UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY
FACULTAD DE INGENIERIA
IIMPI INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

TRAYECTORIAS

Fundamentos de Robótica Industrial

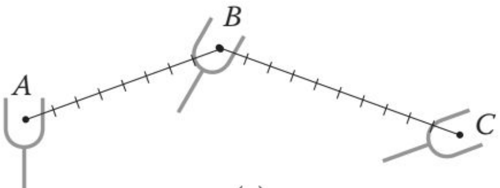
Versión 2024

Introducción

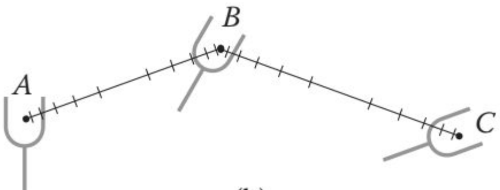
La expresión “generación de trayectorias”, refiere a la forma en la que el robot se desplaza de un punto a otro de una manera controlada.

El ***camino*** o ***recorrido*** se define como el conjunto de configuraciones (posiciones de las articulaciones [**q**]) que el robot toma al desplazarse de un punto a otro. Por otro lado, la ***trayectoria*** además de tener la información del recorrido, también presenta como éste se relaciona con el tiempo.

En la siguiente imágen se muestra el elemento terminal de un robot manipulador que se desplaza desde el punto A al B, y luego al C. Considerando que los separadores determinan un lapso de tiempo fijo para ambos casos, se puede decir que la velocidad en el caso ***(a)*** se mantiene constante, mientras que en el ***(b)*** no. Por lo tanto, a pesar de que ambos casos presentan el **mismo recorrido**, la **trayectoria no es la misma**, puesto que su relación con el tiempo es diferente.



(a)



(b)

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

FACULTAD DE INGENIERIA

IIMPI INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

Video 1 Video 2

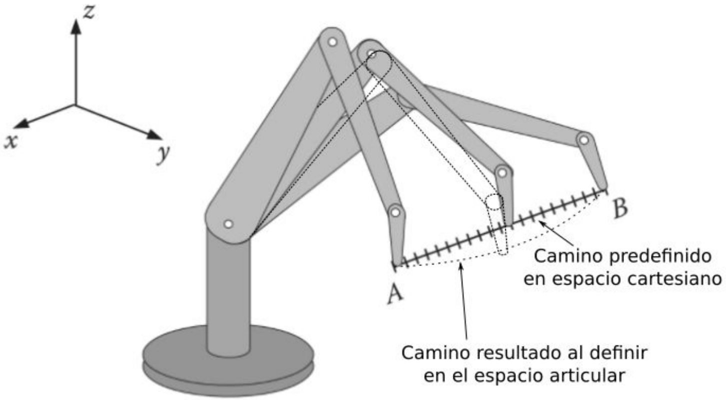
Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2023

Espacio articular - Espacio cartesiano

Consideremos un robot de n GDL en un punto ***A*** determinado y que debemos moverlo a otro punto llamado ***B***.

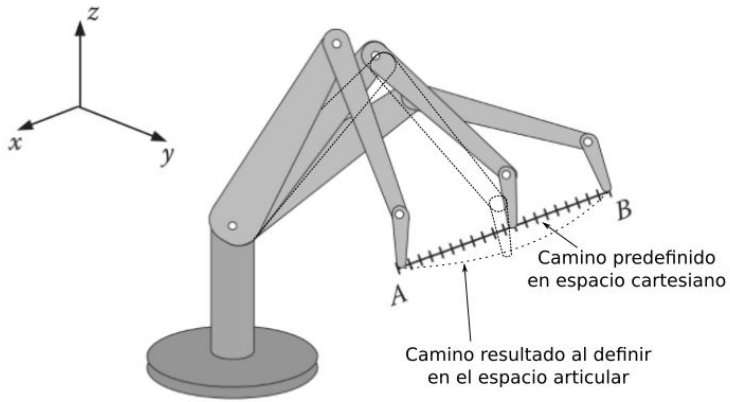
¿Cómo lo harían?



Espacio articular - Espacio cartesiano

Consideremos un robot de n GDL en un punto ***A*** determinado y que debemos moverlo a otro punto llamado ***B***.

Usando cinemática inversa podemos determinar la posición de cada articulación para cuando el robot se encuentra en A $q_A=[x_1\ x_2 \dots x_n]^T$ y de la misma forma la configuración $q_B=[x'_1\ x'_2 \dots x'_n]^T$ que deberá tener al finalizar el movimiento. Estos valores, inicial y final de cada articulación, pueden ser utilizados por el controlador para llevar el robot al punto deseado.



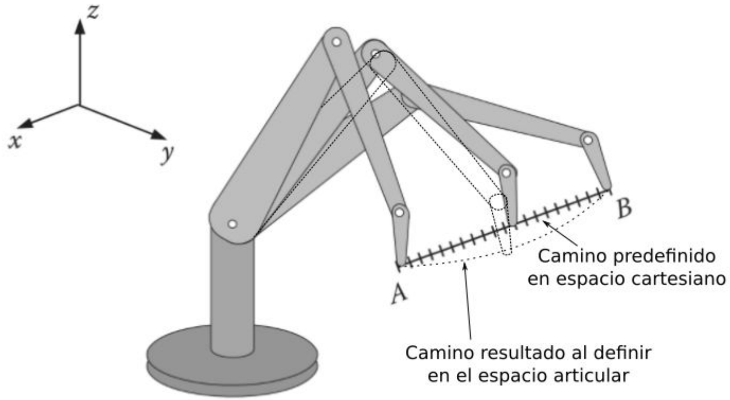
Espacio articular - Espacio cartesiano

Consideremos un robot de n GDL en un punto ***A*** determinado y que debemos moverlo a otro punto llamado ***B***.

Usando cinemática inversa podemos determinar la posición de cada articulación para cuando el robot se encuentra en A $\boldsymbol{q_A=[x_1\ x_2 \ldots x_n]^T}$ y de la misma forma la configuración $\boldsymbol{q_B=[x'_1\ x'_2 \ldots x'_n]^T}$ que deberá tener al finalizar el movimiento. Estos valores, inicial y final de cada articulación, pueden ser utilizados por el controlador para llevar el robot al punto deseado.

Al describir el movimiento del robot a partir de la posición de sus articulaciones se utiliza el ***espacio articular.***

- Pocos cálculos → simple,
- No hay singularidades
- Movimiento del extremo del robot es "***impredecible***".



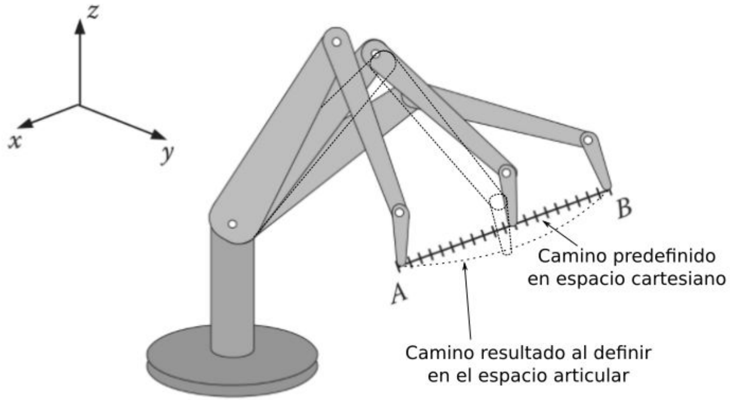
Espacio articular - Espacio cartesiano

Consideremos un robot de n GDL en un punto ***A*** determinado y que debemos moverlo a otro punto llamado ***B***.

Otra forma es imponer el camino de la terminal del robot entre A y B, por ejemplo recorriendo una línea recta en el ***espacio cartesiano***.

Para esto es necesario discretizar el recorrido en una determinada cantidad de puntos y pedirle al robot que recorra cada uno de ellos.

- Se logra la trayectoria deseada
- Computacionalmente mucho más costoso
- A priori pueden aparecer singularidades.



