SOLUCION DE LA VERSION 1
Primer Parcial - Matemática Discreta I

Martes 3 de mayo de 2022

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
B	*D*	*C*	*B*	*D*	*A*

MO1

Contar la cantidad de subconjuntos de 4 elementos de $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ tales que la distancia entre toda pareja de elementos sea de 3 o más. A) $\binom{94}{3}$; B) $\binom{94}{4}$; C) $\binom{94}{5}$; D) $\binom{94}{6}$.

Solución - MO1

Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ cumple con el enunciado y se ordenan sus elementos en forma creciente entonces $x_i = a_{i+1} - a_i \geq 3$, $i = 1, 2, 3$. Definiendo $x_0 = a_1 \geq 1$ y $x_4 = 100 - a_4$ tenemos que $\sum_{i=0}^4 x_i = 100$. Usando las variables $y_i = x_i - 3$, $i = 1, 2, 3$, $y_0 = x_0 - 1$, $y_4 = x_4$, debemos contar la cantidad de soluciones naturales de $\sum_{i=0}^4 y_i = 90$, que es $CR_{90}^5 = \binom{5+90-1}{90} = \binom{94}{90} = \binom{94}{4}$. Luego, la opción correcta es la B.

MO2

Hallar el coeficiente en x^2y^3 de $f(x, y) = (x - 2x^2 + y + 2y^3 + 1)^5$.
A) -20; B) -30; C) -40; D) -50.

Solución - MO2

Hay 4 maneras posibles y disjuntas para obtener x^2y^3:

- Eligiendo dos veces x^1 y tres veces y^1: $\frac{5!}{3!2!}(x)^2(-2x^2)^0(y)^3(2y^3)^0(1)^0 = 10x^2y^3$.
- Eligiendo dos veces x^1 y cero vez y^1: $\frac{5!}{2!2!}(x)^2(-2x^2)^0(y)^0(2y^3)^1(1)^2 = 60x^2y^3$.
- Eligiendo cero vez x^1 y tres veces y^1: $\frac{5!}{3!}(x)^0(-2x^2)^1(y)^3(2y^3)^0(1)^1 = -40x^2y^3$.
- Eligiendo cero vez x^1 y cero vez y^1: $\frac{5!}{3!}(x)^0(-2x^2)^1(y)^0(2y^3)^1(1)^3 = -80x^2y^3$.

El coeficiente en x^2y^3 es igual a $10 + 60 - 40 - 80 = -50$ y la opción correcta es la D.

MO3

¿De cuántas formas se pueden llenar 10 vasos ordenados y numerados del 1 al 10 usando 4 bebidas posibles de modo que no queden dos vasos consecutivos con la misma bebida? Se asume que todo vaso es llenado con alguna bebida.
A) 4^{10}; B) $4^2 \times 3^8$; C) 4×3^9; D) $4^{10} - 3^{10}$.

Solución - MO3

Hay 4 opciones para llenar con alguna bebida el primer vaso y luego 3 opciones para llenar los restantes vasos y así evitar repeticiones. Por la regla del producto tendremos 4×3^9 opciones en total. Luego, la opción correcta es la C.

MO4

Tenemos n pesos uruguayos para comprar naranjas, manzanas y bananas en la feria. Vamos a usar todo el dinero comprando cantidades enteras en kilogramos. Se sabe que las naranjas salen 20 pesos, las manzanas 30 pesos y las bananas 50 pesos por kilogramo, respectivamente. La función generatriz $f(x)$ que representa la cantidad de compras posibles es:
A) $\frac{1}{1+x^{20}}\frac{1}{1+x^{30}}\frac{1}{1+x^{50}}$; B) $\frac{1}{1-x^{20}}\frac{1}{1-x^{30}}\frac{1}{1-x^{50}}$; C) $\frac{1}{1+(x^{20}+x^{30}+x^{50})}$; D) $\frac{1}{1-(x^{20}+x^{30}+x^{50})}$.

Solución - MO4

Sean m, d y b la cantidad de kilogramos de manzanas, duraznos y bananas a comprar, respectivamente. Por la letra sabemos que $20m + 30d + 50b = n$.

Ahra correspondemos la cantidad de kilogramos a comprar de cada fruta con un exponente. La función generatriz resulta entonces:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}(x^{20})^m \sum_{d=0}^{+\infty}(x^{30})^d \sum_{b=0}^{+\infty}(x^{50})^b,$$

y recordando la suma geométrica tenemos que la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 5

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n = 6n+5$ con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Entonces: A) $a_{99} = 3^{100}-100$; B) $a_{99} = 3^{100} - 99$; C) $a_{99} = 3^{99} - 99$; D) $a_{99} = 3^{99} - 100$.

