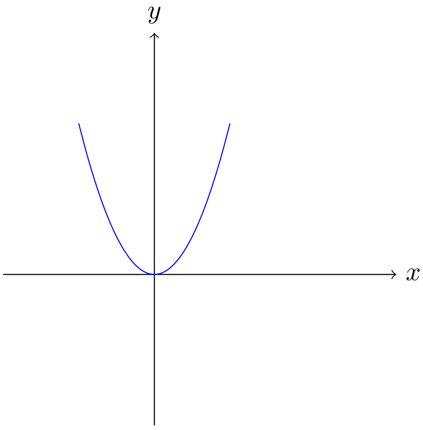
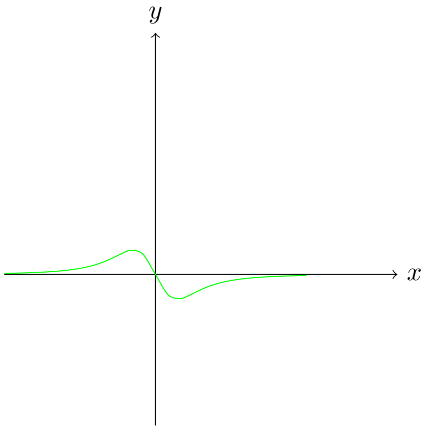
Funciones: derivabilidad y análisis de gráficos

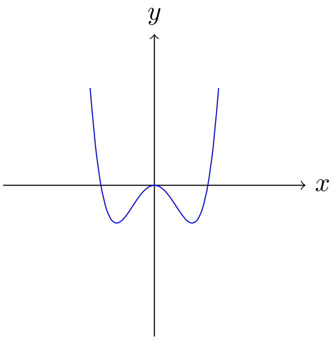
1. Relaciona cada gráfica de la columna izquierda (azul), con su derivada en la columna derecha (verde).



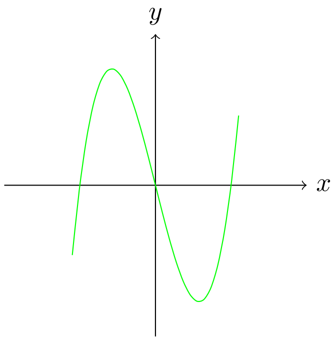
(a)



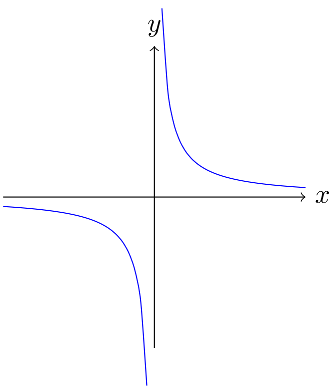
(e)



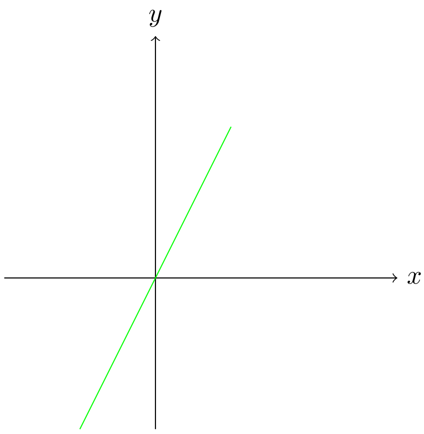
(b)



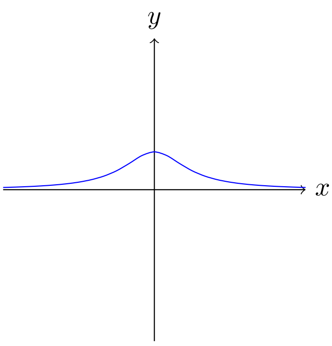
(f)



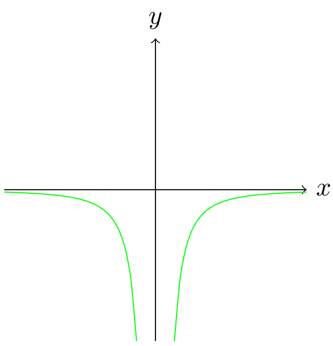
(c)



(g)



(d)



(h)

Derivabilidad

Sea $f : I \to \Re$ f es derivable en $a \in I$, si existe y es finito $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

2. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones

   (a) $|x|$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 4 & x \le 1 \\ -x^2 + x & x > 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & x \le 1 \\ -x^2 + x & x > 1 \end{cases}$