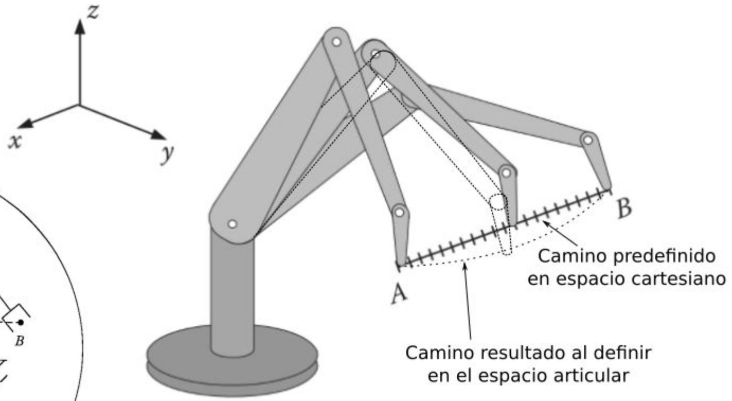
Espacio articular - Espacio cartesiano

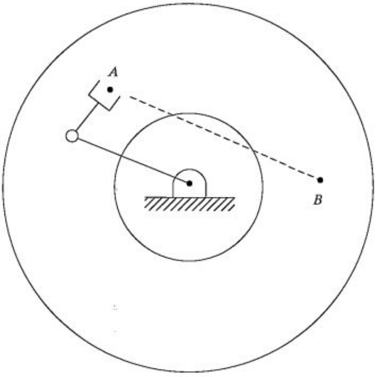
Consideremos un robot de n GDL en un punto ***A*** determinado y que debemos moverlo a otro punto llamado ***B***.

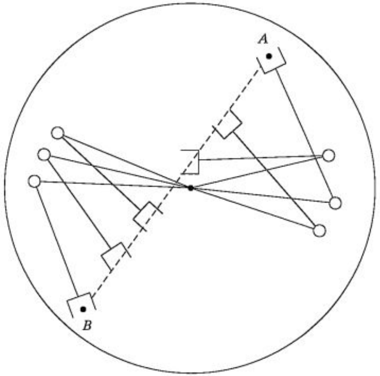
Otra forma es imponer el camino de la terminal del robot entre A y B, por ejemplo recorriendo una línea recta en el ***espacio cartesiano***.

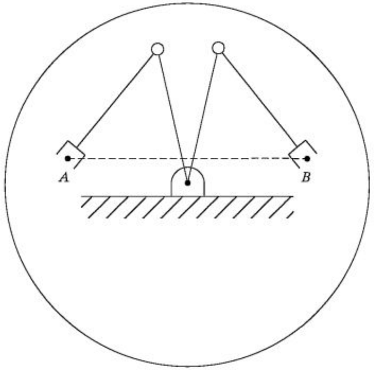
Para esto es necesario discretizar el recorrido en una determinada cantidad de puntos y pedirle al robot que recorra cada uno de ellos.

- Se logra la trayectoria deseada
- Computacionalmente mucho más costoso
- A priori pueden aparecer singularidades.



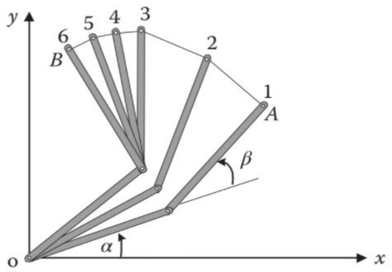






Espacio articular - Espacio cartesiano

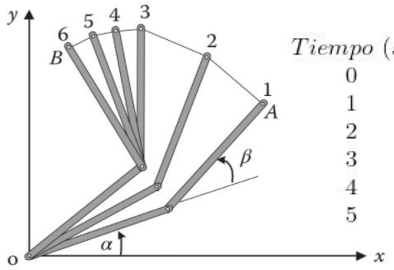
*Consideremos el robot de la figura, el cual debe desplazar su extremo desde el punto **A** (α=20º, β=30º) al punto **B** (α=40º, β=80º) con la limitante de que la velocidad máxima articular es de 10 º/s.*



Espacio articular - Espacio cartesiano

Consideremos el robot de la figura, el cual debe desplazar su extremo desde el punto ***A*** *(α=20º, β=30º) al punto* ***B*** *(α=40º, β=80º) con la limitante de que la velocidad máxima articular es de 10 º/s.*

Una solución para realizar esta tarea es mover cada articulación a su velocidad máxima, por lo que al cabo de 2 segundos el eslabón inferior alcanza su posición final, mientras que al eslabón superior le toma 5 segundos.

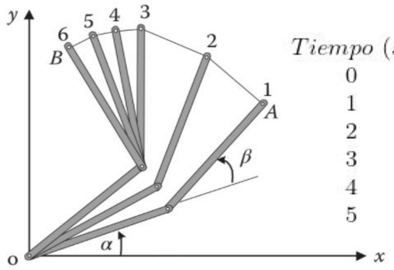


Tiempo (s)	α	β
0	20	30
1	30	40
2	40	50
3	40	60
4	40	70
5	40	80

Espacio articular - Espacio cartesiano

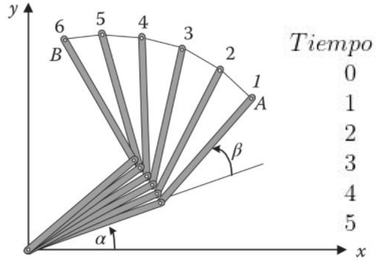
Consideremos el robot de la figura, el cual debe desplazar su extremo desde el punto ***A*** *(α=20º, β=30º) al punto* ***B*** *(α=40º, β=80º) con la limitante de que la velocidad máxima articular es de 10 º/s.*

Una solución para realizar esta tarea es mover cada articulación a su velocidad máxima, por lo que al cabo de 2 segundos el eslabón inferior alcanza su posición final, mientras que al eslabón superior le toma 5 segundos.



Tiempo (s)	α	β
0	20	30
1	30	40
2	40	50
3	40	60
4	40	70
5	40	80

Otra forma sería mover ambas articulaciones de forma proporcional a su recorrido para que ambas comiencen y terminen simultáneamente. Para lograr esto, ambas deberán girar a diferente velocidad (α a 4º/s y β a 10º/s).

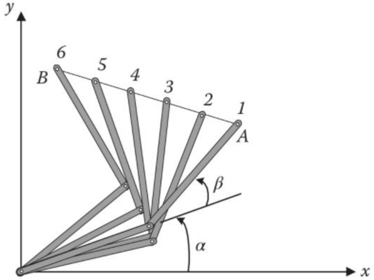


Tiempo (s)	α	β
0	20	30
1	24	40
2	28	50
3	32	60
4	36	70
5	40	80

Espacio articular - Espacio cartesiano

*Consideremos el robot de la figura, el cual debe desplazar su extremo desde el punto **A** (α=20º, β=30º) al punto **B** (α=40º, β=80º) con la limitante de que la velocidad máxima articular es de 10 º/s.*

➢ **Supongamos que ahora decidimos que el extremo del robot debe describir una línea recta entre A y B.**

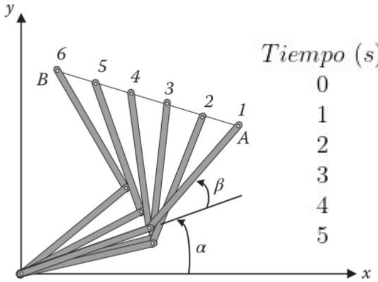


Espacio articular - Espacio cartesiano

*Consideremos el robot de la figura, el cual debe desplazar su extremo desde el punto **A** (α=20º, β=30º) al punto **B** (α=40º, β=80º) con la limitante de que la velocidad máxima articular es de 10 º/s.*

➢ **Supongamos que ahora decidimos que el extremo del robot debe describir una línea recta entre A y B.**

Para esto decidimos partir este camino en 5 tramos de igual longitud, y para cada “nodo” o “punto” determinamos la configuración de las articulaciones correspondiente (cinemática inversa).
Aquí la **velocidad no será constant**e y se **sobrepasa el límite de los actuadores** por lo que no es válido. Además, puede que los actuadores no tengan el par suficiente para imponer la velocidad necesaria casi instantáneamente.



