UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY
FACULTAD DE INGENIERIA
IIMPI INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

Cinemática Diferencial

Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2025

Introducción

La ***cinemática diferencial*** estudia la relación entre la velocidad de las articulaciones y la correspondiente velocidad (lineal y angular) del actuador.

Esta relación está descrita por una matriz, llamada ***Matriz Jacobiana***, que depende de la configuración del manipulador.

Esta representación matemática es interesante porque tiene varias ventajas:

- Permite ubicar **singularidades**
- Ayuda a la creación de algoritmos para determinar la **cinemática inversa**
- Describe la **relación entre las fuerzas** aplicadas en la herramienta y los torques resultantes en las juntas

Jacobiano - Diferenciación directa

Si se conoce la cinemática directa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{q}) \end{Bmatrix}$$

Jacobiano - Diferenciación directa

Si se conoce la cinemática directa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{q}) \end{Bmatrix}$$

Por la regla de la cadena:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

Jacobiano - Diferenciación directa

Si se conoce la cinemática directa:
$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{q}) \end{Bmatrix}$$

Por la regla de la cadena:
$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

Recordando la definición del Jacobiano:
$$\Rightarrow J = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

(Relación entre las velocidades de las articulaciones y las de la terminal)

Jacobiano - Diferenciación directa

Si se conoce la cinemática directa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{q}) \end{Bmatrix}$$

Por la regla de la cadena:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

Recordando la definición del Jacobiano:

$$\Rightarrow J = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Jacobiano - Diferenciación directa

Si se conoce la cinemática directa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{q}) \end{Bmatrix}$$

Por la regla de la cadena:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

Recordando la definición del Jacobiano:

$$\Rightarrow J = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

J: Matriz de mxn

- m: dimensiones de representación del estado de la herramienta
- n: GDL del robot

Jacobiano - Diferenciación directa

Si se conoce la cinemática directa: $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{q}) \end{Bmatrix}$

Por la regla de la cadena: $\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$

Recordando la definición del Jacobiano: $\Rightarrow J = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_n} \end{pmatrix}$

Calcular el Jacobiano así no es sencillo porque existen muchas formas de representar la posición y el **J** depende de la representación.

Además, analizar el resultado que se obtiene de esta forma no es fácil, porque mezcla efectos cinemáticos con los efectos de la representación

J: Matriz de mxn

- m: dimensiones de representación del estado de la herramienta
- n: GDL del robot

Introducción

Dado que existen diferentes formas de expresar las velocidades de la terminal (diferentes representaciones) existen diferentes métodos de obtención de la matriz Jacobiana que además difieren entre ellas:

Matriz Jacobiana geométrica (J):
Es aquella que se obtiene cuando las velocidades de la terminal se expresan con los vectores de velocidad lineal y angular [v_x v_y v_z w_x w_y w_z] con los que se mueve el extremo escritos en un sistema de referencia determinado (por lo general el $\mathbf{S_0}$):
(BÁSICA)

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana analítica (J_a):
Es aquella que se obtiene cuando las velocidades de la terminal se expresan a partir de Los **ángulos de Euler:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_a \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

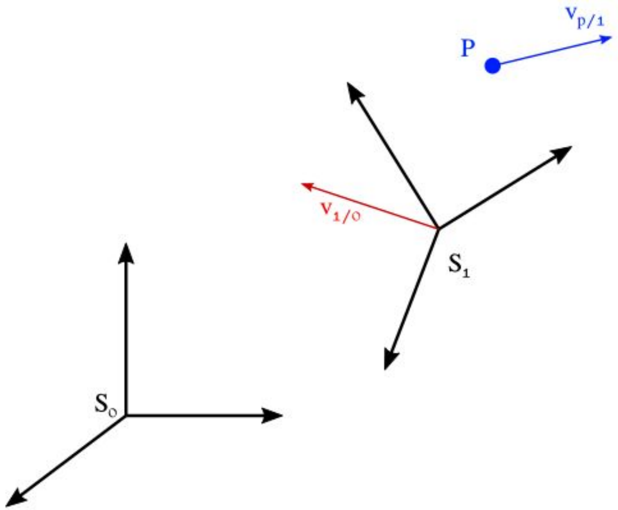
Cualquier otro Jacobiano obtenido a partir de la representación diferente del estado de la herramienta puede ser relacionada con la matriz básica a partir de dos matrices de 3x3 que es solo función de la representación:

$$\dot{\mathbf{X}}_P = E_P(\mathbf{X}_P)\mathbf{V} \qquad \dot{\mathbf{X}}_O = E_O(\mathbf{X}_O)\omega$$

Propagación de velocidades - Lineal

Consideremos que:

- se tienen dos sistemas $\mathbf{S_0}$ y $\mathbf{S_1}$.
- $\mathbf{S_1}$ se mueve con respecto a $\mathbf{S_0}$ a una velocidad $\mathbf{v_{1/0}}$
- Existe un punto **P** que se mueve con respecto a $\mathbf{S_1}$ a una velocidad $\mathbf{v_{p/1}}$
- Cual es la velocidad de **P** con respecto a $\mathbf{S_0}$?

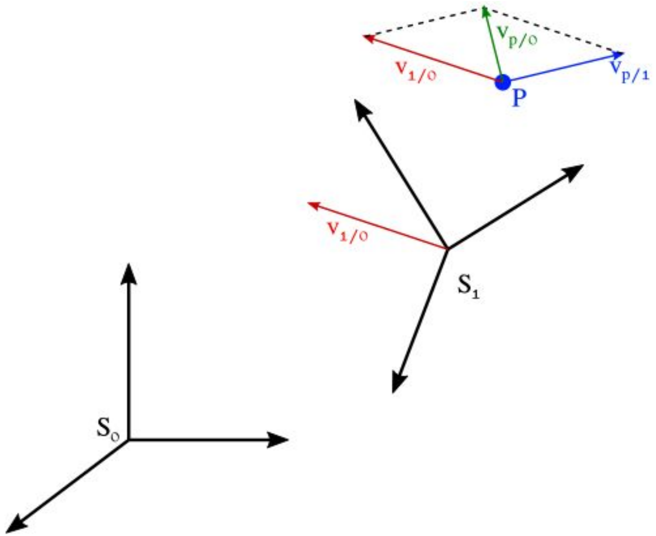


Propagación de velocidades - Lineal

Consideremos que:

- se tienen dos sistemas $\mathbf{S_0}$ y $\mathbf{S_1}$.
- $\mathbf{S_1}$ se mueve con respecto a $\mathbf{S_0}$ a una velocidad $\mathbf{v_{1/0}}$
- Existe un punto **P** que se mueve con respecto a $\mathbf{S_1}$ a una velocidad $\mathbf{v_{p/1}}$
- Cual es la velocidad de **P** con respecto a $\mathbf{S_0}$?

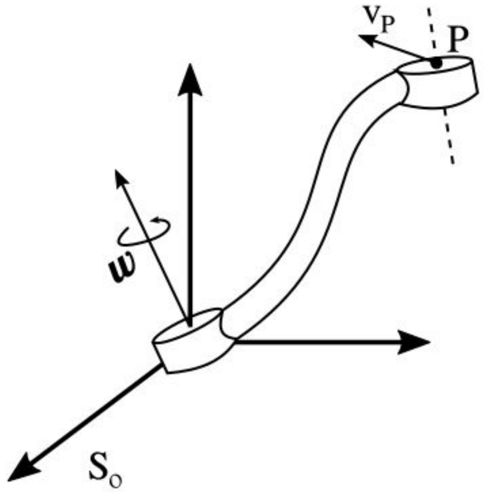
$$V_{p/0} = V_{1/0} + V_{p/1}$$



Propagación de velocidades - Angular

Consideremos que:

- Se tiene un sistema **S_0 fijo.**
- Un rígido que se mueve con una velocidad angular ***w***
- Existe un punto **P** que es solidario al rigido.
- SI **v_p** es la velocidad de **P** con respecto a **$S_{0,}$** Como se calcula?

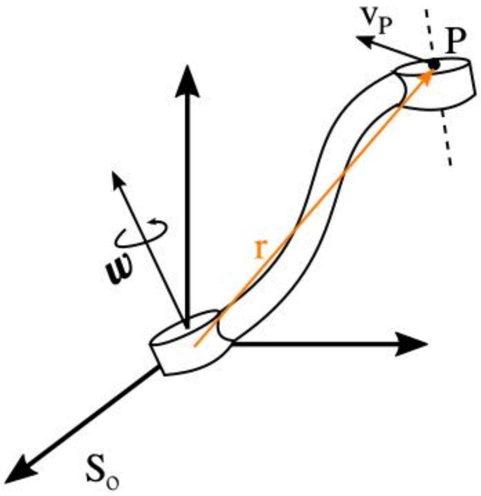


Propagación de velocidades - Angular

Consideremos que:

- Se tiene un sistema $\mathbf{S_0}$ **fijo.**
- Un rígido que se mueve con una velocidad angular ***w***
- Existe un punto **P** que es solidario al rigido.
- SI $\mathbf{v_p}$ es la velocidad de **P** con respecto a $\mathbf{S_{0,}}$ Como se calcula?

$\boldsymbol{V_p} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ → Producto cruzado $\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$

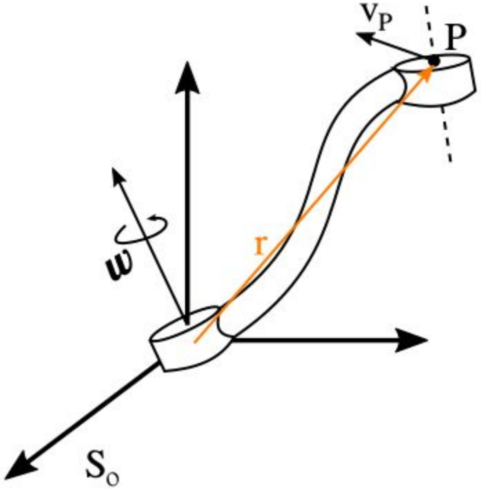


Propagación de velocidades - Angular

Consideremos que:

- Se tiene un sistema **S_0 fijo.**
- Un rígido que se mueve con una velocidad angular ***w***
- Existe un punto **P** que es solidario al rigido.
- SI **v_p** es la velocidad de **P** con respecto a **S_0,** Como se calcula?

V_p* = *w* x *r $\rightarrow$ Producto cruzado $\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\end{bmatrix}$



Para simplificar y trabajar con el producto típico de matrices se incorpora la siguiente transformación:

Operador de producto cruzado:

$$a = \begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix} \Rightarrow \hat{a} = \begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}$$

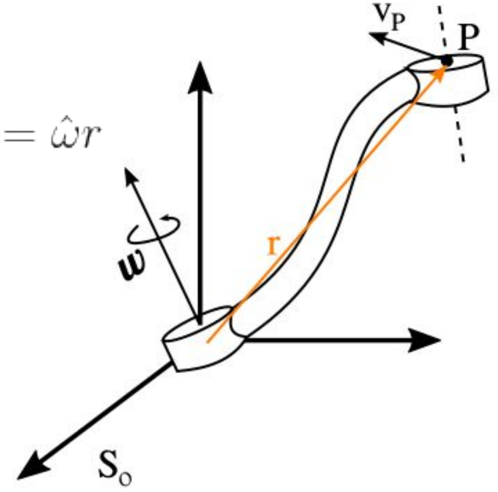
Propagación de velocidades - Angular

Consideremos que:

- Se tiene un sistema $\mathbf{S_0}$ **fijo.**
- Un rígido que se mueve con una velocidad angular ***w***
- Existe un punto **P** que es solidario al rigido.
- SI $\mathbf{v_p}$ es la velocidad de **P** con respecto a $\mathbf{S_{0,}}$ Como se calcula?

$\boldsymbol{V_p = w \times r}$ → Producto cruzado

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \rightarrow V_p = \omega \times r = \hat{\omega} r$$



Para simplificar y trabajar con el producto típico de matrices se incorpora la siguiente transformación:

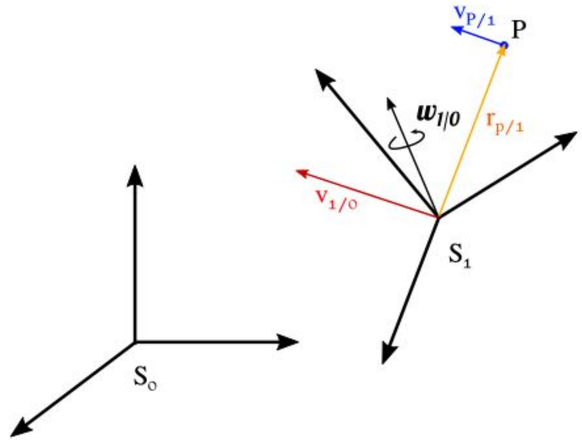
Operador de producto cruzado:

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Propagación de velocidades - Lineal + Angular

Consideremos que:

- Se tienen dos sistemas $\mathbf{S_0}$ y $\mathbf{S_1}$.
- $\mathbf{S_1}$ se mueve con respecto a $\mathbf{S_0}$ a una velocidad lineal $\boldsymbol{v_{1/0}}$ y angular $\boldsymbol{w_{1/0}}$
- Existe un punto **P** que se mueve con respecto a $\mathbf{S_1}$ a una velocidad $\mathbf{v_{p/1}}$
- Cual es la velocidad de **P** con respecto a $\mathbf{S_0}$?