   (d) $sig(x)$

3. Hallar α y β para que la función sea derivable

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \alpha & x < 0 \\ e^x + 1 & x \ge 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \alpha Ln(x) + 3 & x \le 1 \\ e^{x-1} + 2 & x > 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & x < -2 \\ \frac{x}{x+1} - Ln|x+1| & x \ge -2 \end{cases}$

4. Usando las reglas de derivación, calcule las derivadas de las siguiente funciones:

   (a) $4x^2 - 6x - 5$

   (b) $4x^5 + L(x-3) + 5e^x$

   (c) $3\sqrt{x-5} + Ln|x+3|$

   (d) $(x^2+2)\sqrt[3]{x}$

   (e) $(x^2 - 5x).Ln(x+1)$

   (f) $(e^x + 3).Ln(x)$

   (g) $\frac{1}{x}$

   (h) $\frac{Ln(x)}{x-2}$

   (i) $\frac{e^x}{x^2+2}$

   (j) $\frac{4x^2-x^5}{e^x}$

   (k) $(4x-3)^5$

   (l) $L|\frac{x+4}{3x-5}| + x^5 - 3x$

   (m) $e^{\frac{x^2+6x-3}{x}}$

   (n) $\frac{(3x^2-8x+4)e^x}{x^2-3x}$

   (o) $\sqrt{\frac{x-7}{2x+3}}$

   (p) $\sqrt{x^2-6x+9}$

Crecimiento y optimización

5. Estudiar el crecimiento de las siguientes funciones

   (a) $x^2 + 5x^4 - 3$

   (b) $4x^2.e^x$

   (c) $-\frac{1}{x^2}$

   (d) $\frac{x^2-x+1}{x^2-2x}$

   (e) $x.Ln(x)$

   (f) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

6. Resolver los siguiente problemas de optimización

   (a) Un jardinero dispone de 240 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?

   (b) Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio $\frac{1}{2}$

   (c) Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los vehículos entre las 13 y las 19 horas está dada por: $v(t) = 2t^3 - 42t^2 + 60t - 7$
   ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad?

   (d) Se necesitan dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Cada material cuesta 2 y 3 dólares por centímetro cuadrado respectivamente. Si la suma de los dos perímetros de los dos cuadrados es un metro. ¿Cuáles son las dimensiones de cada chapa, de forma que el costo sea mínimo?

Estudio analítico

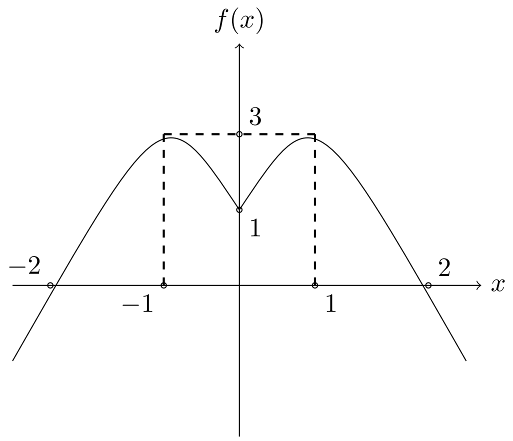
Tener en cuenta

- Imposibilidad de la división por 0 (denominadores $\neq 0$)
- La cantidad subradical de índice par debe ser ≥ 0
- No existencia de logaritmos de número negativos o cero.

7. Estudiar existencia, ceros y signo de las siguientes funciones reales

   (a) $\frac{2x+1}{x-1}$
   (b) $\frac{x-1}{(x+1)^2}$
   (c) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
   (d) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{3x^2-1}$
   (e) $Ln(\frac{x-1}{x+1})$
   (f) $Ln|\frac{2x+1}{x-1}|$
   (g) $\frac{L(x-1)}{(x+1)^2}$

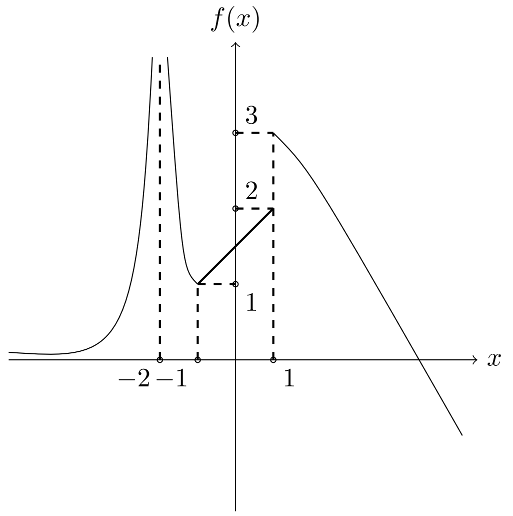
8. Se considera la función $f : \Re \to \Re$, representada gráficamente por:



