{\omega}) = \vec{M}_A^{(ext)}$$

$=$ ↳ es nula, el pto. A permanece fijo siempre

$$\Rightarrow \left| \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_A \vec{\omega}) = \vec{M}_A^{(ext)} \right|$$

; dentro del momento de las fuerzas externas tenemos: momento de la articulación, del peso y de la tensión:

$$\vec{M}_A^{(ext)} = \vec{M}_A^{(art)} + \vec{M}_A^{(peso)} + \vec{M}_A^{(T)}$$

$$\vec{M}_A^{(peso)} = (G-A)\times(-mg\hat{\jmath}) = \ell\hat{e}_r \times(-mg\hat{\jmath}) = -mg\ell\,\mathrm{sen}\varphi\,\hat{k}$$

$$\vec{M}_A^{(T)} = (B-A)\times(-T\hat{\imath}) = 2\ell\hat{e}_r\times(-T\hat{\imath}) = -2\ell T\cos\varphi\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_A\vec{\omega}) = \vec{M}_A^{(art)} - mg\ell\,\mathrm{sen}\varphi\,\hat{k} - 2\ell T\cos\varphi\,\hat{k} \right| \quad (I)$$

($\varphi = \varphi_0$ mientras la cuerda esté presente y tensa)

(Para averiguar el mínimo valor de Ω_0 vamos a tener que hallar la tensión, por lo que será conveniente proyectar la ec. (I) según $\hat{k}$ y usar que la articulación es cilíndrica lisa $\vec{M}_A^{(art)}\cdot\hat{k} = 0$)

vemos cómo tratar con $\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_A\vec{\omega})$:
- elijo un sistema solidario al rígido como relativo para derivar: $(\dot{\mathbb{I}_A\vec{\omega}}) = \mathbb{I}_A\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\mathbb{I}_A\vec{\omega})$
- calculo directamente $\mathbb{I}_A\vec{\omega}$ y derivo:

ver de esta forma

Para hallar $\mathbb{I}_A \vec{\omega}$ (que es $\vec{L_A}$), usemos que $\mathbb{I}_A$ es diagonal en $[\hat{e_r}, \hat{e_\varphi}, \hat{k}]$: #2

? ¿Cómo es esto?

$$\mathbb{I}_A^{\{\hat{e_r}, \hat{e_\varphi}, \hat{k}\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_A & 0 \\ 0 & 0 & I_A \end{pmatrix} \quad ; \quad I_A = \int_0^{2l} \left(\frac{m}{2l}\right) dx\, x^2 = \frac{m}{2l} \frac{x^3}{3}\Big|_0^{2l} = \frac{4}{3} m l^2$$

¿por qué?

$$\mathbb{I}_A^{\{\hat{e_r}, \hat{e_\varphi}, \hat{k}\}} = \frac{4}{3} m l^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la velocidad angular de la barra es:

$$\vec{\omega} = \Omega(t)\, \hat{j} = \Omega(t) \left[-\cos\varphi\, \hat{e_r} + \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e_\varphi} \right]$$

en la misma base que el tensor

$$\Rightarrow \vec{L_A} = \mathbb{I}_A \vec{\omega} : \quad \frac{4}{3} m l^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega \cos\varphi \\ \Omega \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} m l^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L_A} = \frac{4}{3} m l^2 \Omega \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L_A}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\Omega} \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e_\varphi} + \frac{4}{3} m l^2 \Omega \operatorname{sen}\varphi\, \dot{\hat{e_\varphi}} \qquad (\varphi = \varphi_0 \ \forall t \leq t_1)$$

acompaña al rígido, uso que la velocidad angular de $\{\hat{e_r}, \hat{e_\varphi}, \hat{k}\}$ es $\vec{\omega}$

$$\dot{\hat{e_\varphi}} = \vec{\omega} \times \hat{e_\varphi} = \Omega \hat{j} \times \hat{e_\varphi} = -\Omega \cos\varphi\, \hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L_A}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\Omega} \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e_\varphi} - \frac{4}{3} m l^2 \Omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, \hat{k}}$$

sustituyendo en (I) nos queda:

$$\boxed{\frac{4}{3} m l^2 \dot{\Omega} \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e_\varphi} - \frac{4}{3} m l^2 \Omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, \hat{k} = \vec{M_A}^{(2A)} - mgl \operatorname{sen}\varphi\, \hat{k} - 2lT \cos\varphi\, \hat{k}} \qquad (II)$$

proyectamos según $\hat{k}$ nos queda:

$$-\frac{4}{3} m l^2 \Omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = -mgl \operatorname{sen}\varphi - 2lT \cos\varphi \qquad (\varphi = \varphi_0)$$

despejemos T!