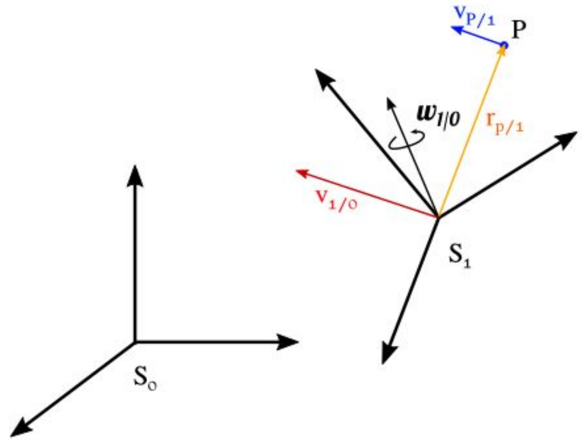


Propagación de velocidades - Lineal + Angular

Consideremos que:

- Se tienen dos sistemas **S_0** y **S_1**.
- **S_1** se mueve con respecto a **S_0** a una velocidad lineal ***$v_{1/0}$*** y angular ***$w_{1/0}$***
- Existe un punto **P** que se mueve con respecto a **S_1** a una velocidad **$v_{p/1}$**
- Cual es la velocidad de **P** con respecto a **S_0**?

$$V_p = v_{1/0} + v_{p/1} + w_{1/0} \times r_{p/1}$$

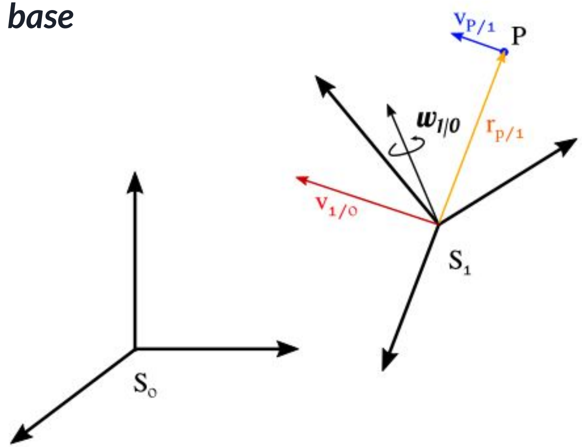


Propagación de velocidades - Lineal + Angular

Consideremos que:

- Se tienen dos sistemas **S_0 y S_1**.
- **S_1** se mueve con respecto a **S_0** a una velocidad lineal ***$v_{1/0}$*** y angular ***$w_{1/0}$***
- Existe un punto **P** que se mueve con respecto a **S_1** a una velocidad **$v_{p/1}$**
- Cual es la velocidad de **P** con respecto a **S_0?**

$V_p = v_{1/0} + v_{p/1} + w_{1/0} \times r_{p/1}$ ⟶ ***CUIDADO! Todo expresado en la misma base***



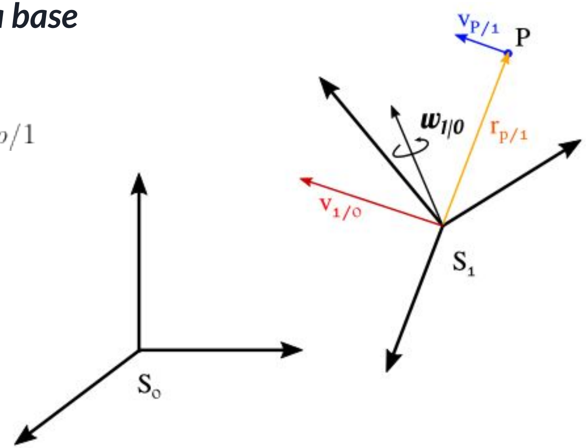
Propagación de velocidades - Lineal + Angular

Consideremos que:

- Se tienen dos sistemas **S_0 y S_1**.
- **S_1** se mueve con respecto a **S_0** a una velocidad lineal ***$v_{1/0}$*** y angular ***$w_{1/0}$***
- Existe un punto **P** que se mueve con respecto a **S_1** a una velocidad **$v_{p/1}$**
- Cual es la velocidad de **P** con respecto a **S_0?**

$V_p = v_{1/0} + v_{p/1} + w_{1/0} \times r_{p/1} \longrightarrow$ ***CUIDADO! Todo expresado en la misma base***

$$_0V_p = \; _0v_{1/0} + \; _0v_{p/1} + \; _0w_{1/0} \times \; _0r_{p/1} = \; _0v_{1/0} + \; _0R_1 \; _1v_{p/1} + \; _0w_{1/0} \times \; _0R_1 \; _1r_{p/1}$$

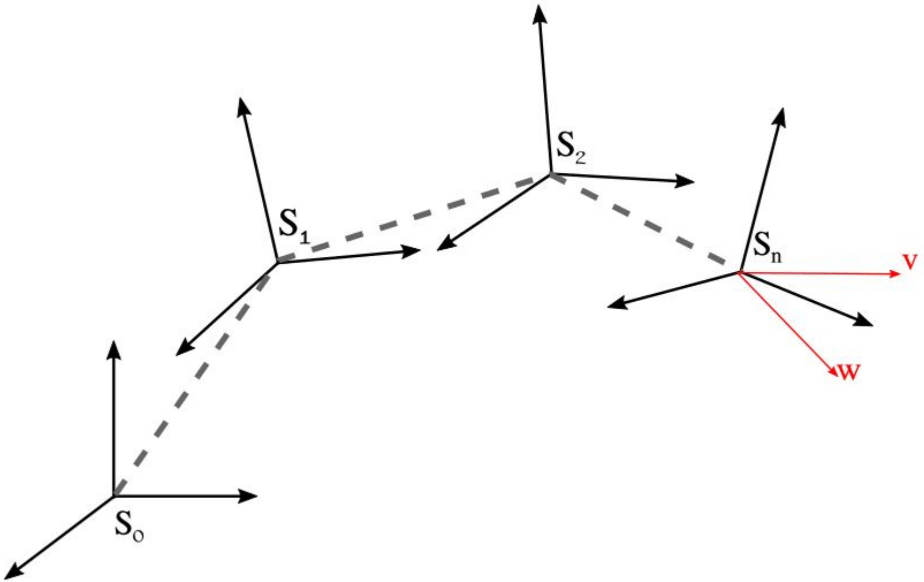


Propagación de velocidades - Mecanismo espacial

Consideremos una serie de sistemas de referencia extraídos de un manipulador robótico cualquiera.

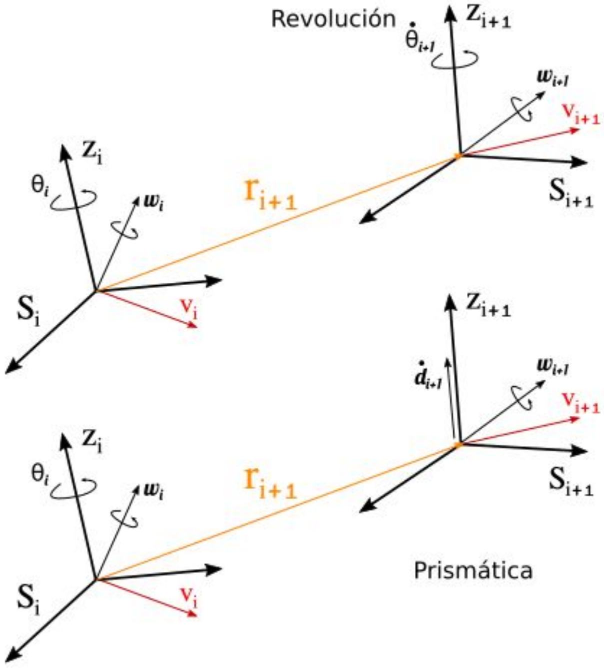
La idea es partir del eslabón 0 e ir construyendo las velocidades del eslabón siguiente, a partir de la geometría y de las velocidades angulares de los sistemas que están dadas por las velocidades articulares, hasta obtener ***v*** y ***w***.

Recordar que los manipuladores solo tienen un grado de libertad por cada sistema de referencia!!



Propagación de velocidades - Mecanismo espacial

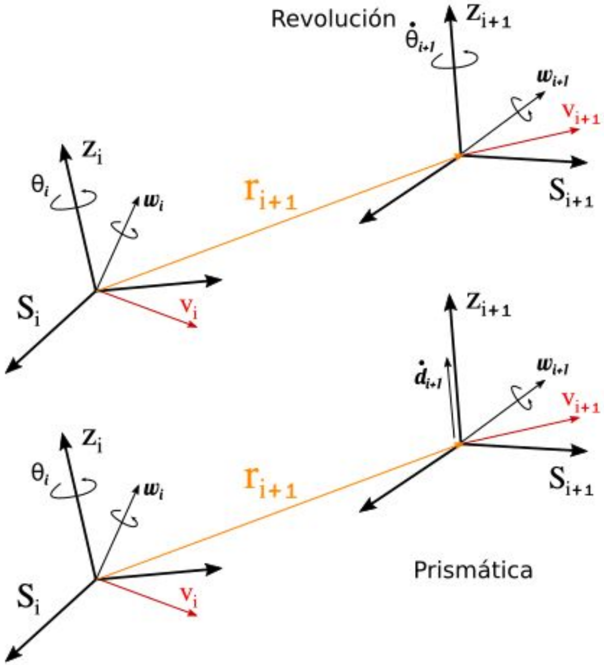
Consideremos dos eslabones consecutivos:



Propagación de velocidades - Mecanismo espacial

Consideremos dos eslabones consecutivos:

Lineal: $$v_{i+1} = v_i + \omega_i \times r_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot z_{i+1}$$

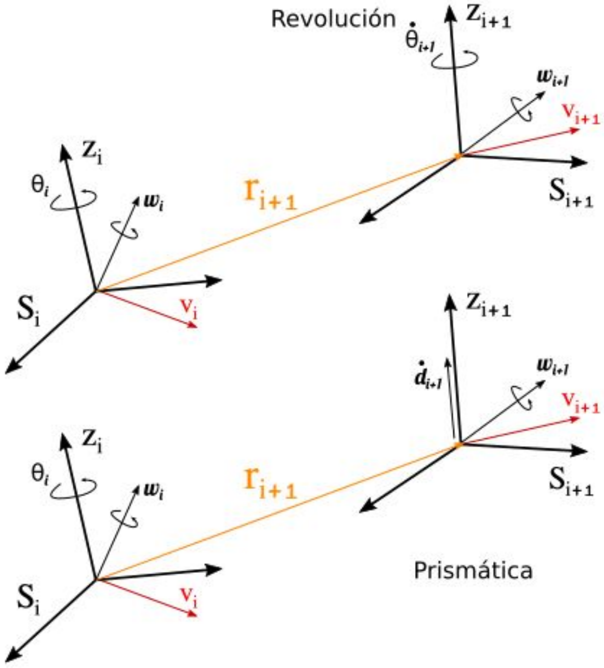


Propagación de velocidades - Mecanismo espacial

Consideremos dos eslabones consecutivos:

Lineal: $v_{i+1} = v_i + \omega_i \times r_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot z_{i+1}$

Angular: $\omega_{i+1} = \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot z_{i+1}$



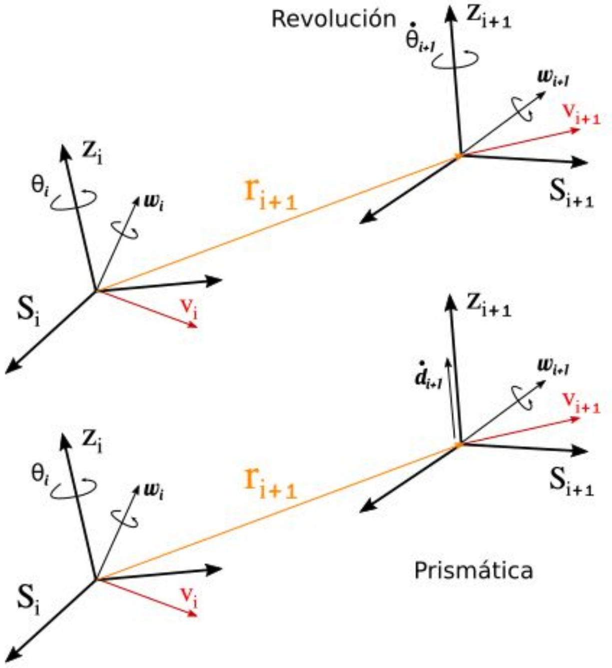
Propagación de velocidades - Mecanismo espacial

Consideremos dos eslabones consecutivos:

Lineal: $v_{i+1} = v_i + \omega_i \times r_{i+1} + \boxed{\dot{d}_{i+1} \cdot z_{i+1}}$

Angular: $\omega_{i+1} = \omega_i + \boxed{\dot{\theta}_{i+1} \cdot z_{i+1}}$

Solo uno de los dos términos



Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

Para la articulación 1:

- Una de las dos velocidades vale: $$\begin{matrix} \omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \\ v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1 \end{matrix}$$ y la otra cero.