Indicar:

   (a) Dominio de la función
   (b) Ceros y signo
   (c) Límites laterales
   (d) Límites en el infinito
   (e) Crecimiento
   (f) Concavidad

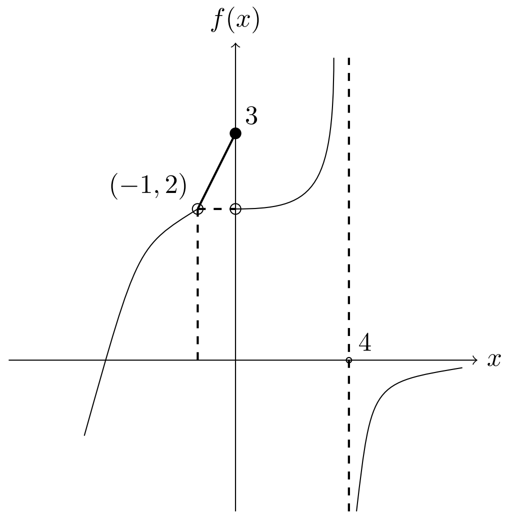
9. Se considera la función $f : \Re \to \Re$, representada gráficamente por:



Indicar:

   (a) Dominio de la función
   (b) Ceros y signo
   (c) Límites laterales
   (d) Límites en el infinito
   (e) Crecimiento
   (f) Concavidad

10. Se considera la función $f : \Re \to \Re$, representada gráficamente por:



Indicar:

   (a) Dominio de la función
   (b) Ceros y signo
   (c) Límites laterales
   (d) Límites en el infinito
   (e) Crecimiento
   (f) Concavidad

Representación gráfica

11. De una función sabemos que:

(a) Representar una función que:
- No está definida en $x = 3$
- $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to -3^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 1^{\mp}$
- No tiene puntos singulares. Es siempre creciente.

(b) Responder las siguiente preguntas:
- Indicar el recorrido de la función.
- ¿Presenta discontinuidades?
- Signo de la función.
- ¿La función es inyectiva?, ¿sobreyectiva?
- Indicar crecimiento y concavidad

12. De una función sabemos que:

- $D(f) = \Re - \{1, 4\}$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty, \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0^{\pm}$
- $f'(2) = 0, \ f(2) = -1, \ f'(-1) = 0, \ f(-1) = -1$

(a) Representar gráficamente la función.

(b) Responder las siguiente preguntas:
- Indicar el recorrido de la función.
- ¿Presenta discontinuidades?
- Signo de la función.
- ¿La función es inyectiva?, ¿sobreyectiva?
- Indicar crecimiento y concavidad

13. De una función sabemos que:

- $\lim_{x\to \infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -5} f(x) = -\infty$
- $f(-8) = -2, \ f(0) = 0$ único punto dónde f se anula.
- $f'(-8) = 0$ único punto dónde $f'(x) = 0$
- $f'(x) < 0, \ \forall x > 0$
- Presenta discontinuidad en $x = -5$ y $x = 0$

(a) Representar gráficamente la función.

(b) Responder las siguiente preguntas:
- Indicar el recorrido de la función.
- ¿Presenta discontinuidades?
- Signo de la función.
- ¿La función es inyectiva?, ¿sobreyectiva?
- Indicar crecimiento y concavidad

14. Realice el estudio analítico y representación gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{(x-2)(x+1)}$

(c) $f(x) = (x-1)L(x)$

(d) $f(x) = e^{\frac{3x-1}{2-x}}$

(e) $f(x) = (5x-1)e^{\frac{1}{x}}$

(f) $f(x) = L(\frac{4x-1}{2x+4})$

(g) $f(x) = L|\frac{x^2-2x}{x-1}|$

(h) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x+1}$

(i) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

15. En cada caso estudiar continuidad y realizar el estudio analítico y la representación gráfica de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \leq 1 \\ \frac{-x^2+25}{(x-1)^2} & x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x > 0 \\ \frac{x^2+1}{x^2-9} & x \leq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-3x} & x > 0 \\ L(x^2) & x \leq 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} b & x = 1 \\ \frac{x^2-(a+2)x+2a}{x-1} & x \neq 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{-3x^2+12}{x^2+x-2} & x < -2 \\ ax + 2 & x \geq -2 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} L(1-x) & x < 1 \\ e^{4x-x^2} & x \geq 1 \end{cases}$