Curso de Optimización, 2022

Instituto de Matemática y Estadística (IMERL)

**Práctico 7: Dualidad**

**Ejercicio 7.1.**

Considere el problema  .

1. Plantee la función de Lagrange, halle su mínimo y encuentre el problema dual de *(P).*
2. Halle el máximo del problema dual, verificando que coincide con la solución de *(P)*.
3. Estudie en este problema las propiedades de la función dual presentadas en curso teórico.

**Ejercicio 7.2.** Dualidad en análisis de envolvente de datos (DEA)

Considere un conjunto de ***n*** empresas que producen con tecnología similar, a las que se quiere comparar entre sí en base a sus insumos y productos.

Hay ***m*** insumos que se usan para producir ***s*** productos, siendo las cantidades del insumo *i* y del producto *r* correspondientes a la empresa :

**El problema de elegir un índice:** Se plantea el problema de elegir un índice para medir la relación entre insumos y productos de cada empresa como el cociente entre un promedio ponderado de productos y un promedio ponderado de insumos:

donde los vectores de pesos , una vez determinados, serán los mismos para todas las empresas.

La empresa quiere proponer los vectores de pesos a elegir, y para eso estudia cuáles serán los pesos con los que su índice sea mayor:

1. Reformule este problema como un LP con variables *.* Observe que en las restricciones los cocientes se pueden escribir como , y que el denominador del objetivo se puede igualar a 1 sin perder generalidad (porque los índices no cambian si todos los pesos se multiplican por la misma constante).

**El problema de la reducción de insumos:** Un evaluador de la eficiencia de las empresas quiere estudiar cuánto podrían reducir el uso de insumos sin disminuir las cantidades de productos. En cada empresa , la reducción se obtendrá con un coeficiente para multiplicar a todos sus insumos por igual, que será 1 si la empresa es eficiente y menor si no lo es. El evaluador se plantea un cálculo empírico, en que medirá la eficiencia de la empresa en relación con los datos disponibles del conjunto de empresas, buscando un “comparador eficiente” definido como una combinación lineal[[1]](#footnote-0) del conjunto:

,

donde los multiplicadores son positivos para las empresas que sean efectivamente pares de comparación eficiente para la empresa , y son nulos para el resto.

El problema es entonces el de hallar a la vez el menor coeficiente y los multiplicadores , preservando que

* cada uno de los insumos *i* del comparador sea menor o igual que el correspondiente insumo reducido de la empresa:

* cada uno de los productos *r* del comparador sea mayor o igual que el correspondiente producto de la empresa:

1. Escriba este problema como un LP con variables , dejando libre la variable .

**c)** Muestre que los problemas lineales anteriores son duales uno del otro. ¿Cómo se interpretan las condiciones de holgura complementaria?

**Ejercicio 7.3. Una aplicación:** Estudio de costos operativos (OPEX) en empresas de trasmisión eléctrica de Brasil (se adjuntan los datos en la planilla Datos DEA Brasil). Elija una de las empresas y resuelva ambos problemas para esa empresa, verificando que su máximo índice coincide con el mínimo .

**e) Opcional:** Repita la parte anterior para las empresas de distribución, con los datos en otra hoja de la misma planilla.

**Ejercicio 7.4.** Resolución dual de un problema separable

Considere el problema

donde Halle el óptimo resolviendo un problema con la restricción acoplante relajada. Halle el problema dual de (P) y resuélvalo, justificando los resultados obtenidos.

1. Los insumos y productos se definen con la misma combinación, y se hace el supuesto que esta empresa artificial es factible. El comparador puede ser por ejemplo la semisuma de dos empresas existentes, y en particular, cualquier múltiplo de una empresa eficiente es un posible comparador para el resto, por lo que este planteo implica un supuesto de retornos constantes a escala (CRS). Existen variantes con retornos variables (VRS) y otros. [↑](#footnote-ref-0)