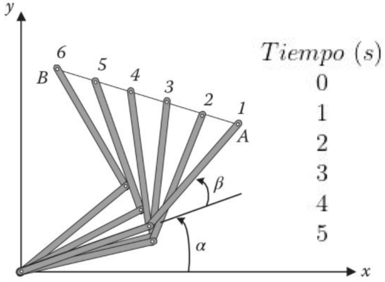
$Tiempo\ (s)$	$\alpha - vel(^o/s)$	$\beta - vel(^o/s)$
0	20−	30−
1	13 − 7	56 − 26
2	15 − 2	69 − 13
3	19 − 4	78 − 9
4	28 − 9	82 − 4
5	40 − 11	80 − 2

Espacio articular - Espacio cartesiano

Consideremos el robot de la figura, el cual debe desplazar su extremo desde el punto ***A*** *(α=20º, β=30º) al punto* ***B*** *(α=40º, β=80º) con la limitante de que la velocidad máxima articular es de 10 º/s.*

➢ **Supongamos que ahora decidimos que el extremo del robot debe describir una línea recta entre A y B.**

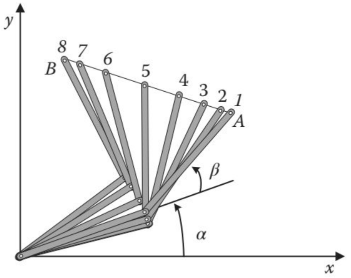
Para esto decidimos partir este camino en 5 tramos de igual longitud, y para cada "nodo" o "punto" determinamos la configuración de las articulaciones correspondiente (cinemática inversa).
Aquí la **velocidad no será constant**e y se **sobrepasa el límite de los actuadores** por lo que no es válido. Además, puede que los actuadores no tengan el par suficiente para imponer la velocidad necesaria casi instantáneamente.



Tiempo (s)	α − vel(º/s)	β − vel(º/s)
0	20−	30−
1	13 − 7	56 − 26
2	15 − 2	69 − 13
3	19 − 4	78 − 9
4	28 − 9	82 − 4
5	40 − 11	80 − 2

Por lo que una alternativa podría ser comenzar y terminar suave. Para esto se divide el trayecto en 7 tramos, pero de menor longitud al comienzo y al final del recorrido, como se esquematiza en la figura.

Donde se aprecia que entre los nodos 3-4 se alcanza el máximo desplazamiento (11° en la articulación β) que deberá ajustarse a la velocidad máxima permitida.



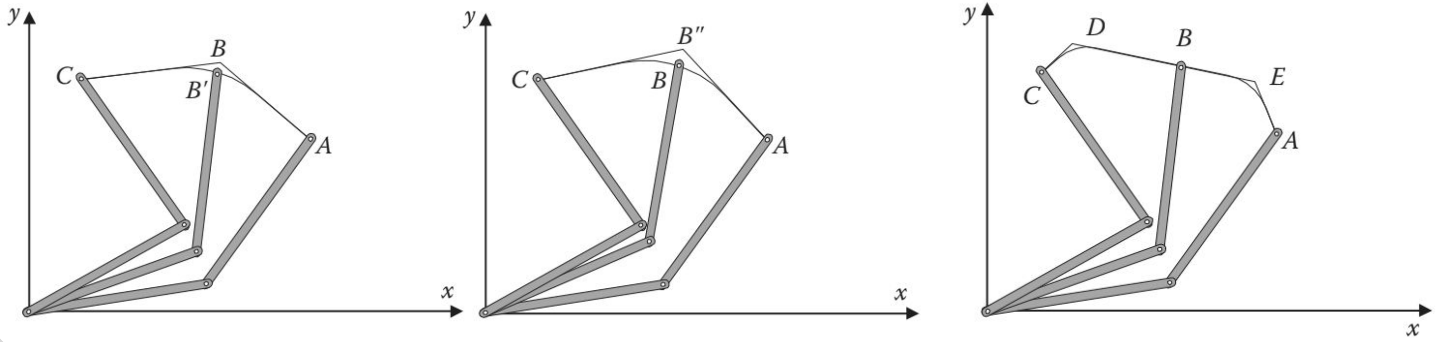
#	α	β
0	20	30
1	16	40
2	15	50
3	13	59
4	18	70
5	28	80
6	35	81
7	40	80

Espacio articular - Espacio cartesiano

*Consideremos el robot de la figura, el cual debe desplazar su extremo desde el punto **A** (α=20º, β=30º) al punto **B** (α=40º, β=80º) con la limitante de que la velocidad máxima articular es de 10 º/s.*

- **Alternativamente** se podrían considerar caminos que **no sean rectos**, por ejemplo una parábola, en ese caso el procedimiento es idéntico, se discretiza el trayecto, y para cada punto de la trayectoria en el espacio cartesiano se determinan las posiciones articulares en el espacio articular.

- **En casos más generales,** se podrían considerar movimientos compuestos, es decir que se deban recorrer **varios puntos intermedios**, y en este caso, la estrategia a utilizar dependerá de la exactitud necesaria al pasar por dichos puntos.



Generación de trayectorias en el espacio articular

Este tipo de generación de trayectorias tiene la ventaja de que se **trabaja localmente** sobre los elementos que generan el movimiento (los actuadores) y por lo tanto el razonamiento resulta directo.

ATENCIÓN: Los actuadores deben ser **capaces de suministrar las aceleraciones y velocidades** requeridas para controlar el movimiento deseado de la articulación.

A continuación se enumeran algunos de los esquemas utilizados para la generación de trayectorias en el espacio articular:

- Interpoladores lineales (**no se recomiendan** por generar trayectorias espasmódicas)
- Interpoladores de tercer orden
- Interpoladores de quinto orden
- Interpoladores trapezoidales (lineal con extremos parabólicos)

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Asumiendo que se conoce la **configuración inicial y la configuración final** a la que se desea llevar la terminal del robot, se puede conocer (a partir de cinemática inversa) la posición inicial y final, de cada articulación.

Además, se deberá imponer la **velocidad en dichos puntos**, que puede ser “reposo” o una velocidad de “paso”.

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Asumiendo que se conoce la **configuración inicial y la configuración final** a la que se desea llevar la terminal del robot, se puede conocer (a partir de cinemática inversa) la posición inicial y final, de cada articulación.

Además, se deberá imponer la **velocidad en dichos puntos**, que puede ser “reposo” o una velocidad de “paso”.

Consideremos una articulación cuya posición y velocidad para el instante inicial y el final son: y deseamos conocer (con el objetivo de controlar) el valor de la posición de esa articulación para cada instante t: [$t_i < t < t_f$].

$$\theta(t_i) = \theta_i \qquad \dot{\theta}(t_i) = 0$$
$$\theta(t_f) = \theta_f \qquad \dot{\theta}(t_f) = 0$$

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

Esto lo podemos conseguir imponiendo una ***trayectoria polinomial de tercer orden*** entre los puntos extremos, de forma que cumplan las condiciones iniciales y finales deseadas.

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Asumiendo que se conoce la **configuración inicial y la configuración final** a la que se desea llevar la terminal del robot, se puede conocer (a partir de cinemática inversa) la posición inicial y final, de cada articulación.

Además, se deberá imponer la **velocidad en dichos puntos**, que puede ser "reposo" o una velocidad de "paso".

Consideremos una articulación cuya posición y velocidad para el instante inicial y el final son:

$$\theta(t_i) = \theta_i \qquad \dot{\theta}(t_i) = 0$$
$$\theta(t_f) = \theta_f \qquad \dot{\theta}(t_f) = 0$$

y deseamos conocer (con el objetivo de controlar) el valor de la posición de esa articulación para cada instante t: $[t_i < t < t_f]$.

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

Esto lo podemos conseguir imponiendo una ***trayectoria polinomial de tercer orden*** entre los puntos extremos, de forma que cumplan las condiciones iniciales y finales deseadas.

$$\begin{cases} \theta(t_i) = c_0 = \theta_i \\ \theta(t_f) = c_0 + c_1 t_f + c_2 t_f^2 + c_3 t_f^3 \\ \dot{\theta}(t_i) = c_1 = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) = c_1 + 2c_2 t_f + 3c_3 t_f^2 = 0 \end{cases}$$

De esta forma se obtienen los valores que debe tomar cada constante del polinomio para cada articulación, de forma de alcanzar el punto deseado mediante el movimiento polinomial de cada articulación.

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

En caso de que alguna de las velocidades deseada no sea cero, simplemente se debe sustituir por el valor correspondiente.

