Introducción a la Teoría de la Información

Ejercicios complementarios sobre entropía diferencial y canal gaussiano

Problema 1 Sean X e Y dos variables aleatorias continuas, con distribución uniforme $X \sim U[0,a]$ e $Y \sim U[0,b]$.

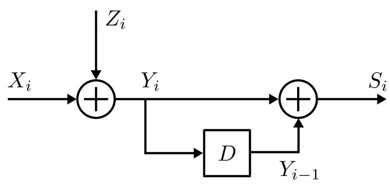
1. ¿Cuál es el soporte de (X,Y)?

Se desea cuantificar las variables X e Y con n y m bits de precisión, respectivamente.

2. Dibujar la región del soporte de (X,Y) y su cuantificación.
3. Dar una expresión para las variables discretas, producto de la cuantificación, X^{Δ} e Y^{Δ}.
4. Relacionar $H(X^{\Delta}, Y^{\Delta})$ con $H(X,Y)$.
5. ¿Cuántos dígitos se requieren para cuantificar (X,Y) con n+m bits de precisión?

Problema 2 Hallar la capacidad del canal de la figura y discutir según ρ. Asumir que X y Z son independientes, Z_i es iid con distribución gaussiana, $Z \sim \mathcal{N}(0,N)$, y

- $E[X_i] = 0$,
- $E[X_i^2] = P, \forall i$.
- $E[X_{i-1}X_i] = \rho P$.
- $E[X_iX_j] = 0$ si $|i-j| \geq 2$, es decir, X_i solo tiene correlación con el inmediato X_{i-1}.



Problema 3 Sea Z una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad exponencial de media λ, $g(z) = \frac{e^{-\frac{z}{\lambda}}}{\lambda}$.

1. Calcular la entropía diferencial $h(Z)$.
2. Sea W una variable aleatoria no negativa con función de densidad de probabilidad f de media λ. Mostrar que $h(W) \leq h(Z)$. En otras palabras, la función de densidad de probabilidad exponencial maximiza la entropía diferencial para variables no negativas con una media dada.
3. Sea Y la salida de un canal con ruido aditivo independiente exponencial de media λ y entrada no negativa con restricción de media μ, es decir, $Y_i = X_i + Z_i$, donde Z_i son i.i.d. distribuidas según g, $X_i \geq 0$, y $\mathrm{E}[X_i] \leq \mu$. Probar que la capacidad del canal satisface $C \leq \log\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)$.

Sugerencia: Para el punto 2 considerar $D(f||g)$ y seguir un razonamiento análogo al usado para probar que la distribución Gaussiana maximiza la entropía diferencial para una varianza dada.