$T = \frac{2}{3} m l \Omega^2 \operatorname{sen}\varphi_0 - \frac{mg}{2} \operatorname{tg}\varphi_0$; queremos que el hilo esté efectivamente tenso : $T > 0 \;\; \forall t > 0 \;(< t_1)$

$$\frac{ml}{2} \underbrace{\left(\frac{4}{3}\Omega^2 - g/_{l\cos\varphi_0} \right)}_{} \operatorname{sen}\varphi_0 > 0$$

> 0 : $\Omega(t)$ es creciente en t, alcanza entonces con asegurar que se verifique para $t=0$:

$$\frac{4}{3}\Omega_0^2 - g/_{l\cos\varphi_0} > 0 : \boxed{\Omega_0^2 > \frac{3g}{4l\cos\varphi_0}}$$

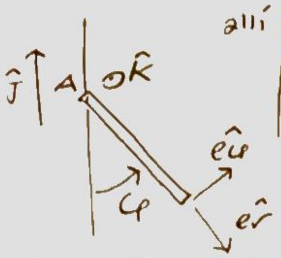
b) $\vec{M}_A^{(art)} = M_1 \hat{i} + M_2 \hat{j}$, para hallar M_2 proyectamos (II) según $\hat{j}$:

$$\frac{4}{3} m l^2 \dot{\Omega} \operatorname{sen}\varphi \underbrace{\hat{e}_\varphi \cdot \hat{j}}_{\operatorname{sen}\varphi} = \vec{M}_A^{(art)} \cdot \hat{j} = M_2$$

$$\Rightarrow \boxed{M_2 = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\Omega} \operatorname{sen}^2\varphi_0}$$

$\longleftarrow$ es el par necesario para hacer girar el plano y tiene un aporte de energía por unidad de tiempo asociado [¿Cómo lo puedo hallar?!]

c) La tensión crece hasta alcanzar un umbral para t_1 en que se rompe el hilo, de allí en más voy a trabajar con (I) modificada:



$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_A \vec{\omega}) = \vec{M}_A^{(art)} - m g l \operatorname{sen}\varphi \,\hat{k}} \quad (I')$$

Para hallar la ecuación de movimiento vamos a 'esquivar' las reactivas en la articulación proyectando (I') según $\hat{k}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_A \vec{\omega}) \cdot \hat{k} = -mgl \operatorname{sen}\varphi} \quad (III) \qquad (\vec{M}_A^{(art)} \cdot \hat{k} = 0)$$

Como el ángulo φ ahora varía en el tiempo, debemos modificar $\vec{L}_A \;(= \mathbb{I}_A \vec{\omega})$

$$\vec{\omega} = \underbrace{\dot{\varphi}\hat{k} + \Omega \hat{j}}_{¿\text{Cómo llego?}} = \dot{\varphi}\hat{k} + \Omega\left[-\cos\varphi \,\hat{e}_r + \operatorname{sen}\varphi \,\hat{e}_\varphi\right]$$

Así, el momento angular visto desde A es:

$\vec{L_A} = \mathbb{I}_A \vec{\omega}$: $\frac{4}{3} m\ell^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega \cos\varphi \\ \Omega \operatorname{sen}\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} m\ell^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \operatorname{sen}\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L_A} = \frac{4}{3} m\ell^2 \left[\Omega \operatorname{sen}\varphi \, \hat{e_\varphi} + \dot{\varphi} \hat{k} \right]}$$

Necesitamos ahora derivar $\vec{L_A}$ pero conservar sólo aquello según $\hat{k}$:

$$\dot{\vec{L_A}} \cdot \hat{k} = \frac{4}{3} m\ell^2 \left[(\Omega \operatorname{sen}\varphi)^{\cdot} \underbrace{\hat{e_\varphi} \cdot \hat{k}}_{=0} + \Omega \operatorname{sen}\varphi \, \dot{\hat{e_\varphi}} \cdot \hat{k} + \ddot{\varphi} \, \hat{k} \cdot \hat{k} \right]$$

$\dot{\hat{e_\varphi}} = \vec{\omega} \times \hat{e_\varphi}$

$\dot{\hat{e_\varphi}} \cdot \hat{k} = \vec{\omega} \times \hat{e_\varphi} \cdot \hat{k} \overset{?}{=} \underbrace{\hat{e_\varphi} \times \hat{k}}_{\hat{e_r}} \cdot \vec{\omega}$

$= \hat{e_r} \cdot \vec{\omega} = -\Omega \cos\varphi$

$$\dot{\vec{L_A}} \cdot \hat{k} = \frac{4}{3} m\ell^2 \left[\ddot{\varphi} - \Omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \right]$$

$$\underset{(\text{III})}{\Rightarrow} \quad \frac{4}{3} m\ell^2 \left[\ddot{\varphi} - \Omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \right] = -mg\ell \operatorname{sen}\varphi$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} - \Omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \frac{3}{4} g/\ell \operatorname{sen}\varphi = 0} \quad (\text{IV})$$

obs: ¿cómo puedo determinar si en $t = t_1$ la barra tiende a subir? porque $\dot{\varphi}(t_1) = 0$

$$\ddot{\varphi}(t_1) \overset{(\text{IV})}{=} \underbrace{\left(\Omega^2 - \frac{3}{4} g/\ell \cos\varphi(t_1) \right)}_{>0 \ \left(\Omega > \Omega_0, \ \Omega_0^2 > \frac{3g}{4\ell \cos\varphi_0} \right)} \operatorname{sen}\varphi(t_1) \cos\varphi(t_1) > 0 : \text{ tiende a subir}$$