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Ejemplo 1: *Para que el puntero de un robot manipulador realice un movimiento determinado, una articulación debe desplazarse desde su posición de 30º hasta 75º en 5 segundos.*

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Ejemplo 1: *Para que el puntero de un robot manipulador realice un movimiento determinado, una articulación debe desplazarse desde su posición de 30° hasta 75° en 5 segundos.*

Solución:

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado obtenemos las constantes c_0, c_1, c_2 y c_3, que permiten escribir las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración:

$$\begin{cases} \theta(t_i) = c_0 = 30 \\ \theta(t_f) = c_0 + c_1(5) + c_2(5^2) + c_3(5^3) = 75 \\ \dot{\theta}(t_i) = c_1 = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) = c_1 + 2c_2(5) + 3c_3(5^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = 30 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 5.4 \\ c_3 = -0.72 \end{cases}$$

$$\theta(t) = 30 + 5.4t^2 - 0.72t^3$$
$$\dot{\theta}(t) = 10.8t - 2.16t^2$$
$$\ddot{\theta}(t) = 10.8 - 4.32t$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

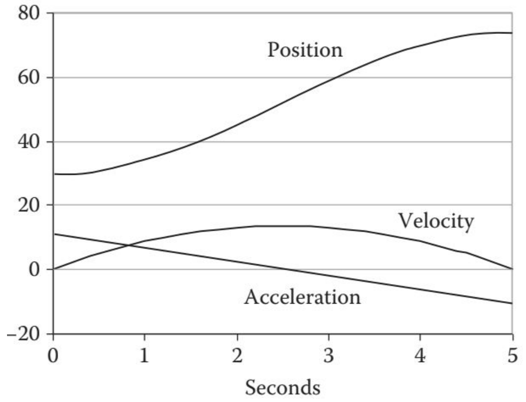
Ejemplo 1: *Para que el puntero de un robot manipulador realice un movimiento determinado, una articulación debe desplazarse desde su posición de 30º hasta 75º en 5 segundos.*

Solución:

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado obtenemos las constantes c_0, c_1, c_2 y c_3, que permiten escribir las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración:

$$\begin{cases} \theta(t_i) = c_0 = 30 \\ \theta(t_f) = c_0 + c_1(5) + c_2(5^2) + c_3(5^3) = 75 \\ \dot{\theta}(t_i) = c_1 = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) = c_1 + 2c_2(5) + 3c_3(5^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = 30 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 5.4 \\ c_3 = -0.72 \end{cases}$$

$$\theta(t) = 30 + 5.4t^2 - 0.72t^3$$
$$\dot{\theta}(t) = 10.8t - 2.16t^2$$
$$\ddot{\theta}(t) = 10.8 - 4.32t$$



Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Ejemplo 2: *Asumamos que debemos continuar el movimiento desde el punto anterior hasta una posición final de 105º en otros 3 segundos más.*

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Ejemplo 2: *Asumamos que debemos continuar el movimiento desde el punto anterior hasta una posición final de 105º en otros 3 segundos más.*

Solución:

Resolviendo nuevamente el sistema de ecuaciones planteado, pero tomando como condiciones iniciales las finales del estado anterior, obtenemos las nuevas constantes c_0, c_1, c_2 y c_3, que permiten escribir las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración para el segundo tramo:

$$\theta_i = 75 \qquad \dot{\theta}_i = 0$$

$$\theta_f = 105 \qquad \dot{\theta}_f = 0$$

$$c_0 = 75 \qquad c_1 = 0 \qquad c_2 = 10 \qquad c_3 = -2.222$$

$$\theta(t) = 75 + 10t^2 - 2.222t^3$$

$$\dot{\theta}(t) = 20t - 6.666t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 20 - 13.332t$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Ejemplo 2: *Asumamos que debemos continuar el movimiento desde el punto anterior hasta una posición final de 105º en otros 3 segundos más.*

Solución:

Resolviendo nuevamente el sistema de ecuaciones planteado, pero tomando como condiciones iniciales las finales del estado anterior, obtenemos las nuevas constantes c_0, c_1, c_2 y c_3, que permiten escribir las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración para el segundo tramo:

$$\theta_i = 75 \qquad \dot{\theta}_i = 0$$

$$\theta_f = 105 \qquad \dot{\theta}_f = 0$$

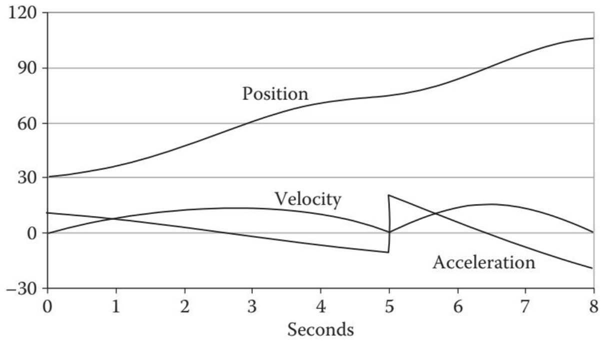
$$c_0 = 75 \qquad c_1 = 0 \qquad c_2 = 10 \qquad c_3 = -2.222$$

$$\theta(t) = 75 + 10t^2 - 2.222t^3$$

$$\dot{\theta}(t) = 20t - 6.666t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 20 - 13.332t$$

Trayectoria de todo el proceso.



Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de tercer orden

Ejemplo 2: *Asumamos que debemos continuar el movimiento desde el punto anterior hasta una posición final de 105º en otros 3 segundos más.*

Solución:

Resolviendo nuevamente el sistema de ecuaciones planteado, pero tomando como condiciones iniciales las finales del estado anterior, obtenemos las nuevas constantes c_0, c_1, c_2 y c_3, que permiten escribir las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración para el segundo tramo:

$$\theta_i = 75 \qquad \dot{\theta}_i = 0$$

$$\theta_f = 105 \qquad \dot{\theta}_f = 0$$

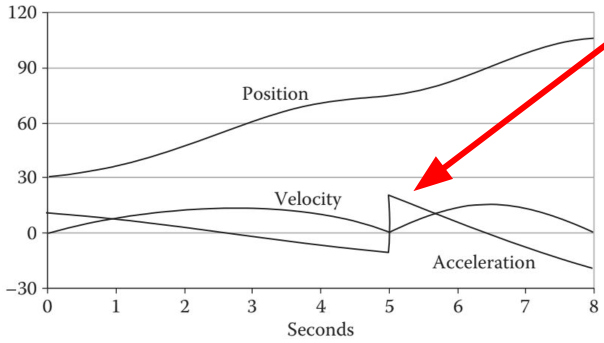
$$c_0 = 75 \qquad c_1 = 0 \qquad c_2 = 10 \qquad c_3 = -2.222$$

$$\theta(t) = 75 + 10t^2 - 2.222t^3$$

$$\dot{\theta}(t) = 20t - 6.666t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 20 - 13.332t$$

Trayectoria de todo el proceso.



Los puntos en los que la velocidad cambia de pendiente se pueden traducir en movimientos espasmódicos en el robot.
Además, en estos puntos se dan las mayores aceleraciones que hay que evaluar en cada caso, si los actuadores son capaces de proporcionar.

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de quinto orden

En el caso donde encontramos que las ***aceleraciones requeridas pueden no ser alcanzables*** por los actuadores que se poseen, o simplemente se desea controlar además, la aceleración durante la trayectoria, limitando sus mínimos, máximos y dándole continuidad, es posible utilizar ***interpoladores de quinto orden***, donde la posición, velocidad y aceleración quedan definidas como sigue:

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de quinto orden

En el caso donde encontramos que las ***aceleraciones requeridas pueden no ser alcanzables*** por los actuadores que se poseen, o simplemente se desea controlar además, la aceleración durante la trayectoria, limitando sus mínimos, máximos y dándole continuidad, es posible utilizar ***interpoladores de quinto orden***, donde la posición, velocidad y aceleración quedan definidas como sigue:

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3$$

Donde como incógnitas se tienen **6 constantes** para cada tramo de trayecto, y por lo tanto se necesitan 6 condiciones para determinar los **coeficientes c_0 a c_5**.

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de quinto orden

En el caso donde encontramos que las ***aceleraciones requeridas pueden no ser alcanzables*** por los actuadores que se poseen, o simplemente se desea controlar además, la aceleración durante la trayectoria, limitando sus mínimos, máximos y dándole continuidad, es posible utilizar ***interpoladores de quinto orden***, donde la posición, velocidad y aceleración quedan definidas como sigue:

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3$$

Donde como incógnitas se tienen **6 constantes** para cada tramo de trayecto, y por lo tanto se necesitan 6 condiciones para determinar los **coeficientes c_0 a c_5.**

Estas por lo general son: las posiciones, velocidades y aceleraciones al comienzo y al final:

$$\theta(t_i) = \theta_i \quad \dot{\theta}(t_i) = 0 \quad \ddot{\theta}(t_i) = \ddot{\theta}_i$$
$$\theta(t_f) = \theta_f \quad \dot{\theta}(t_f) = 0 \quad \ddot{\theta}(t_f) = \ddot{\theta}_f$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de quinto orden

Ejemplo 3: *En el caso del Ejemplo 1 donde una articulación debe rotar desde 30º a 75º en 5 segundos, se le suma como restricción que las aceleraciones inicial y final son 5º/s^2 y -5º/s^2 respectivamente.*