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

Para la articulación 1:

- Una de las dos velocidades vale: $$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \\ v_1 &= \dot{d}_1 \cdot z_1 \end{aligned}$$ y la otra cero.

- Para la articulación i+1:

$$_{i+1}\omega_{i+1} = \ _{i+1}R_i \cdot \ _i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \ _{i+1}z_{i+1}$$

$$_{i+1}v_{i+1} = \ _{i+1}R_i(_iv_i + \ _i\omega_i \times \ _ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot \ _{i+1}z_{i+1}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

Para la articulación 1:

- Una de las dos velocidades vale: $$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1$$ $$v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$$ y la otra cero.

- Para la articulación i+1:
$$_{i+1}\omega_{i+1} = \ _{i+1}R_i \cdot \ _i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \ _{i+1}z_{i+1}$$
$$_{i+1}v_{i+1} = \ _{i+1}R_i(_iv_i + \ _i\omega_i \times \ _ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot \ _{i+1}z_{i+1}$$

- Obteniendo así: $$_n\omega_n$$ $$_nv_n$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

Para la articulación 1:

- Una de las dos velocidades vale: $\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \\ v_1 &= \dot{d}_1 \cdot z_1 \end{aligned}$ y la otra cero.

- Para la articulación i+1:

$$_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

$$_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

- Obteniendo así: $\begin{matrix} {}_n\omega_n \\ {}_nv_n \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} {}_0v_n \\ {}_0\omega_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} {}_0R_n & 0 \\ 0 & {}_0R_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}_nv_v \\ {}_n\omega_n \end{bmatrix}$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

Para la articulación 1:

- Una de las dos velocidades vale: $\begin{matrix} \omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \\ v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1 \end{matrix}$ y la otra cero.

- Para la articulación i+1:

$$ {}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1} $$

$$ {}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_i v_i + {}_i\omega_i \times {}_i r_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1} $$

- Obteniendo así: $\begin{matrix} {}_n\omega_n \\ {}_n v_n \end{matrix}$

$$ \begin{bmatrix} {}_0 v_n \\ {}_0\omega_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} {}_0R_n & 0 \\ 0 & {}_0R_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}_n v_v \\ {}_n\omega_n \end{bmatrix} $$

¿Dónde está el Jacobiano?

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

Para la articulación 1:

- Una de las dos velocidades vale: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1$, $v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$ y la otra cero.

- Para la articulación i+1:

$$ {}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1} $$
$$ {}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1} $$

- Obteniendo así: ${}_n\omega_n$, ${}_nv_n$ $\longrightarrow$

$$ \begin{bmatrix} {}_0v_n \\ {}_0\omega_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} {}_0R_n & 0 \\ 0 & {}_0R_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}_nv_v \\ {}_n\omega_n \end{bmatrix} $$

¿Dónde está el Jacobiano?

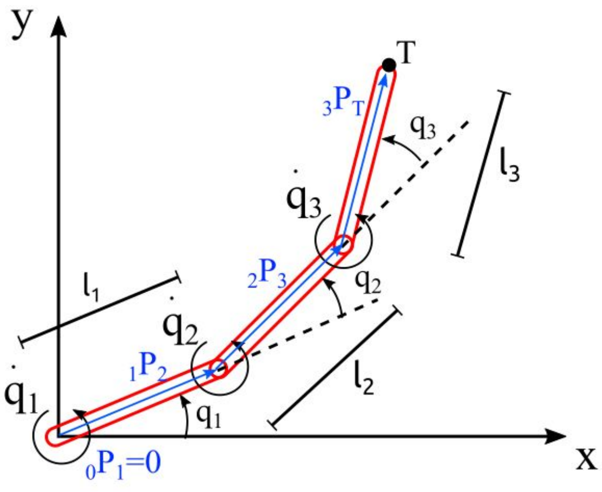
Veamos un ejemplo!

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \mid v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

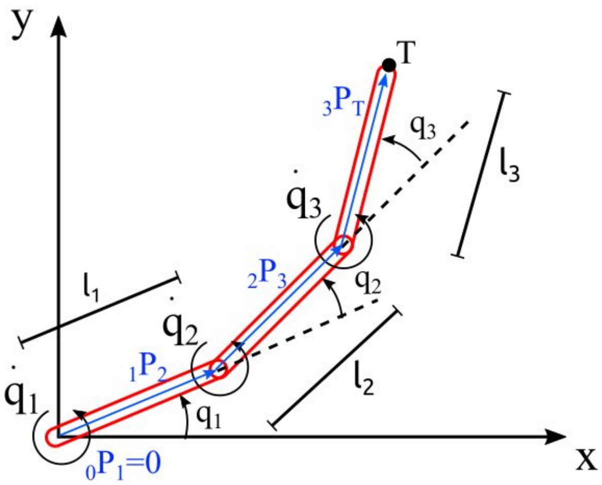
ART i+1: $_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$

$$_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \mid v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

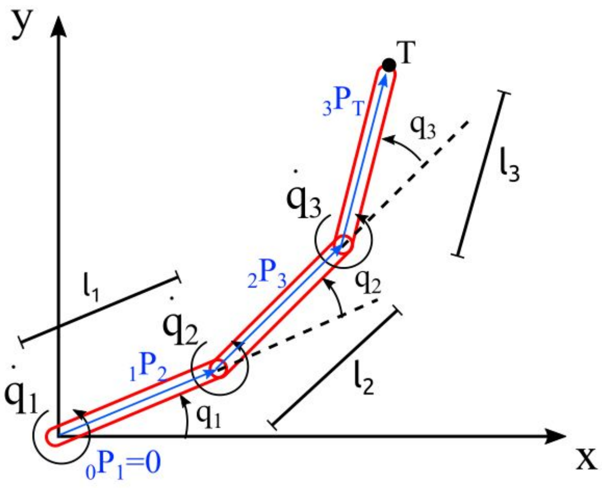
ART i+1: $_{i+1}\omega_{i+1} = {_{i+1}R_i} \cdot {_i\omega_i} + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {_{i+1}z_{i+1}}$

$_{i+1}v_{i+1} = {_{i+1}R_i}({_iv_i} + {_i\omega_i} \times {_ir_{i+1}}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {_{i+1}z_{i+1}}$

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



$v_1 = 0$

$\omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \mid v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1:

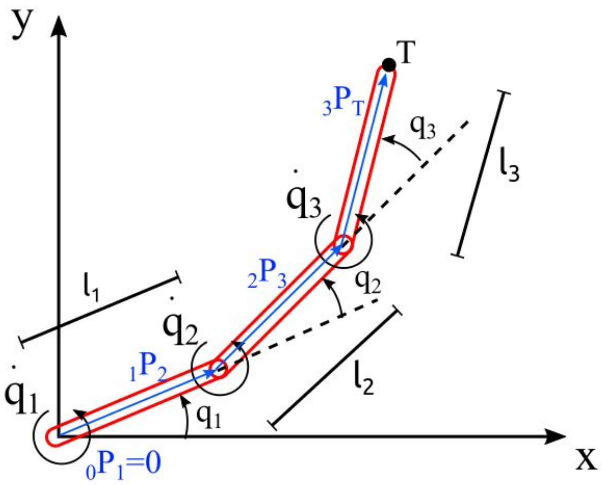
$$_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

$$_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2$$

$$\omega_1 = \dot{q}_1 . \mathbf{z}_1 \qquad \omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

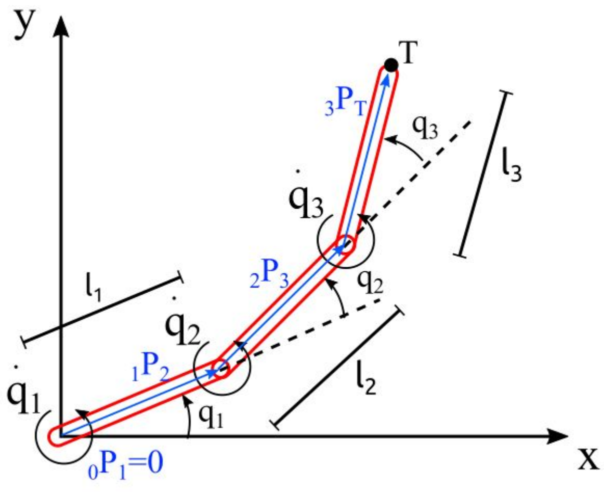
ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \mid v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $_{i+1}\omega_{i+1} = \, _{i+1}R_i \cdot \, _i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \, _{i+1}z_{i+1}$

$_{i+1}v_{i+1} = \, _{i+1}R_i(_iv_i + \, _i\omega_i \times \, _ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot \, _{i+1}z_{i+1}$

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times \, _1P_2$$

$$v_2 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\omega_1 = \dot{q}_1 . \mathbf{z}_1 \qquad \omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Recordando

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

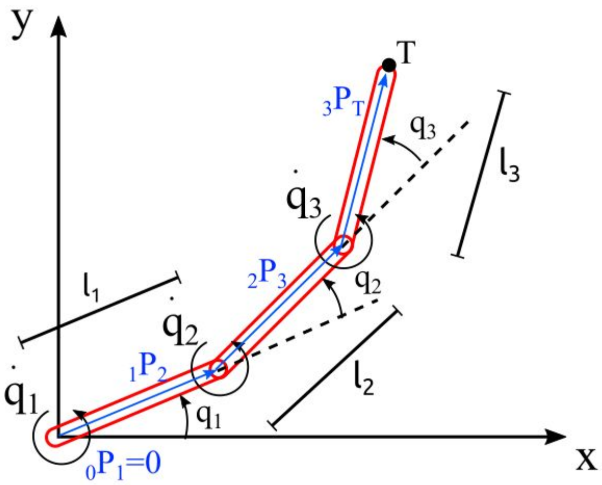
- EJEMPLO:

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \,|\, v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $${}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$
$${}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



$$v_1 = 0 \qquad \omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1 \qquad \omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2$$

$$v_2 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1c_1 \\ l_1s_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1s_1 \\ l_1c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \,\big|\, v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1:

$$_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

$$_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

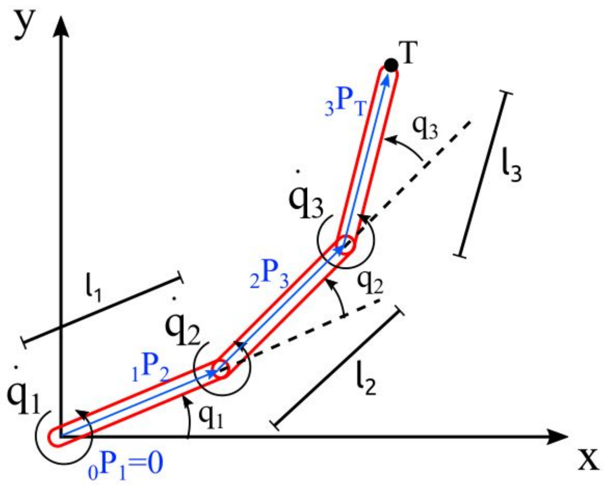
calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

$$\omega_1 = \dot{q}_1 . \mathbf{z}_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$



Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

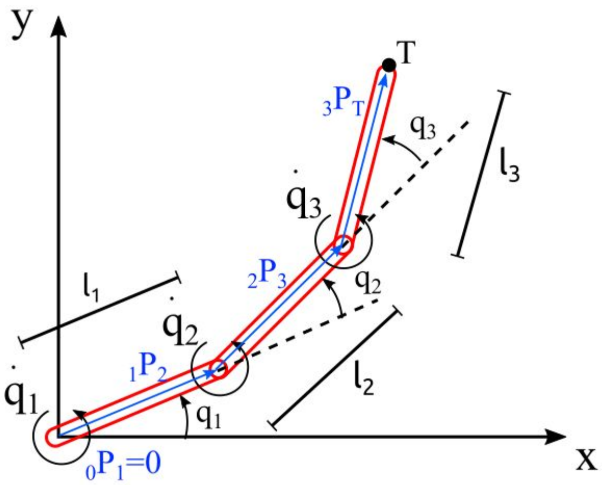
ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \,\Big|\, v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $${}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$
$${}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

$$\omega_1 = \dot{q}_1 . \mathbf{z}_1$$
$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$



$$v_1 = 0$$
$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times {}_2P_3 \qquad \omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) . \mathbf{z}_2 \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

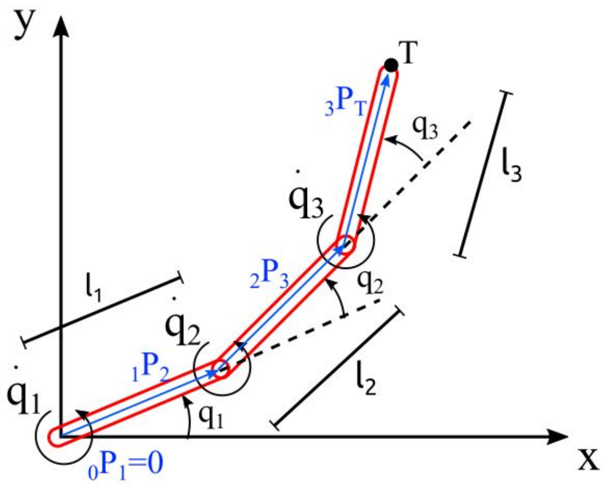
ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \,\Big|\, v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $${}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$
$${}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

$$\omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1$$
$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$



$$v_1 = 0$$
$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times {}_2P_3 \qquad \omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\mathbf{z}_2 \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 +$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