Solución - MO5

El polinomio característico es $p(x) = x^2 - x - 6$ tiene raíces 3 y -2, por lo que la solución homogénea es $a_{n_H} = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$. Como el miembro derecho tiene un polinomio de grado 1 podremos encontrar una solución particular de la forma $a_{n_P} = an + b$. Busquemos los reales a y b tales que a_{n_P} es solución. Reemplazando, se debe tener que:

$$a_{n+2_P} - a_{n+1_P} - a_{n_P} = a(n+2) + b - a(n+1) - b - 6an - 6b = -6an + a - 6b = 6n + 5,$$

por lo que $a = -1$, $b = -1$ y $a_{n_P} = -n - 1$. La solución es $a_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n - n - 1$. Reemplazando con los datos iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ tenemos que:

$$\alpha + \beta = 1;$$
$$3\alpha - 2\beta = 3.$$

Duplicando la primera ecuación y sumando la segunda tenemos que $5\alpha = 5$, por lo que $\alpha = 1$. Por la primera ecuación deducimos que $\beta = 0$, y finalmente conseguimos que $a_n = 3^n - n - 1$. Luego $a_{99} = 3^{99} - 100$, y la respuesta correcta es la D.

MO6

¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa que contiene 16 canicas: 4 blancas, 4 rojas, 4 azules y 4 negras? A) 80; B) 90; C) 100; D) 110.

Solución - MO6

Podemos codificar el problema a contar soluciones naturales de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ donde $x_i \leq 4$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Utilicemos el principio de inclusión-exclusión usando $c_i : x_i \geq 5$. Es claro que no pueden ocurrir más de una de estas condiciones a la vez, y por simetría debemos contar $CR^4_9 - \binom{4}{1}n(c_1)$.

Para contar $n(c_1)$ debemos imponer $x_1 \geq 5$. Restando 5 unidades en cada miembro y usando $x_1^{'} = x_1 - 5$ tenemos soluciones naturales de $x_1^{'} + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, que son CR^4_4. El resultado es entonces $\binom{12}{9} - 4\binom{7}{4} = 80$, y la respuesta correcta es la A.

Problema de Desarrollo

1) Probar que $n^2 \geq 2n+1$ para todo $n \geq 3$.
2) Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

Solución - Problema de Desarrollo

1) Probemos que $n^2 \geq 2n+1$ para todo $n \geq 3$ mediante inducción completa:
   - *Paso Base:* en el miembro izquierdo tenemos $3^2 = 9$, mientras que en el miembro derecho tenemos $2 \times 3 + 1 = 7$, como $9 \geq 7$, el paso base es cierto.
   - *Paso Inductivo:* supongamos que el resultado es cierto para $h \geq 3$. La hipótesis inductiva es entonces que $h^2 \geq 2h+1$. Debemos probar que $(h+1)^2 \geq 2(h+1)+1$. Valiéndonos de nuestra hipótesis inductiva tenemos que:

   $$(h+1)^2 = h^2 + 2h + 1 \geq (2h+1) + 2h + 1 = 2h + 2 + 2h \geq 2(h+1) + 1,$$

   donde se ha utilizado en el último paso que $h \geq 3$ y en particular $2h \geq 1$.
2) Probemos que $2^n \geq n^2$ para todo $n \geq 4$ por inducción completa.
   - *Paso Base:* Si $n_0 = 4$ tenemos que $2^{n_0} = 2^4 = 16$, mientras que $n_0^2 = 4^2 = 16$. Como $16 \geq 16$, se cumple la desigualdad.
   - *Paso Inductivo:* vamos a asumir como hipótesis inductiva que $2^h \geq h^2$, donde h es un entero tal que $h \geq 4$. Debemos probar que $2^{h+1} \geq (h+1)^2$.
   Por la parte (1) se cumple que $h^2 \geq 2h+1$ para todo $h \geq 4$. Haciendo uso de la hipótesis inductiva tenemos que $2^{h+1} = 2 \times 2^h \geq 2h^2$, y entonces:

   $$2^{h+1} \geq 2h^2 \geq h^2 + h^2 \geq h^2 + (2h+1) = (h+1)^2.$$

   El enunciado vale entonces para todo $n \geq 4$ por el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.