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de quinto orden

Ejemplo 3: *En el caso del Ejemplo 1 donde una articulación debe rotar desde 30º a 75º en 5 segundos, se le suma como restricción que las aceleraciones inicial y final son 5º/s^2 y -5º/s^2 respectivamente.*
(ATENCIÓN: imponer aceleraciones iniciales y finales no es la condición más común)

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de quinto orden

Ejemplo 3: *En el caso del Ejemplo 1 donde una articulación debe rotar desde 30º a 75º en 5 segundos, se le suma como restricción que las aceleraciones inicial y final son 5º/s² y -5º/s² respectivamente.*
(ATENCIÓN: imponer aceleraciones iniciales y finales no es la condición más común)

Solución

Resolviendo el sistema de 6x6 planteado anteriormente con estas 6 condiciones de borde se determinan los 6 coeficientes que permiten que el polinomio de 5º orden cumpla con los requerimientos.

$$\theta_i = 30^\circ \quad \dot{\theta}_i = 0^\circ/\text{sec} \quad \ddot{\theta}_i = 5^\circ/\text{sec}^2$$
$$\theta_f = 75^\circ \quad \dot{\theta}_f = 0^\circ/\text{sec} \quad \ddot{\theta}_f = -5^\circ/\text{sec}^2$$

$$c_0 = 30$$
$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 2.5$$
$$c_3 = 1.6$$
$$c_4 = -0.58$$
$$c_5 = 0.0464$$

Obteniéndose:

$$\theta(t) = 30 + 2.5t^2 + 1.6t^3 - 0.58t^4 + 0.0464t^5$$
$$\dot{\theta}(t) = 5t + 4.8t^2 - 2.32t^3 + 0.232t^4$$
$$\ddot{\theta}(t) = 5 + 9.6t - 6.96t^2 + 0.928t^3$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador de quinto orden

Ejemplo 3: *En el caso del Ejemplo 1 donde una articulación debe rotar desde 30° a 75° en 5 segundos, se le suma como restricción que las aceleraciones inicial y final son 5°/s² y -5°/s² respectivamente.*
(ATENCIÓN: imponer aceleraciones iniciales y finales no es la condición más común)

Solución

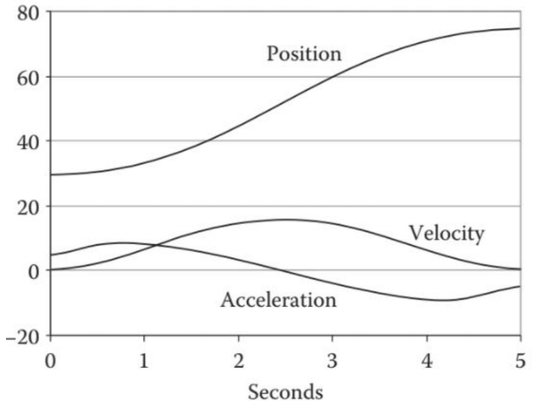
Resolviendo el sistema de 6x6 planteado anteriormente con estas 6 condiciones de borde se determinan los 6 coeficientes que permiten que el polinomio de 5° orden cumpla con los requerimientos.

$$\theta_i = 30^\circ \qquad \dot{\theta}_i = 0^\circ/\text{sec} \qquad \ddot{\theta}_i = 5^\circ/\text{sec}^2$$
$$\theta_f = 75^\circ \qquad \dot{\theta}_f = 0^\circ/\text{sec} \qquad \ddot{\theta}_f = -5^\circ/\text{sec}^2$$

$$c_0 = 30$$
$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 2.5$$
$$c_3 = 1.6$$
$$c_4 = -0.58$$
$$c_5 = 0.0464$$

Obteniéndose:

$$\theta(t) = 30 + 2.5t^2 + 1.6t^3 - 0.58t^4 + 0.0464t^5$$
$$\dot{\theta}(t) = 5t + 4.8t^2 - 2.32t^3 + 0.232t^4$$
$$\ddot{\theta}(t) = 5 + 9.6t - 6.96t^2 + 0.928t^3$$



Generación de trayectorias en el espacio articular

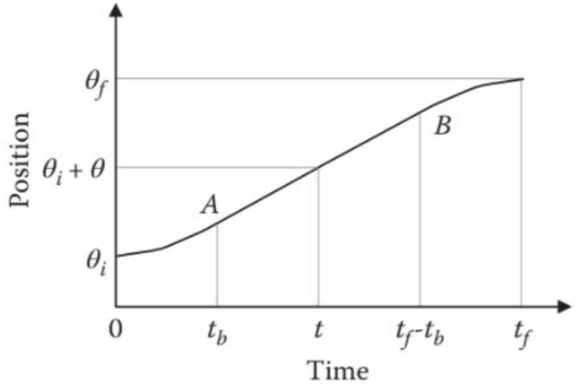
Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

Una alternativa a los polinomios de orden alto (3^{er} o 5^{to}) es usar una ***interpolación lineal*** (polinomio de primer orden) entre el punto de salida y el de llegada, pero como ya vimos, ***no se recomienda*** este tipo de interpolación puesto que implica cambio bruscos de velocidad en los puntos, y altas aceleraciones, provocando movimientos espasmódicos.

Como solución a estos cambios bruscos, se propone ***transformar el polinomio lineal en una parábola*** al comienzo de la trayectoria y próximo al final, creando una curva continua de posición y velocidad. De esta forma, se definirá un t_b que es el "tiempo de combinación" (blending time), luego el movimiento será lineal hasta t_f-t_b donde comenzará nuevamente la misma parábola, pero invertida (siempre que se considere simétrica que es lo usual).

La trayectoria queda definida por una función partida:

$$\theta(t) = \begin{cases} c_{0p} + c_{1p}t + \frac{1}{2}c_{2p}t^2 & \text{si: } t \in \text{ parabola} \\ c_{0L} + c_{1L}t & \text{si: } t \in \text{ lineal} \end{cases}$$

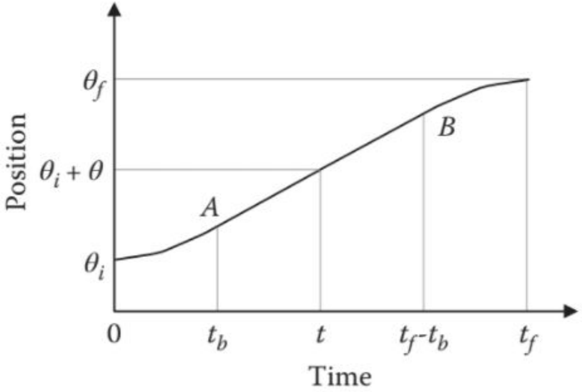


Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

De t=0 a t=t_b tenemos una parábola para la cual deberemos conocer ciertas condiciones para determinarla, por ejemplo: posición inicial, velocidad inicial y **se puede imponer una aceleración (que será constante) como la velocidad de rotación ω que deseo en el tramo constante dividido entre t_b.**

$$\begin{cases} \theta(t_i) = \theta_i \\ \dot{\theta}(t_i) = 0 \\ \ddot{\theta}(t_i) = \omega / t_b \end{cases}$$



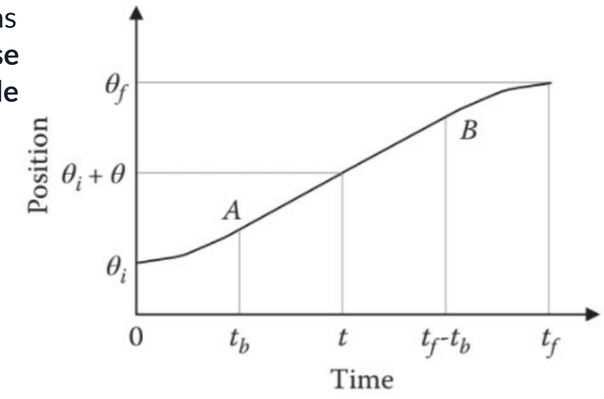
Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

De t=0 a t=t_b tenemos una parábola para la cual deberemos conocer ciertas condiciones para determinarla, por ejemplo: posición inicial, velocidad inicial y **se puede imponer una aceleración (que será constante) como la velocidad de rotación ω que deseo en el tramo constante dividido entre t_b.**

$$\begin{cases} \theta(t_i) = \theta_i \\ \dot{\theta}(t_i) = 0 \\ \ddot{\theta}(t_i) = \omega / t_b \end{cases}$$

Si la art. es prismática $w/t_b = v$
(v: velocidad lineal que se desea en el tramo lineal)