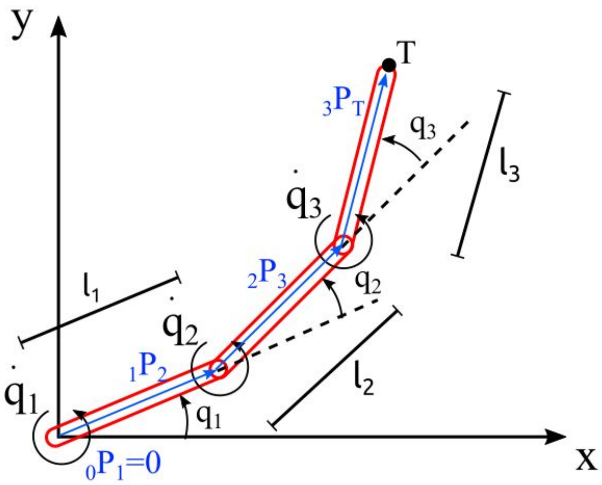
ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \;|\; v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $_{i+1}\omega_{i+1} = \; _{i+1}R_i \cdot \; _i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \; _{i+1}z_{i+1}$

$_{i+1}v_{i+1} = \; _{i+1}R_i(_iv_i + \; _i\omega_i \times \; _ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot \; _{i+1}z_{i+1}$

$$\omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times \; _1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times \; _2P_3 \qquad \omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\mathbf{z}_2 \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \,\Big|\, v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $${}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

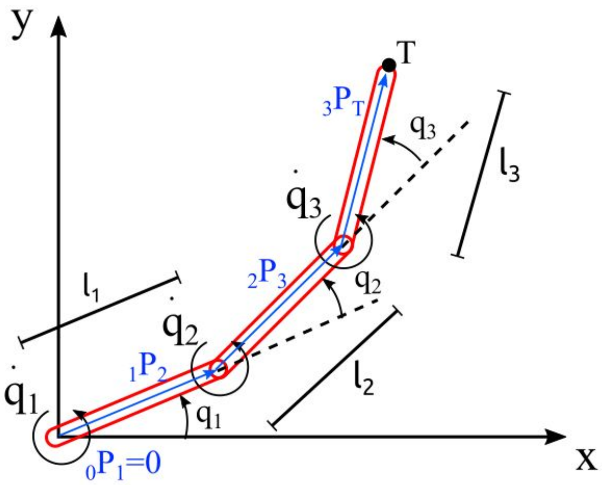
$${}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

$$\omega_1 = \dot{q}_1 . \mathbf{z}_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times {}_2P_3 \qquad \omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\mathbf{z}_2 \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \mid v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $_{i+1}\omega_{i+1} = \ _{i+1}R_i \cdot \ _i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \ _{i+1}z_{i+1}$

$$_{i+1}v_{i+1} = \ _{i+1}R_i(_iv_i + \ _i\omega_i \times \ _ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot \ _{i+1}z_{i+1}$$

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

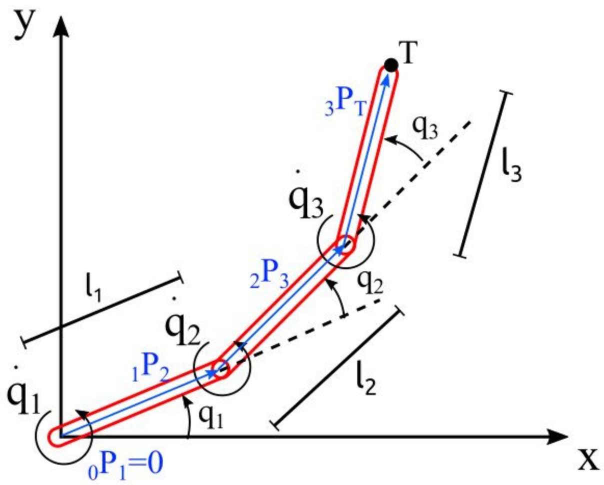
calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

$$\omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\mathbf{z}_2$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times \ _1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times \ _2P_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

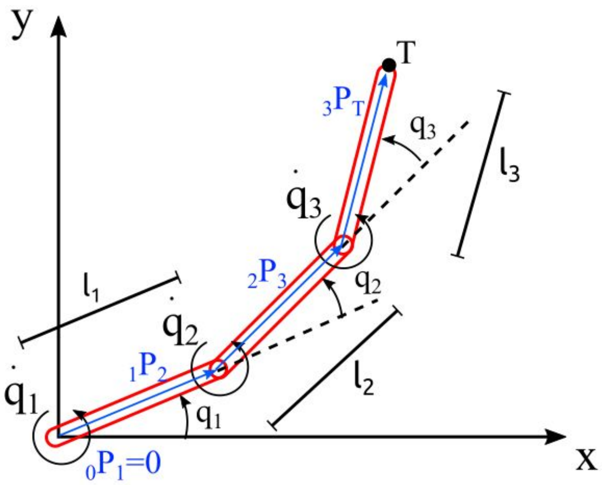
- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \,|\, v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $${}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$
$${}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times {}_2P_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$v_T = v_3 + \omega_3 \times {}_3P_4$$

$$\omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\mathbf{z}_2$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3).\mathbf{z}_3 \qquad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

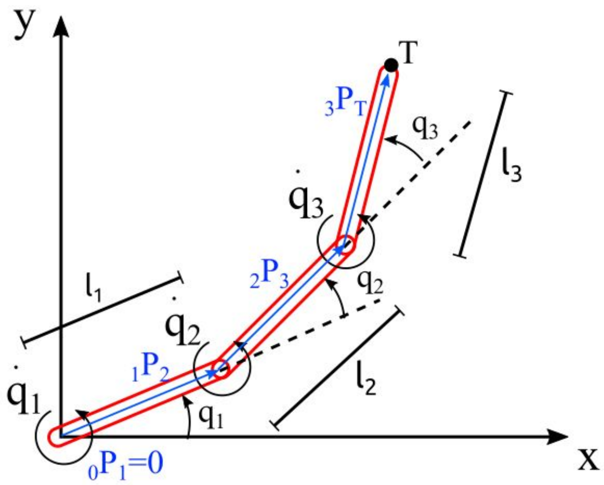
- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \mid v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $${}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$
$${}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$



$$\omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1$$
$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 0$$
$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$\omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\mathbf{z}_2$$
$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times {}_2P_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$v_T = v_3 + \omega_3 \times {}_3P_4 \qquad \omega_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3).\mathbf{z}_3 \qquad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) & 0 \\ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 c_{123} \\ l_3 s_{123} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \;|\; v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1:

$$_{i+1}\omega_{i+1} = \; _{i+1}R_i \cdot \; _i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \; _{i+1}z_{i+1}$$

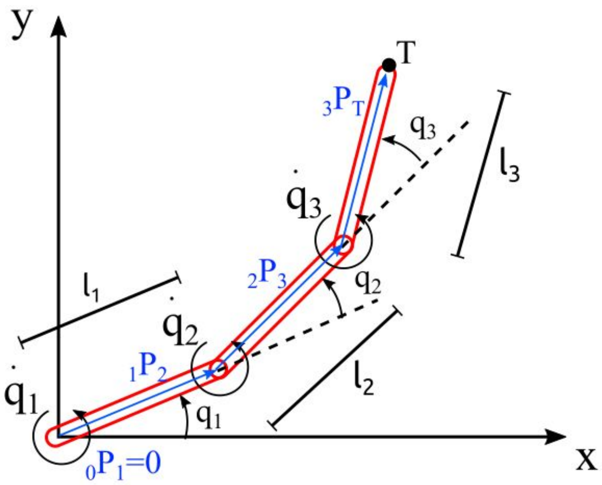
$$_{i+1}v_{i+1} = \; _{i+1}R_i(_iv_i + \; _i\omega_i \times \; _ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot \; _{i+1}z_{i+1}$$

$$\omega_1 = \dot{q}_1.\mathbf{z}_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\mathbf{z}_2$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times \; _1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times \; _2P_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$v_T = v_3 + \omega_3 \times \; _3P_4 \qquad \omega_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3).\mathbf{z}_3 \qquad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

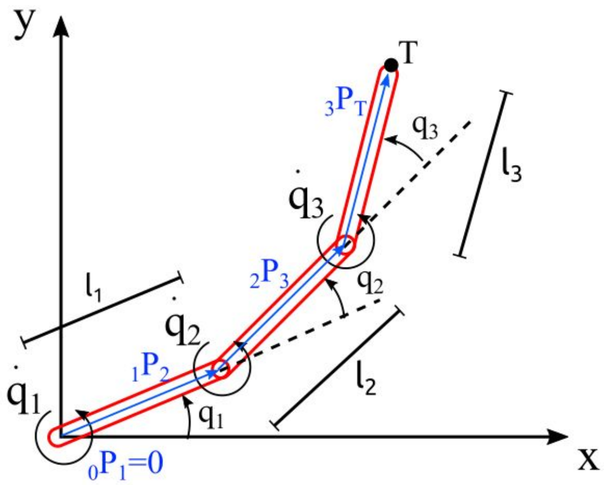
Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:

ART 1: $\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cdot z_1 \mid v_1 = \dot{d}_1 \cdot z_1$

ART i+1: $${}_{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}R_i \cdot {}_i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$

$${}_{i+1}v_{i+1} = {}_{i+1}R_i({}_iv_i + {}_i\omega_i \times {}_ir_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}_{i+1}z_{i+1}$$



$$v_1 = 0$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \times {}_1P_2 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$v_3 = v_2 + \omega_2 \times {}_2P_3 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$v_T = v_3 + \omega_3 \times {}_3P_4 = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\omega_1 = \dot{q}_1 . \mathbf{z}_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) . \mathbf{z}_2$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) . \mathbf{z}_3$$

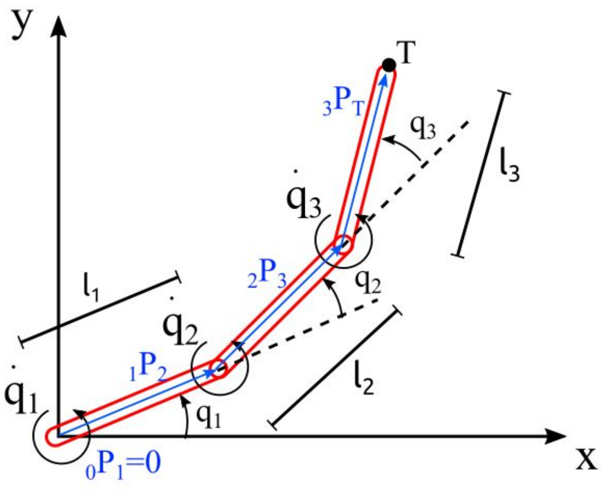
$$\omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

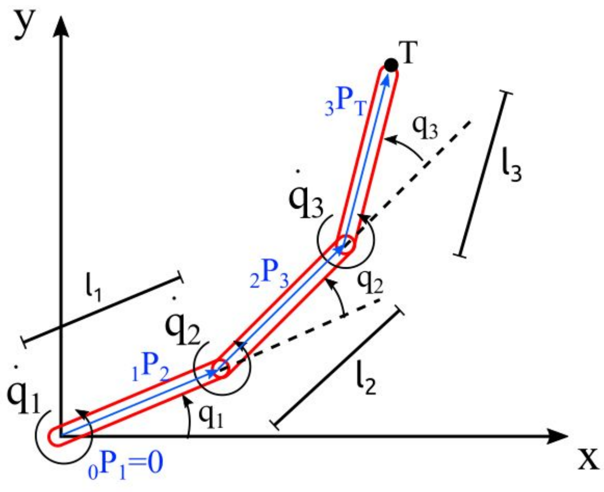
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} \boxed{-l_1 s_1} \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{\dot{q}_1} + \begin{pmatrix} \boxed{-l_2 s_{12}} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\boxed{\dot{q}_1} + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} \boxed{-l_3 s_{123}} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\boxed{\dot{q}_1} + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

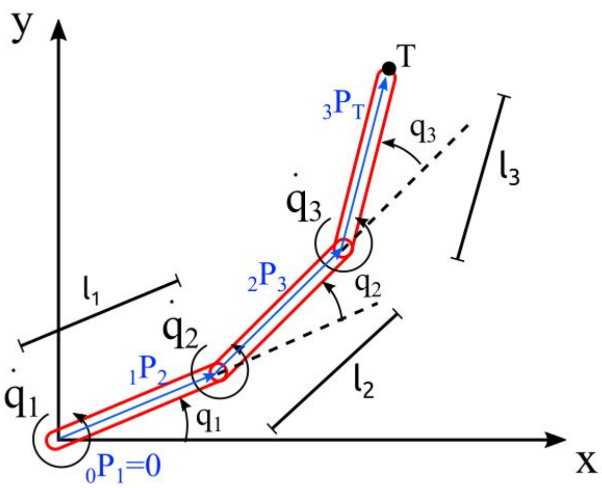
$$v_T = \begin{pmatrix} \boxed{-l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123}} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\dot{q}_1} \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} \boxed{-l_2 s_{12}} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \boxed{\dot{q}_2}) + \begin{pmatrix} \boxed{-l_3 s_{123}} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \boxed{\dot{q}_2} + \dot{q}_3)$$

