Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2024
Práctico 7

Esperanza, covarianza y varianza

Ejercicio 1
Al invertir en la bolsa de valores, una persona puede lograr una ganancia de 4000 dólares en un año con una probabilidad de 0,3 o bien tener una pérdida de 1000 dólares con probabilidad 0,7. ¿Cuál sería la ganancia esperada de esta persona?

Ejercicio 2
La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por:

$$p_X(x) = KC_x^3 \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} \quad \text{con } x = 1, 2, 3.$$

Hallar K y la esperanza de X.

Ejercicio 3
La función de densidad de la variable aleatoria X que mide los diámetros de paso de los hilos de la rosca de una pieza está dada por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi\,(1+x^2)} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$

1. ¿Cuál es el valor esperado de X?
2. Si ahora definimos una variable aleatoria Y tal que $Y = 3X + 1$, ¿cuál es el valor esperado de Y?

Ejercicio 4
Consideremos dos juegos de azar.

1. Se eligen 5 números entre 1 y 20 y se sortea mediante bolilleros 5 números entre 1 y 20 (suponemos equiprobabilidad). Si salen los 5 números elegidos por nosotros (aunque sea en otro orden), ganamos 20 veces lo apostado; si salen 4 de los 5, ganamos 4 veces lo apostado; si salen 3 de los 5, ganamos el doble de lo apostado, y en cualquier otro caso perdemos lo apostado. (Atención: cuando decimos 'ganar' nos referimos a cuánto se nos paga, y no a la ganancia neta. En realidad, la ganancia neta se obtiene luego de restar lo apostado, por ej.: si acertamos los 5 números, la ganancia neta es 19 veces lo apostado.)

2. Se eligen 5 cartas de un mazo de 32, si las 5 son del mismo color y en escalera (supongamos las cartas numeradas del 1 al 8; las escaleras son cuatro: 1 a 5, 2 a 6, 3 a 7, 4 a 8) ganamos 8 veces lo apostado, si obtenemos 5 cartas del mismo color pero no en escalera, ganamos 2 veces lo apostado; si obtenemos cartas en escalera pero no del mismo color, recuperamos lo apostado; en cualquier otro caso se pierde lo apostado. (Vale la misma precisión que en el juego anterior respecto de la ganancia y también suponemos equiprobabilidad.)

   Queremos jugar una vez por semana uno de estos juegos, con las siguientes reglas:

   Jugaremos siempre una suma fija S,

   Jugaremos siempre el mismo juego,

   Las distintas jugadas son totalmente independientes, no hay influencia de una jugada en la otra

   Jugaremos por un tiempo indefinido, muy largo.

   ¿Cuál de los juegos elegiría ud.? Al cabo de 1000 semanas, ¿cuánto estimaría usted que es la ganancia neta que se obtendría jugando siempre al primer juego? ¿Y al segundo?.

Ejercicio 5
Si a ud. le dicen que el 12 % de la población está desempleada, el 48 % tiene un solo empleo, el 35 % tiene dos empleos y el 5 % tiene tres, y por otra parte en una muestra tomada al azar, de manera independiente, de 1400 personas resulta que el promedio de empleos por persona es 2.04. ¿Usted qué diría? ¿Le parece que algún dato puede estar mal, o no? Si algún dato puede estar mal, ¿de cuáles sospecharía? ¿Qué tipos de errores podría contener la información? Si además, entre esas 1400 personas hay 312 desempleados, ¿qué respondería a las preguntas anteriores?

Ejercicio 6
Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes distribuciones:

1. $\mathcal{U}\{1, ..., n\}$ (uniforme discreta)
2. $\mathcal{U}[a, b]$ (uniforme continua)
3. $\mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson)
4. $\exp(\lambda)$ (exponencial)
5. $\mathrm{Geo}(p)$ (geométrica)

Ejercicio 7
Calcular esperanza y varianza de la distribución $\mathrm{BN}(k, p)$ (binomial negativa).
Sugerencia: Utilizar que si $X_1, \ldots, X_k iid \sim \mathrm{Geo}(p)$ entonces $X_1 + \cdots + X_k \sim \mathrm{BN}(k, p)$.

Ejercicio 8
Calcular esperanza y varianza de la distribución $\mathcal{H}(n; N; D)$ (hipergeométrica).

Ejercicio 9
Se ponen a funcionar en un mismo momento (que tomamos como tiempo 0) dos lamparitas de dos marcas distintas, A y B, que se dejan prendidas hasta que se rompan. Llamemos X al tiempo de duración de la lamparita A e Y al tiempo de duración de la lamparita B. Admitamos que X e Y son independientes, que X sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_1 > 0$ y que Y sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_2 > 0$.

Llamemos S al tiempo en que ocurre la primera rotura de alguna de las dos lamparitas y T al tiempo en que se rompe la restante lamparita.

1. Calcular las funciones de distribución de S y T.
2. Calcular $\mathbf{E}(S)$, $\mathbf{E}(T)$.
3. Calcular $\mathbf{E}(ST)$. ¿Son S y T independientes? Justifique la respuesta.
4. Calcular $\mathbf{P}(S = T)$.