Generación de trayectorias en el espacio articular

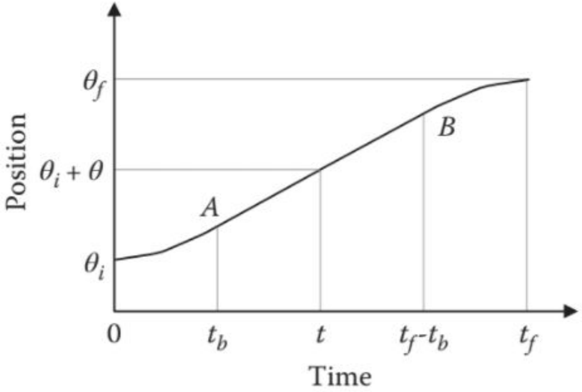
Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

De t=0 a t=t_b tenemos una parábola para la cual deberemos conocer ciertas condiciones para determinarla, por ejemplo: posición inicial, velocidad inicial y **se puede imponer una aceleración (que será constante) como la velocidad de rotación ω que deseo en el tramo constante dividido entre t_b.**

$$\begin{cases} \theta(t_i) = \theta_i \\ \dot{\theta}(t_i) = 0 \\ \ddot{\theta}(t_i) = \omega / t_b \end{cases}$$

De aquí se obtiene que para la zona parabólica (t<t_b):

$$\boxed{\begin{gathered} \theta(t) = \theta_i + \frac{\omega}{2t_b} t^2 \\ \dot{\theta}(t) = (\omega / tb) t \\ \ddot{\theta}(t) = \omega / t_b \end{gathered}}$$

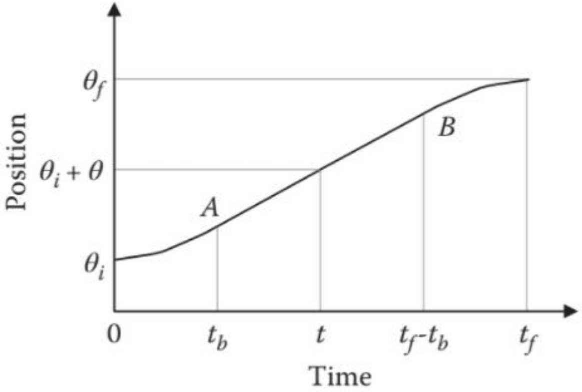


Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

De t=0 a t=t_b tenemos una parábola para la cual deberemos conocer ciertas condiciones para determinarla, por ejemplo: posición inicial, velocidad inicial y **se puede imponer una aceleración (que será constante) como la velocidad de rotación ω que deseo en el tramo constante dividido entre t_b.**

$$\begin{cases} \theta(t_i) = \theta_i \\ \dot{\theta}(t_i) = 0 \\ \ddot{\theta}(t_i) = \omega / t_b \end{cases}$$



De aquí se obtiene que para la zona parabólica (t<t_b):

$$\boxed{\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_i + \frac{\omega}{2t_b} t^2 \\ \dot{\theta}(t) &= (\omega / tb) t \\ \ddot{\theta}(t) &= \omega / t_b \end{aligned}}$$

Luego para determinar la trayectoria en la zona lineal se deberá igualar la expresión de la posición y de la velocidad de ambas zonas en A, para que sean continuas:

$$\dot{\theta}_p(t_b) = \dot{\theta}_L(t_b)$$

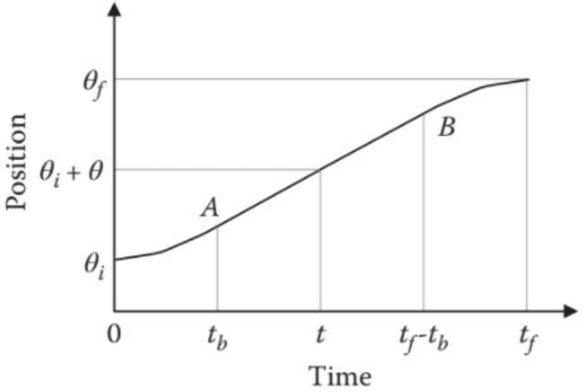
$$\frac{\omega}{t_b} t_b = \omega = c_{1L}$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

De t=0 a t=t_b tenemos una parábola para la cual deberemos conocer ciertas condiciones para determinarla, por ejemplo: posición inicial, velocidad inicial y **se puede imponer una aceleración (que será constante) como la velocidad de rotación ω que deseo en el tramo constante dividido entre t_b.**

$$\begin{cases} \theta(t_i) = \theta_i \\ \dot{\theta}(t_i) = 0 \\ \ddot{\theta}(t_i) = \omega / t_b \end{cases}$$



De aquí se obtiene que para la zona parabólica (t<t_b):

$$\boxed{\begin{gathered} \theta(t) = \theta_i + \frac{\omega}{2t_b} t^2 \\ \dot{\theta}(t) = (\omega / tb) t \\ \ddot{\theta}(t) = \omega / t_b \end{gathered}}$$

Luego para determinar la trayectoria en la zona lineal se deberá igualar la expresión de la posición y de la velocidad de ambas zonas en A, para que sean continuas:

$$\dot{\theta}_p(t_b) = \dot{\theta}_L(t_b) \qquad \theta_p(t_b) = \theta_L(t_b)$$

$$\frac{\omega}{t_b} t_b = \omega = c_{1L} \longrightarrow \theta_i + \frac{\omega}{2t_b} t_b^2 = c_{0L} + c_{1L} t_b$$

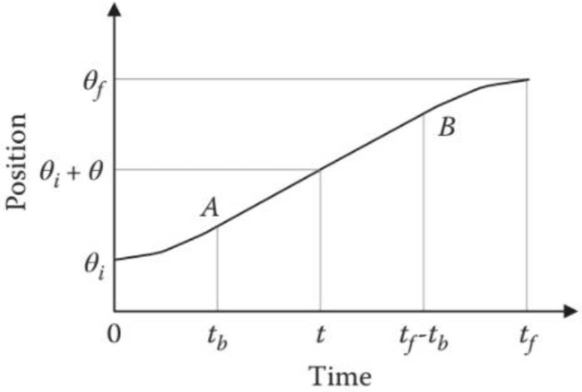
$$c_{0L} = \theta_i - \frac{w}{2} t_b$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

De t=0 a $t=t_b$ tenemos una parábola para la cual deberemos conocer ciertas condiciones para determinarla, por ejemplo: posición inicial, velocidad inicial y **se puede imponer una aceleración (que será constante) como la velocidad de rotación ω que deseo en el tramo constante dividido entre t_b.**

$$\begin{cases} \theta(t_i) = \theta_i \\ \dot{\theta}(t_i) = 0 \\ \ddot{\theta}(t_i) = \omega / t_b \end{cases}$$



De aquí se obtiene que para la zona parabólica ($t<t_b$):

$$\boxed{\begin{gathered} \theta(t) = \theta_i + \frac{\omega}{2t_b} t^2 \\ \dot{\theta}(t) = (\omega / tb) t \\ \ddot{\theta}(t) = \omega / t_b \end{gathered}}$$

Luego para determinar la trayectoria en la zona lineal se deberá igualar la expresión de la posición y de la velocidad de ambas zonas en A, para que sean continuas:

$$\dot{\theta}_p(t_b) = \dot{\theta}_L(t_b)$$

$$\theta_p(t_b) = \theta_L(t_b)$$

$$\frac{\omega}{t_b} t_b = \omega = c_{1L} \longrightarrow \theta_i + \frac{\omega}{2t_b} t_b^2 = c_{0L} + c_{1L} t_b$$

$$c_{0L} = \theta_i - \frac{w}{2} t_b$$

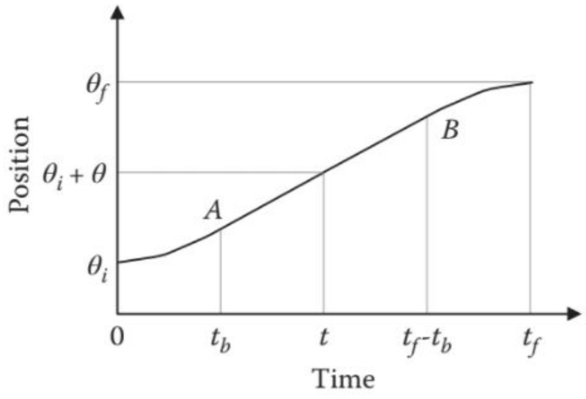
En la zona lineal:

$$\boxed{\begin{gathered} \theta(t) = \theta_i - \frac{\omega}{2} t_b + \omega t \\ \dot{\theta}(t) = w \\ \ddot{\theta}(t) = 0 \end{gathered}}$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

La parábola final es simétrica a la primera, pero con una aceleración negativa.