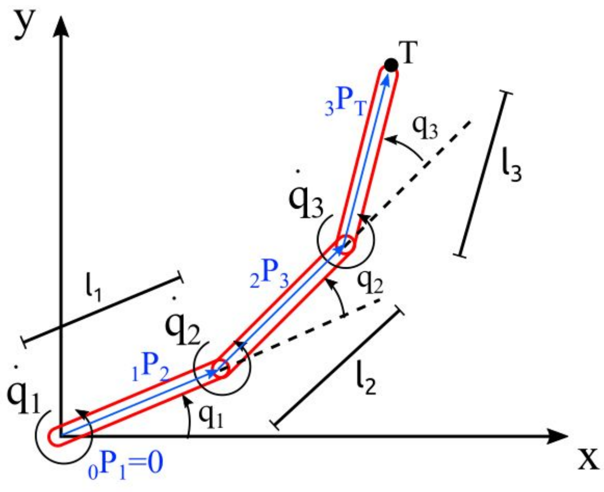
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & \boxed{-l_2 s_{12} - l_3 s_{123}} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \boxed{\dot{q}_2} \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} \boxed{-l_3 s_{123}} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \boxed{\dot{q}_3})$$

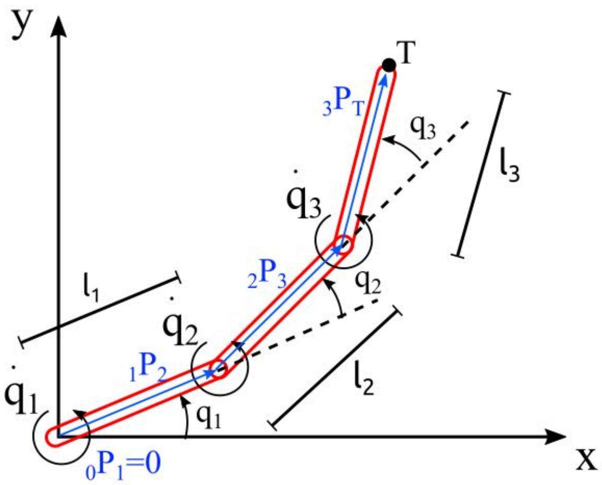
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & \boxed{-l_3 s_{123}} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \boxed{\dot{q}_1} \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ \boxed{l_1 c_1} \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{\dot{q}_1} + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ \boxed{l_2 c_{12}} \\ 0 \end{pmatrix} (\boxed{\dot{q}_1} + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ \boxed{l_3 c_{123}} \\ 0 \end{pmatrix} (\boxed{\dot{q}_1} + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

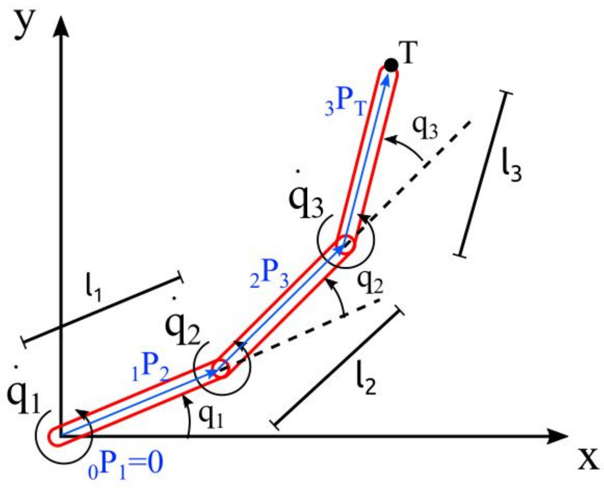
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ \boxed{l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\dot{q}_1} \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ \boxed{l_2 c_{12}} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \boxed{\dot{q}_2}) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ \boxed{l_3 c_{123}} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \boxed{\dot{q}_2} + \dot{q}_3)$$

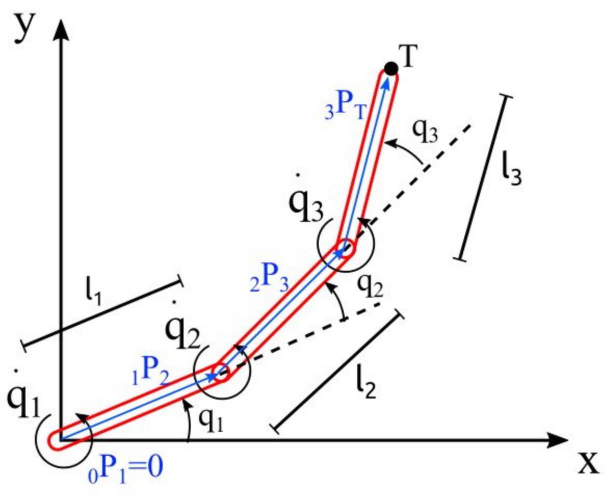
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & \boxed{l_2 c_{12} + l_3 c_{123}} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \boxed{\dot{q}_2} \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ \boxed{l_3 c_{123}} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \boxed{\dot{q}_3})$$

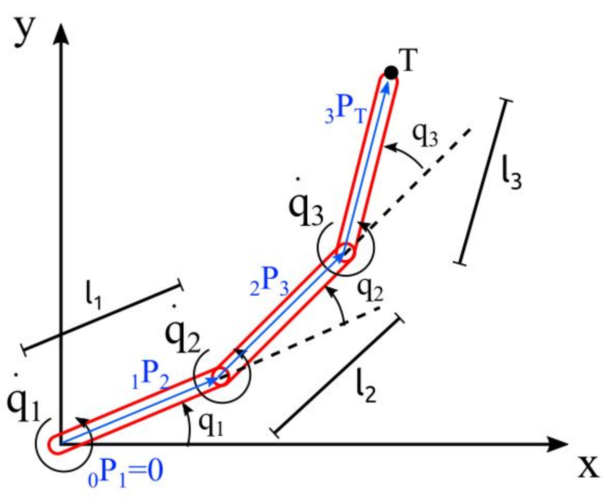
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & \boxed{l_3 c_{123}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \boxed{\dot{q}_1} \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \boxed{\dot{q}_1} + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} (\boxed{\dot{q}_1} + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} (\boxed{\dot{q}_1} + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

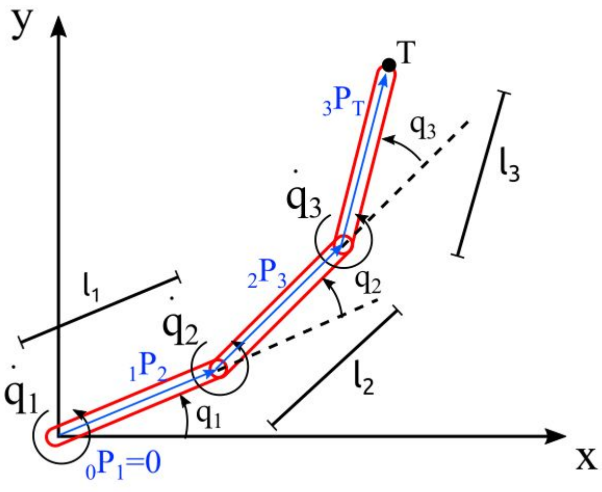
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ \boxed{0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\dot{q}_1} \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \boxed{\dot{q}_2}) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \boxed{\dot{q}_2} + \dot{q}_3)$$

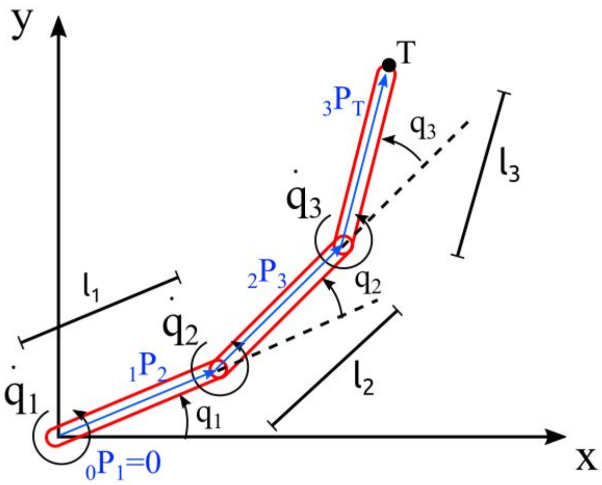
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \boxed{\dot{q}_2} \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \boxed{\dot{q}_3})$$

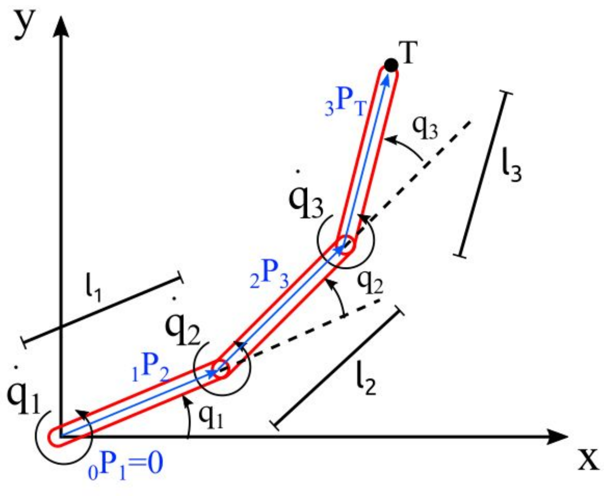
$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \boxed{\dot{q}_1} \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$v_T = \boxed{\begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

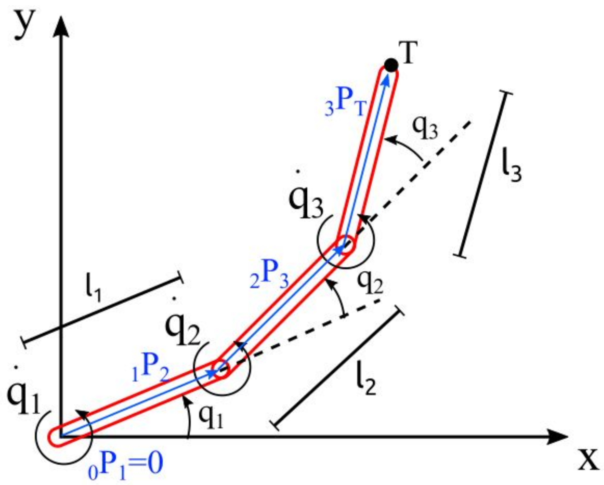
J_V

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Jacobiano angular:

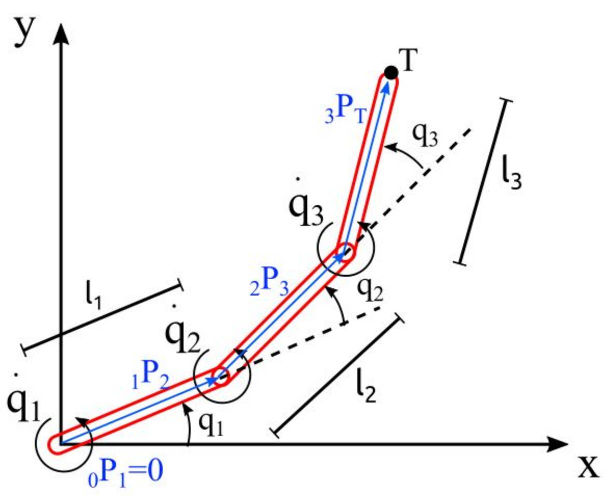
$$\omega_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3).\mathbf{z}_3$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Jacobiano angular:

$$\omega_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3).\mathbf{z}_3$$

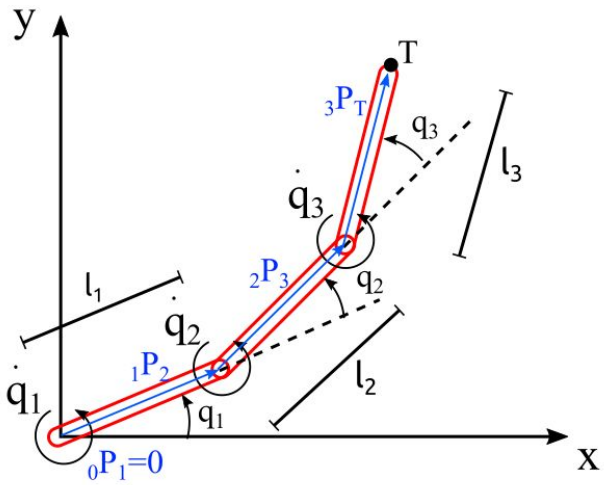
$$\omega_T = \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



Jacobiano lineal:

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{pmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$v_T = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Jacobiano angular:

$$\omega_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3).\mathbf{z}_3$$

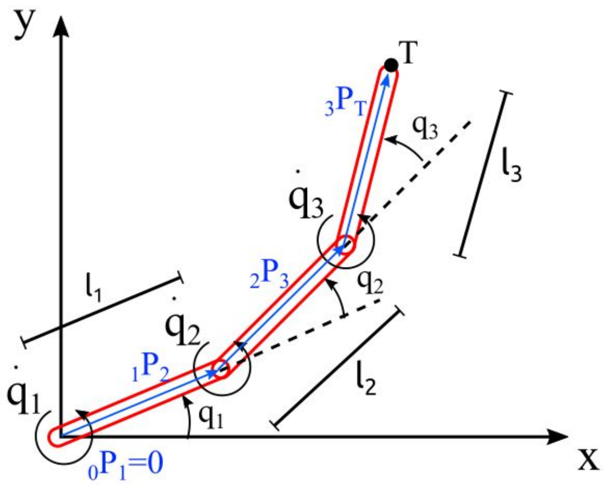
$$\omega_T = \omega_3 = \overbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}^{J_W} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

Propagación de velocidades - Jacobiano Geométrico

- EJEMPLO:

Sea el robot plano de 3 GDL de la figura,

calcular el Jacobiano a partir de la propagación de velocidades:



$$\begin{pmatrix} v_T \\ \omega_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

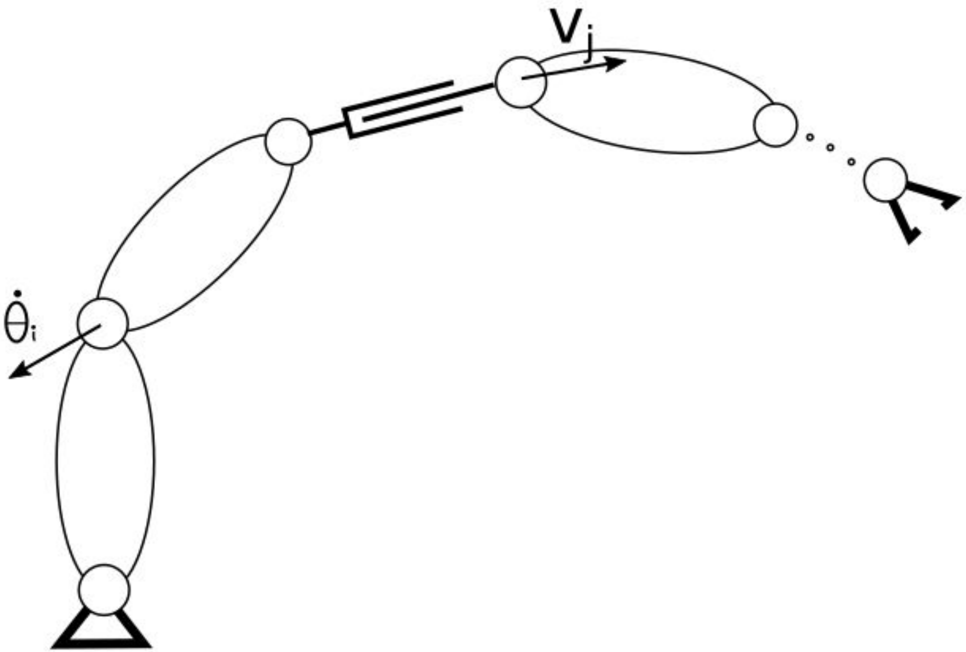
La idea principal es determinar el efecto que tiene el movimiento de cada actuador sobre el movimiento de la terminal.

Sabiendo que la **relación** que hay entre la velocidad de las articulaciones y la velocidad de la terminal es **lineal,** se puede pensar en un **“principio de superposición”.**

De esta forma, analizando el impacto de cada tipo de actuador (revolución o prismática) se puede determinar el **aporte individual** y así construir explícitamente la matriz jacobiana.

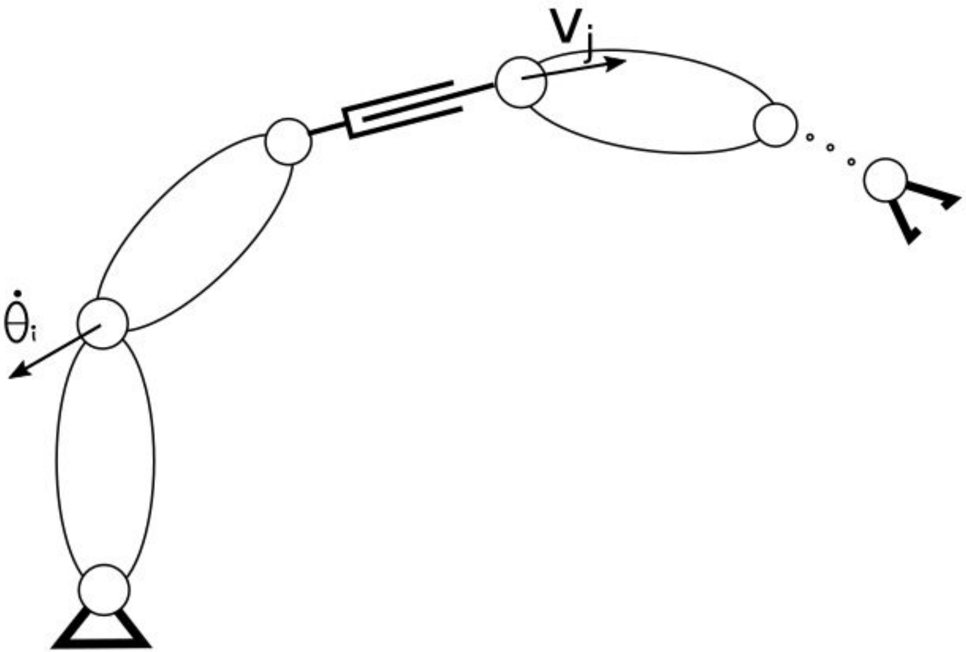
Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



Jacobiano Geométrico - Forma explícita

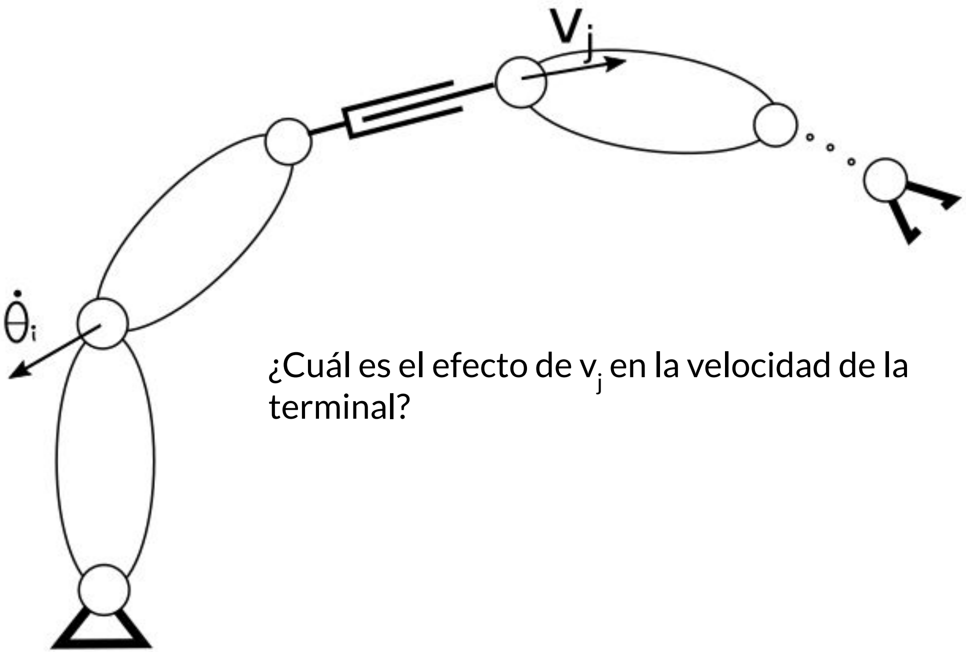
Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



	Prismática	Revolución
Velocidad lineal		
Velocidad angular		

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.

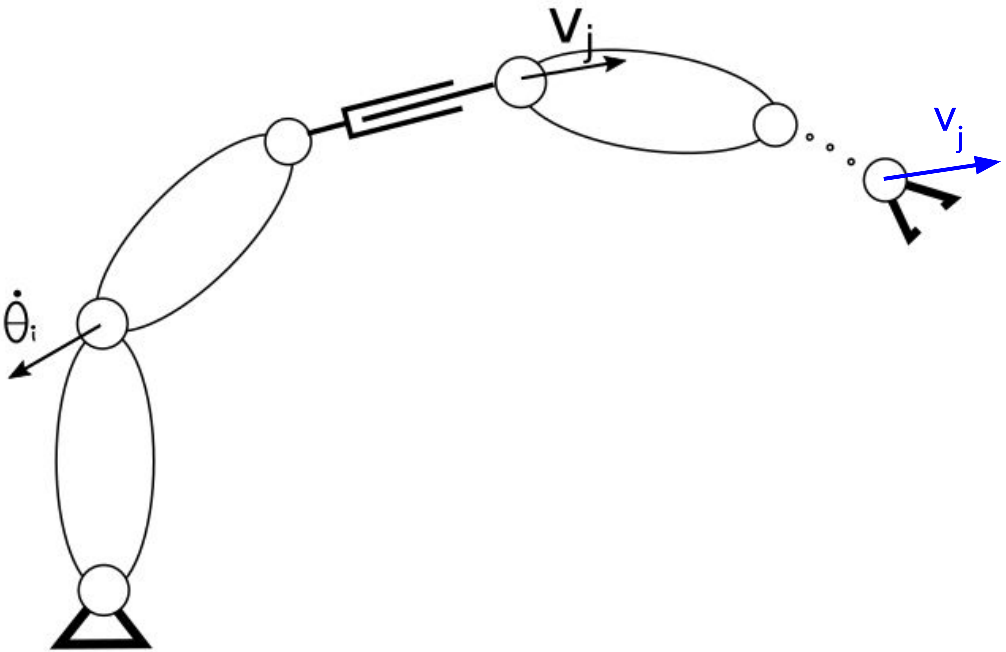


	Prismática	Revolución
Velocidad lineal		
Velocidad angular		

¿Cuál es el efecto de v_j en la velocidad de la terminal?

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

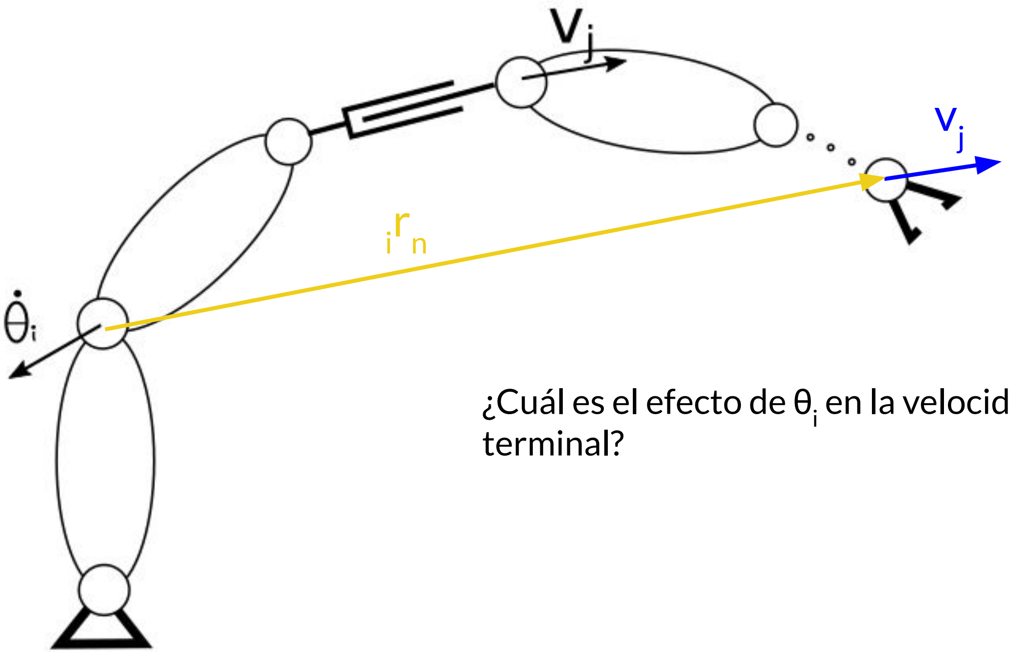
Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



	Prismática	Revolución
Velocidad lineal	v_j	
Velocidad angular	No	

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.

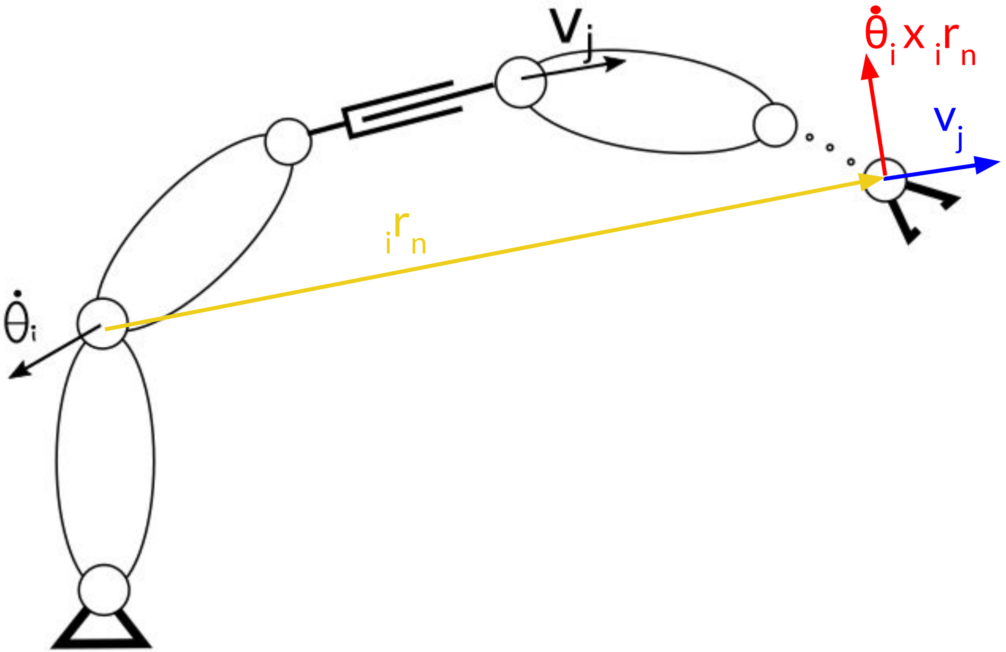


	Prismática	Revolución
Velocidad lineal	v_j	
Velocidad angular	No	

¿Cuál es el efecto de θ_i en la velocidad de la terminal?

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

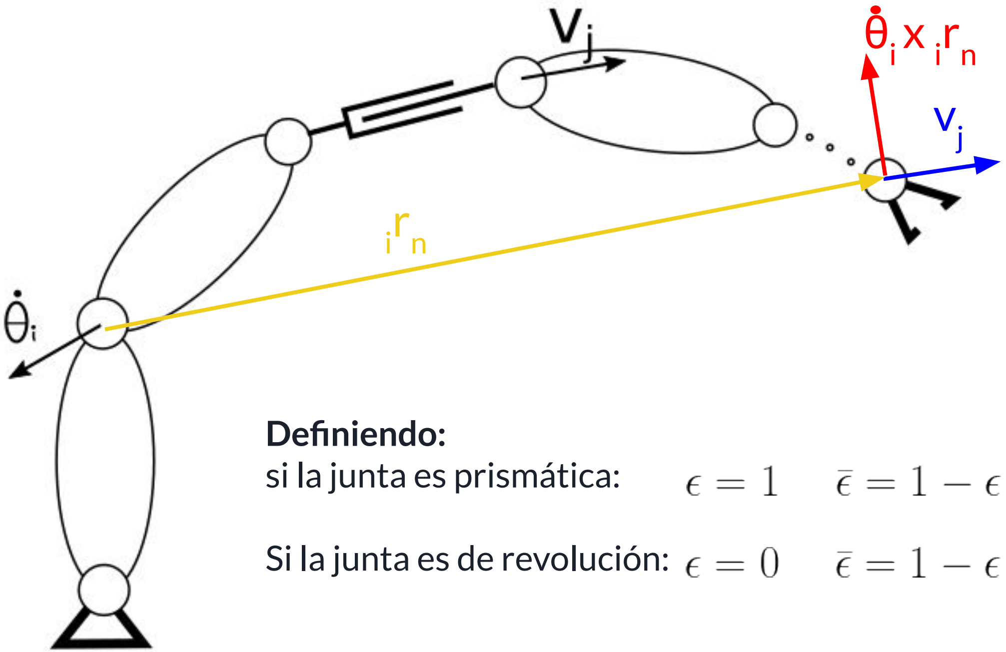
Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



	Prismática	Revolución
Velocidad lineal	v_j	$\dot{\theta}_i \times {}_i r_n$
Velocidad angular	No	$\dot{\theta}_i$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



	Prismática	Revolución
Velocidad lineal	v_j	$\dot{\theta}_i \times {}_i r_n$
Velocidad angular	No	$\dot{\theta}_i$

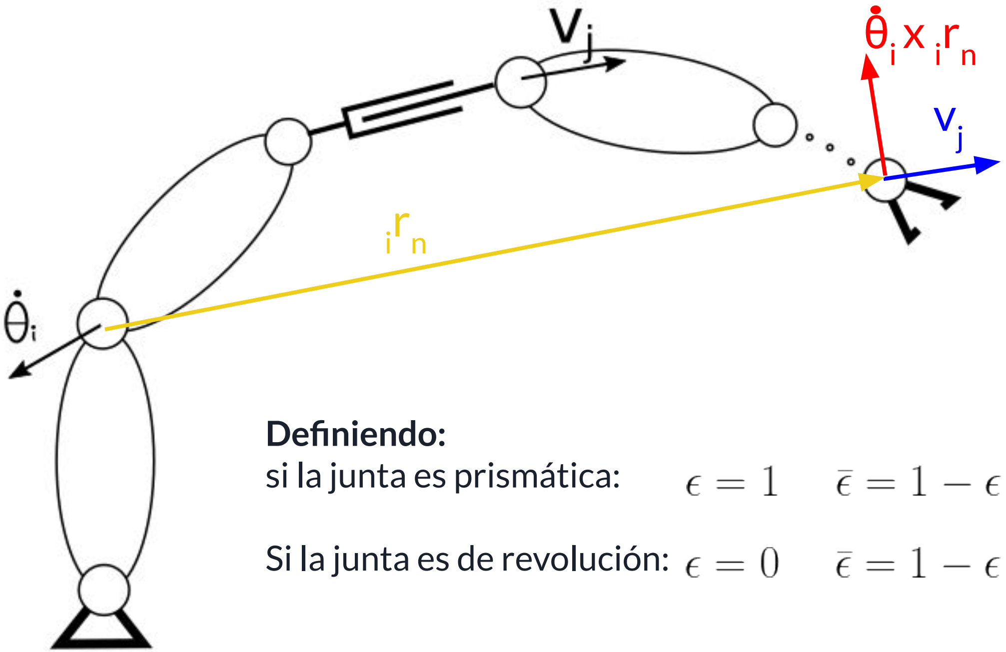
Definiendo:

si la junta es prismática: $\epsilon = 1 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 0$

Si la junta es de revolución: $\epsilon = 0 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 1$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



	Prismática	Revolución
Velocidad lineal	v_j	$\dot{\theta}_i \times {}_i r_n$
Velocidad angular	No	$\dot{\theta}_i$

Definiendo:
si la junta es prismática: $\epsilon = 1 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 0$

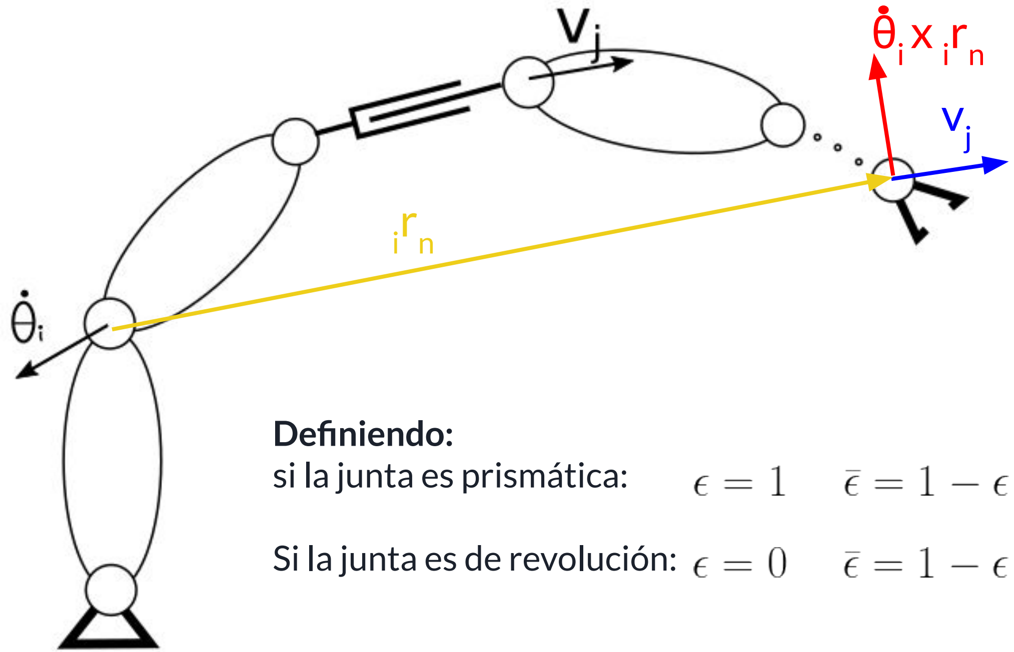
Si la junta es de revolución: $\epsilon = 0 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 1$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \mathbf{v}_i + \bar{\epsilon}(\dot{\theta}_i \times \ {}_i\mathbf{r}_n)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \bar{\epsilon}\dot{\theta}_i$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



	Prismática	Revolución
Velocidad lineal	v_j	$\dot{\theta}_i \times {}_i r_n$
Velocidad angular	No	$\dot{\theta}_i$

Definiendo:

si la junta es prismática: $\epsilon = 1 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 0$

Si la junta es de revolución: $\epsilon = 0 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 1$

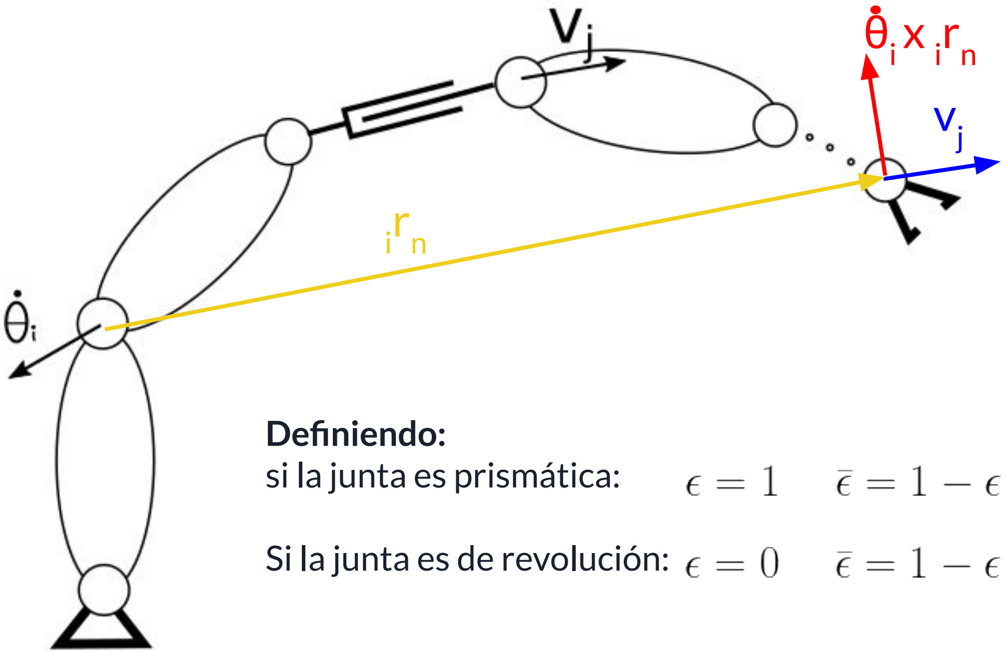
$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \mathbf{v}_i + \bar{\epsilon}(\dot{\theta}_i \times {}_i\mathbf{r}_n)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \bar{\epsilon}\dot{\theta}_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \dot{q}_i \cdot \mathbf{z}_i \\ \dot{\theta}_i &= \dot{q}_i \cdot \mathbf{z}_i \end{aligned}}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



	Prismática	Revolución
Velocidad lineal	v_j	$\dot{\theta}_i \times {}_i r_n$
Velocidad angular	No	$\dot{\theta}_i$

Definiendo:

si la junta es prismática: $\epsilon = 1 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 0$

Si la junta es de revolución: $\epsilon = 0 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 1$