Generación de trayectorias en el espacio articular

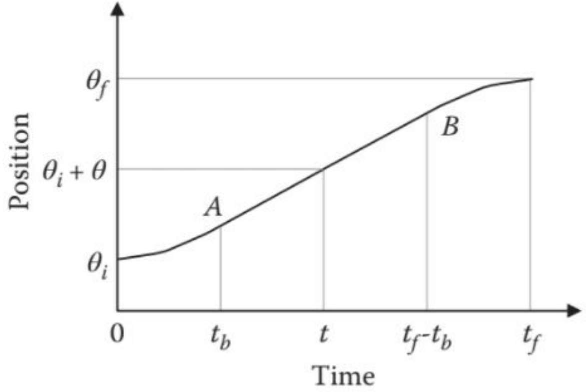
Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

La parábola final es simétrica a la primera, pero con una aceleración negativa.

Entonces la parábola final (de t=t_f-t_b a t=t_f)

puede expresarse de la siguiente forma:

$$\theta(t) = \theta_f - \frac{\omega}{2t_b}(t_f - t)^2$$
$$\dot{\theta}(t) = \frac{\omega}{t_b}(t_f - t)$$
$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{\omega}{t_b}$$



Generación de trayectorias en el espacio articular

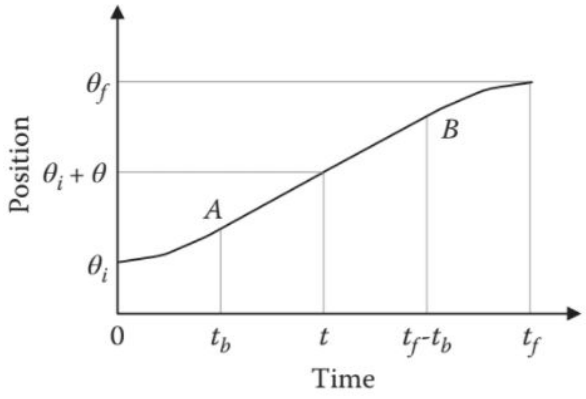
Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

La parábola final es simétrica a la primera, pero con una aceleración negativa.

Entonces la parábola final (de $t=t_f-t_b$ a $t=t_f$)

puede expresarse de la siguiente forma:

$$\theta(t) = \theta_f - \frac{\omega}{2t_b}(t_f - t)^2$$
$$\dot{\theta}(t) = \frac{\omega}{t_b}(t_f - t)$$
$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{\omega}{t_b}$$



ATENCIÓN: Para la velocidad de viaje "ω" conocida existe solo un tiempo de combinación t_b (o no existe!) que verifica que la velocidad en los puntos de intersección sean la misma para las parábolas como para la zona lineal y que alcance el punto requerido en el tiempo determinado.

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega}$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

Ejemplo 4: *Una de las articulaciones de un robot necesita moverse desde la posición de 30º hasta la correspondiente a 70º en 5 segundos y con una velocidad en la zona lineal de 10º/s. Determine el tiempo de duración de la parábola y grafique posición, velocidad y aceleración.*

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

Ejemplo 4: *Una de las articulaciones de un robot necesita moverse desde la posición de 30º hasta la correspondiente a 70º en 5 segundos y con una velocidad en la zona lineal de 10º/s. Determine el tiempo de duración de la parábola y grafique posición, velocidad y aceleración.*

Solución

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega} = \frac{30 - 70 + 10.5}{10} = 1s$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

Ejemplo 4: *Una de las articulaciones de un robot necesita moverse desde la posición de 30º hasta la correspondiente a 70º en 5 segundos y con una velocidad en la zona lineal de 10º/s. Determine el tiempo de duración de la parábola y grafique posición, velocidad y aceleración.*

Solución

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega} = \frac{30 - 70 + 10.5}{10} = 1s$$

para 0<t<1

$$\begin{cases} \theta = 30 + 5t^2 \\ \dot{\theta} = 10t \\ \ddot{\theta} = 10 \end{cases}$$

para 1<t<4

$$\begin{cases} \theta = \theta_A + 10(t-1) \\ \dot{\theta} = 10 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

para 4<t<5

$$\begin{cases} \theta = 70-5(5-t)^2 \\ \dot{\theta} = 10(5-t) \\ \ddot{\theta} = -10 \end{cases}$$

Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

Ejemplo 4: *Una de las articulaciones de un robot necesita moverse desde la posición de 30º hasta la correspondiente a 70º en 5 segundos y con una velocidad en la zona lineal de 10º/s. Determine el tiempo de duración de la parábola y grafique posición, velocidad y aceleración.*

Solución

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega} = \frac{30 - 70 + 10.5}{10} = 1s$$

para 0<t<1

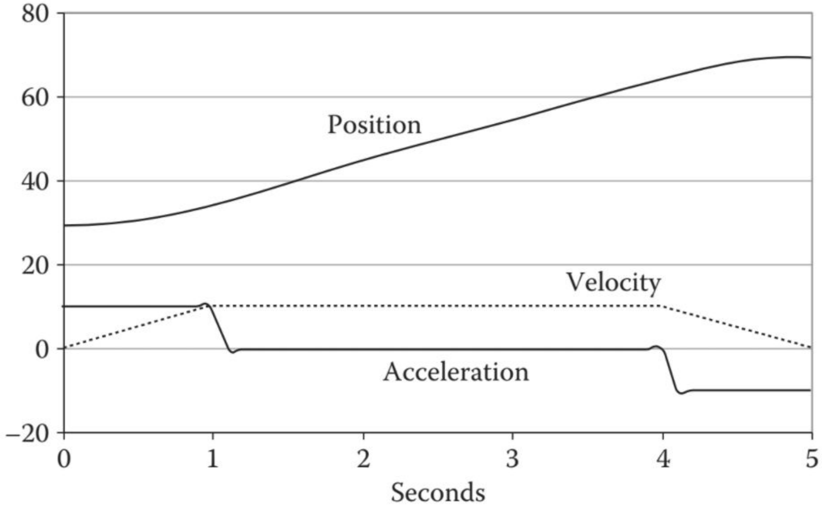
$$\begin{cases} \theta = 30 + 5t^2 \\ \dot{\theta} = 10t \\ \ddot{\theta} = 10 \end{cases}$$

para 1<t<4

$$\begin{cases} \theta = \theta_A + 10(t-1) \\ \dot{\theta} = 10 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

para 4<t<5

$$\begin{cases} \theta = 70-5(5-t)^2 \\ \dot{\theta} = 10(5-t) \\ \ddot{\theta} = -10 \end{cases}$$



Generación de trayectorias en el espacio articular

Interpolador trapezoidal (lineal con extremos parabólicos)

Ejemplo 4: *Una de las articulaciones de un robot necesita moverse desde la posición de 30º hasta la correspondiente a 70º en 5 segundos y con una velocidad en la zona lineal de 10º/s. Determine el tiempo de duración de la parábola y grafique posición, velocidad y aceleración.*

Solución

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega} = \frac{30 - 70 + 10.5}{10} = 1s$$

para 0<t<1

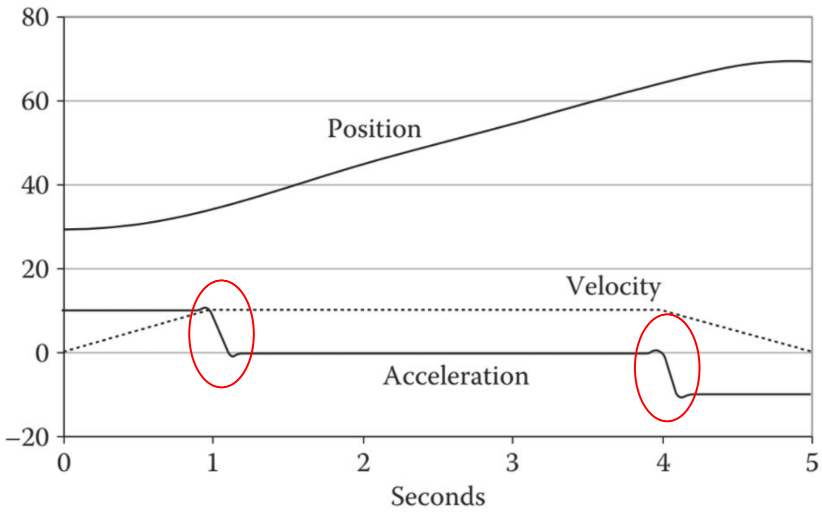
$$\begin{cases} \theta = 30 + 5t^2 \\ \dot{\theta} = 10t \\ \ddot{\theta} = 10 \end{cases}$$

para 1<t<4

$$\begin{cases} \theta = \theta_A + 10(t-1) \\ \dot{\theta} = 10 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

para 4<t<5

$$\begin{cases} \theta = 70 - 5(5-t)^2 \\ \dot{\theta} = 10(5-t) \\ \ddot{\theta} = -10 \end{cases}$$



Generación de trayectorias en el espacio cartesiano

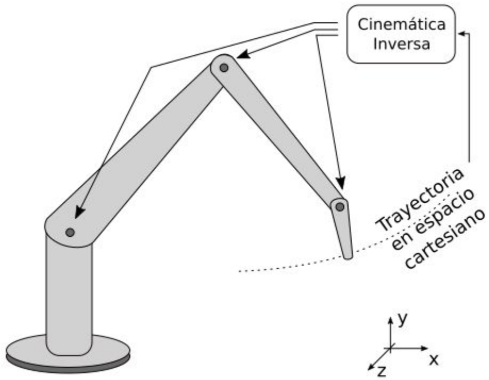
Como se comentó anteriormente, el ***espacio cartesiano*** expresa el movimiento del robot relativo al sistema de referencia cartesiano global (fijo en algún punto del laboratorio), expresando la posición y la orientación de la terminal del robot.

Las ***trayectorias en línea recta***, son por excelencia las más utilizadas, sin embargo pueden usarse cualquier otro tipo de generador de trayectorias, de hecho, todas aquellas que se vieron para el espacio articular aplican para representar el movimiento de la terminal.

La principal diferencia entre ambas definiciones es que al utilizar el espacio cartesiano, se deben ***utilizar repetidamente las ecuaciones de la cinemática inversa*** para determinar el valor de la variable articular a imponer en cada actuador del robot.

Este procedimiento repetitivo puede ser simplificado con un loop computacional
Asumiendo conocidas todas las variables en el tiempo t:

1. Incrementar el tiempo: $t=t+\Delta t$
2. Calcular posición y orientación de la terminal en el sistema global, basado en la función de trayectoria seleccionada
3. Calcular los valores articulares para el punto 2 a través de cinemática inversa
4. Enviar la información al controlador
5. Volver al punto 1.



Generación de trayectorias en el espacio cartesiano

Ejemplo 5: *Un robot plano de 2-DOF debe seguir una línea recta entre el punto (3,10) y el punto (8,14). Determinar los valores de cada articulación si el camino es dividido en 10 segmentos iguales y cada eslabón mide 9”.*

Generación de trayectorias en el espacio cartesiano

Ejemplo 5: *Un robot plano de 2-DOF debe seguir una línea recta entre el punto (3,10) y el punto (8,14). Determinar los valores de cada articulación si el camino es dividido en 10 segmentos iguales y cada eslabón mide 9".*

Solución: Para que la terminal se desplace en línea recta debe avanzar siempre la misma distancia en la misma cantidad de tiempo y la relación entre lo que avanza en la dirección "x" y la dirección "y" debe mantenerse.

En la dirección x: (8-3)/10=0,5 → Entonces se avanza 0,5 en cada tramo en la dirección x
En la dirección y: (14-10)/10=0,4 → Entonces se avanza 0,4 en cada tramo en la dirección y

Generación de trayectorias en el espacio cartesiano

Ejemplo 5: *Un robot plano de 2-DOF debe seguir una línea recta entre el punto (3,10) y el punto (8,14). Determinar los valores de cada articulación si el camino es dividido en 10 segmentos iguales y cada eslabón mide 9".*

Solución: Para que la terminal se desplace en línea recta debe avanzar siempre la misma distancia en la misma cantidad de tiempo y la relación entre lo que avanza en la dirección "x" y la dirección "y" debe mantenerse.

En la dirección x: (8-3)/10=0,5 → Entonces se avanza 0,5 en cada tramo en la dirección x
En la dirección y: (14-10)/10=0,4 → Entonces se avanza 0,4 en cada tramo en la dirección y

#	x	y
1	3	10
2	3.5	10.4
3	4	10.8
4	4.5	11.2
5	5	11.6
6	5.5	12
7	6	12.4
8	6.5	12.8
9	7	13.2
10	7.5	13.6
11	8	14

Generación de trayectorias en el espacio cartesiano

Ejemplo 5: *Un robot plano de 2-DOF debe seguir una línea recta entre el punto (3,10) y el punto (8,14). Determinar los valores de cada articulación si el camino es dividido en 10 segmentos iguales y cada eslabón mide 9”.*

Solución: Para que la terminal se desplace en línea recta debe avanzar siempre la misma distancia en la misma cantidad de tiempo y la relación entre lo que avanza en la dirección “x” y la dirección “y” debe mantenerse.

En la dirección x: (8-3)/10=0,5 → Entonces se avanza 0,5 en cada tramo en la dirección x
En la dirección y: (14-10)/10=0,4 → Entonces se avanza 0,4 en cada tramo en la dirección y

#	x	y
1	3	10
2	3.5	10.4
3	4	10.8
4	4.5	11.2
5	5	11.6
6	5.5	12
7	6	12.4
8	6.5	12.8
9	7	13.2
10	7.5	13.6
11	8	14

Cinemática Inversa →

θ_1	θ_2
18.8	109
19	104.0
19.5	100.4
20.2	95.8
21.3	90.9
22.5	85.7
24.1	80.1
26	74.2
28.2	67.8
30.8	60.7
33.9	52.8

Generación de trayectorias en el espacio cartesiano

Ejemplo 5: *Un robot plano de 2-DOF debe seguir una línea recta entre el punto (3,10) y el punto (8,14). Determinar los valores de cada articulación si el camino es dividido en 10 segmentos iguales y cada eslabón mide 9".*

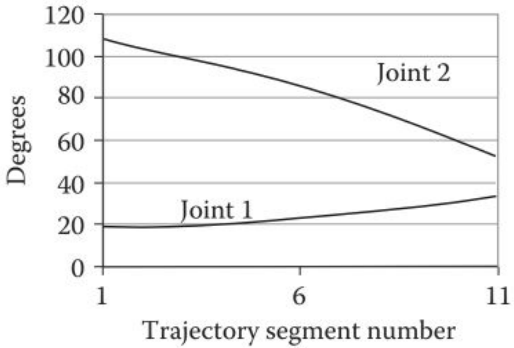
Solución: Para que la terminal se desplace en línea recta debe avanzar siempre la misma distancia en la misma cantidad de tiempo y la relación entre lo que avanza en la dirección "x" y la dirección "y" debe mantenerse.

En la dirección x: (8-3)/10=0,5 → Entonces se avanza 0,5 en cada tramo en la dirección x
En la dirección y: (14-10)/10=0,4 → Entonces se avanza 0,4 en cada tramo en la dirección y

#	x	y
1	3	10
2	3.5	10.4
3	4	10.8
4	4.5	11.2
5	5	11.6
6	5.5	12
7	6	12.4
8	6.5	12.8
9	7	13.2
10	7.5	13.6
11	8	14

Cinemática Inversa →

θ_1	θ_2
18.8	109
19	104.0
19.5	100.4
20.2	95.8
21.3	90.9
22.5	85.7
24.1	80.1
26	74.2
28.2	67.8
30.8	60.7
33.9	52.8



Grabación de trayectorias continuas

En algunas operaciones, como la pintura por pulverización y el desbarbado, los movimientos necesarios para realizar una tarea pueden ser demasiado complicados o demasiado intrincados para ser generados por líneas rectas u otros polinomios de orden superior. En cambio, es posible enseñarle al robot cómo moverse, registrar los movimientos y luego reproducirlos y ejecutarlos. Para hacer esto, imagine que un operador puede mover un robot de la misma manera que se requiere para realizar una tarea en tiempo real. Esto se puede hacer soltando los frenos de las articulaciones y moviendo físicamente el robot, o moviendo las articulaciones de un modelo de robot que es similar al real pero es mucho más liviano y se puede mover fácilmente.

Obviamente, esta técnica es simple y requiere poca programación o cálculos. Sin embargo, todos los movimientos deben realizarse, muestrearse y grabarse con precisión para una reproducción precisa. Además, cada vez que sea necesario cambiar una parte del movimiento, el robot debe programarse nuevamente. Esto es particularmente difícil para robots grandes y pesados, especialmente si son más grandes que un operador humano.

FIN!

El domingo es la fecha límite para la entrega 2 del avance del proyecto!