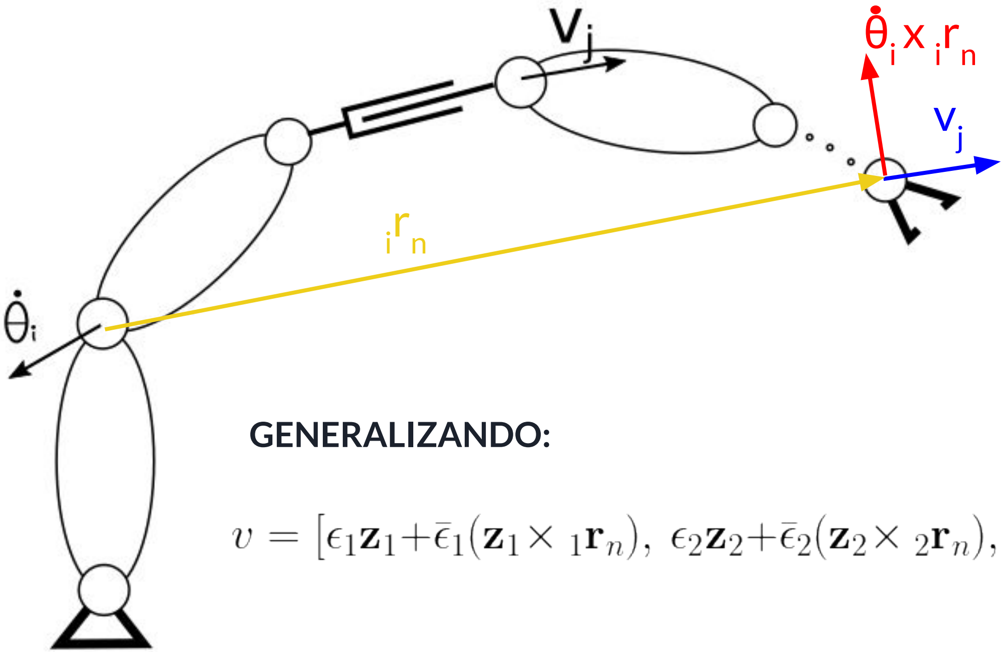
$$v = \sum_{i=1}^{n} [\epsilon_i \mathbf{z}_i + \bar{\epsilon}(\mathbf{z}_i \times \ {}_i\mathbf{r}_n)]\dot{q}_i$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\epsilon}\mathbf{z}_i)\dot{q}_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \dot{q}_i \cdot \mathbf{z}_i \\ \dot{\theta}_i &= \dot{q}_i \cdot \mathbf{z}_i \end{aligned}}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



Definiendo:

si la junta es prismática: $\epsilon = 1 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 0$

Si la junta es de revolución: $\epsilon = 0 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 1$

$$v = \sum_{i=1}^{n} [\epsilon_i \mathbf{z}_i + \bar{\epsilon}(\mathbf{z}_i \times \ {}_i\mathbf{r}_n)]\dot{q}_i$$

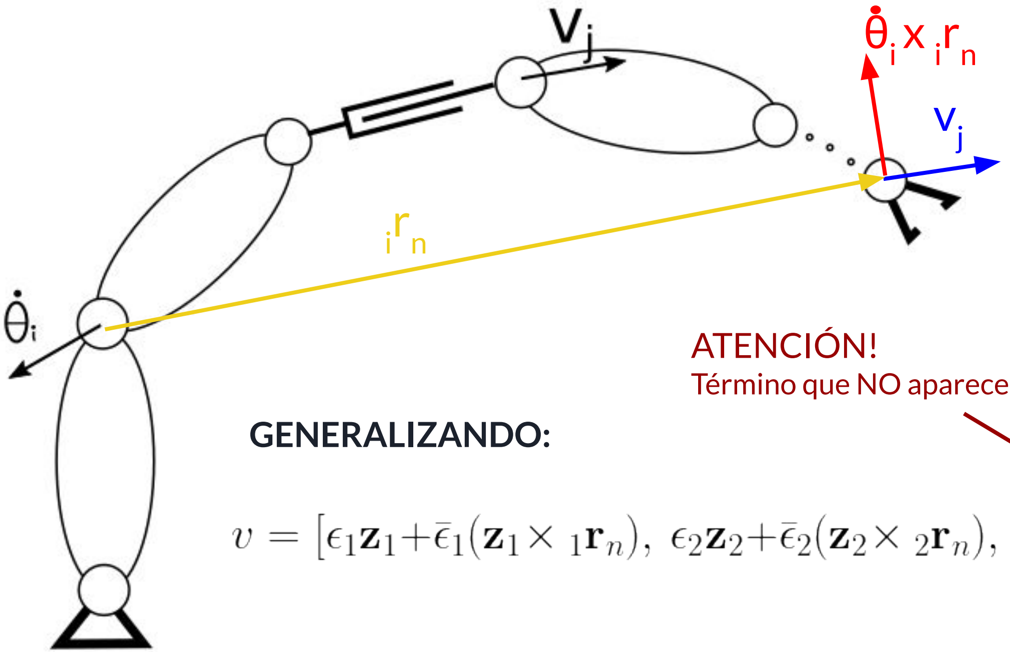
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\epsilon}\mathbf{z}_i)\dot{q}_i$$

GENERALIZANDO:

$$v = [\epsilon_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\epsilon}_1(\mathbf{z}_1 \times \ {}_1\mathbf{r}_n), \ \epsilon_2 \mathbf{z}_2 + \bar{\epsilon}_2(\mathbf{z}_2 \times \ {}_2\mathbf{r}_n), \ \ldots, \epsilon_n \mathbf{z}_n] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \qquad \omega = [\bar{\epsilon}_1 \mathbf{z}_1, \ \bar{\epsilon}_2 \mathbf{z}_2, \ \ldots, \ \bar{\epsilon}_n \mathbf{z}_n] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



Definiendo:

si la junta es prismática: $\epsilon = 1 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 0$

Si la junta es de revolución: $\epsilon = 0 \quad \bar{\epsilon} = 1 - \epsilon = 1$

$$v = \sum_{i=1}^{n} [\epsilon_i \mathbf{z}_i + \bar{\epsilon}(\mathbf{z}_i \times {}_i\mathbf{r}_n)] \dot{q}_i$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\epsilon}\mathbf{z}_i)\dot{q}_i$$

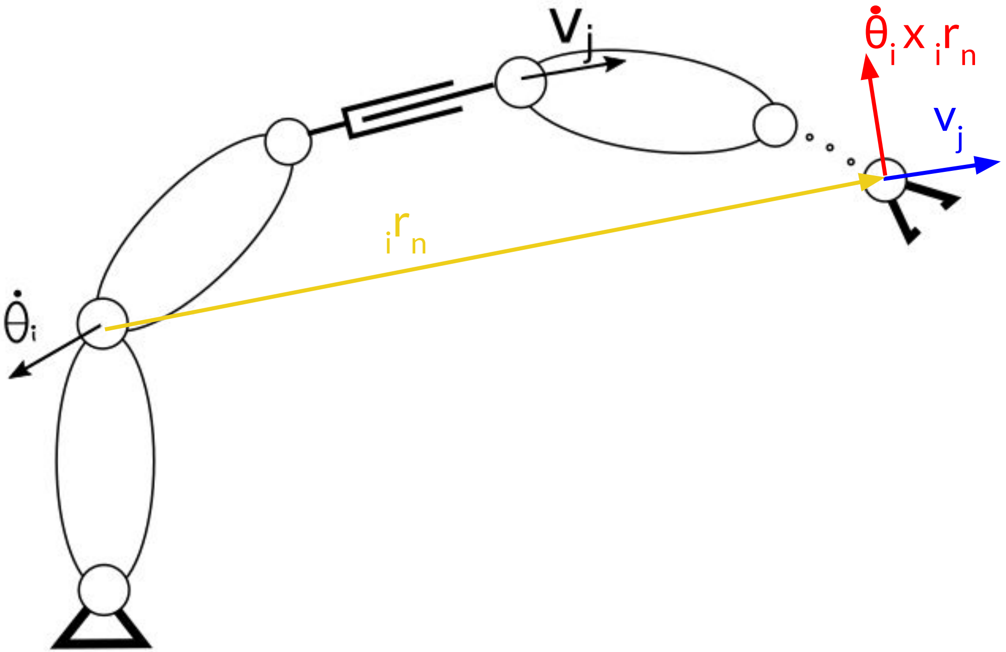
ATENCIÓN!
Término que NO aparece!

GENERALIZANDO:

$$v = [\epsilon_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\epsilon}_1(\mathbf{z}_1 \times {}_1\mathbf{r}_n),\ \epsilon_2 \mathbf{z}_2 + \bar{\epsilon}_2(\mathbf{z}_2 \times {}_2\mathbf{r}_n),\ \ldots,\ \epsilon_n \mathbf{z}_n] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \qquad \omega = [\bar{\epsilon}_1 \mathbf{z}_1,\ \bar{\epsilon}_2 \mathbf{z}_2,\ \ldots,\ \bar{\epsilon}_n \mathbf{z}_n] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

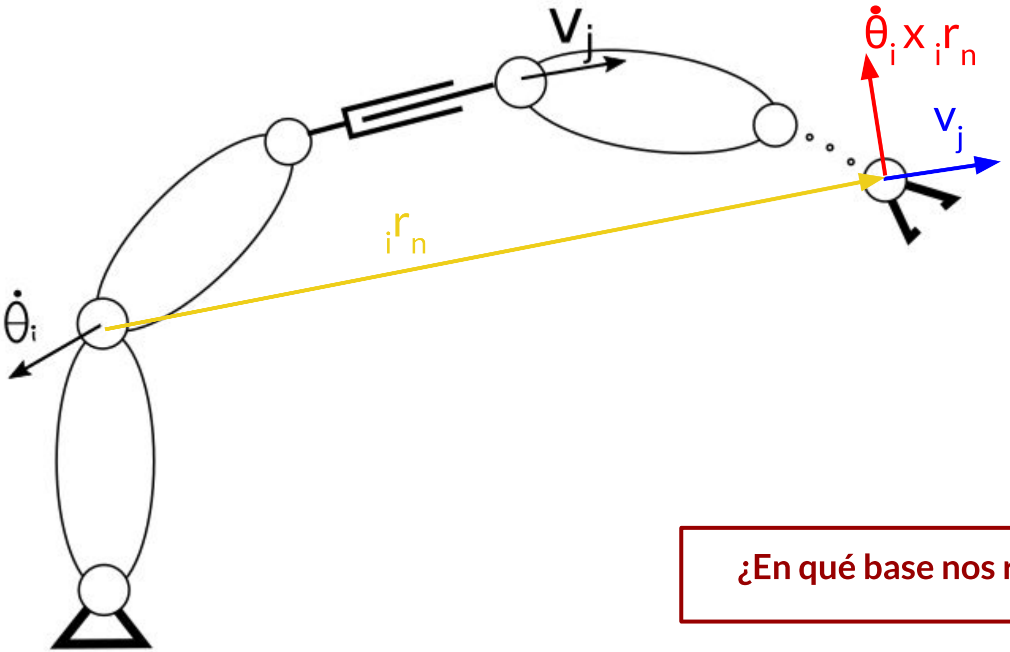
$$v = [\epsilon_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\epsilon}_1(\mathbf{z}_1 \times {}_1\mathbf{r}_n),\ \epsilon_2 \mathbf{z}_2 + \bar{\epsilon}_2(\mathbf{z}_2 \times {}_2\mathbf{r}_n),\ \ldots,\ \epsilon_n \mathbf{z}_n] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\omega = [\bar{\epsilon}_1 \mathbf{z}_1,\ \bar{\epsilon}_2 \mathbf{z}_2,\ \ldots,\ \bar{\epsilon}_n \mathbf{z}_n] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$v = \left[\epsilon_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\epsilon}_1(\mathbf{z}_1 \times {}_1\mathbf{r}_n),\ \epsilon_2 \mathbf{z}_2 + \bar{\epsilon}_2(\mathbf{z}_2 \times {}_2\mathbf{r}_n),\ \ldots,\ \epsilon_n \mathbf{z}_n\right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

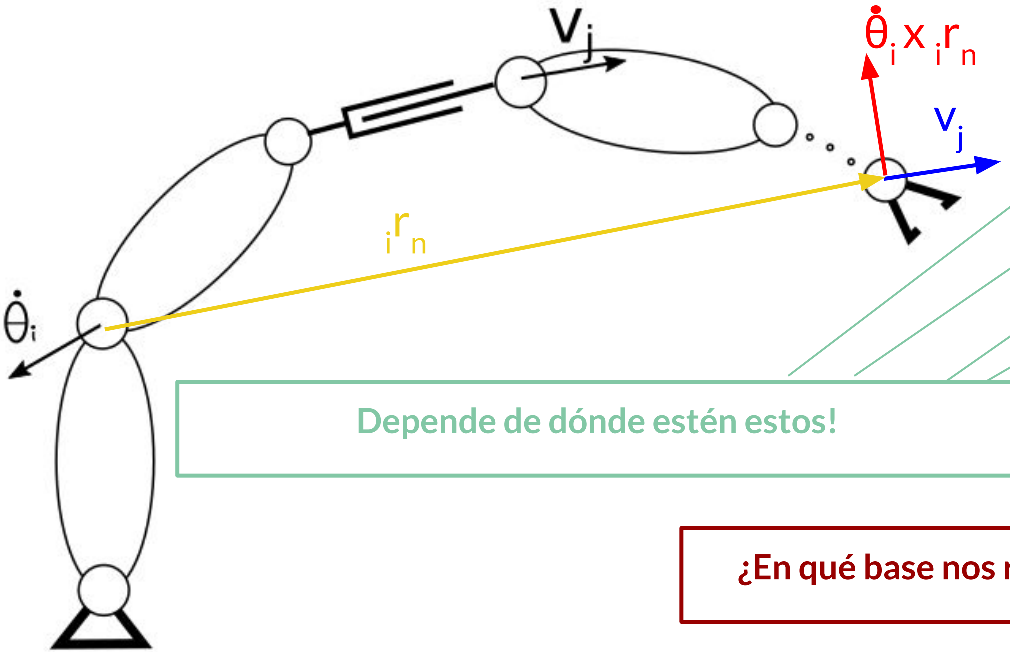
$$\omega = \left[\bar{\epsilon}_1 \mathbf{z}_1,\ \bar{\epsilon}_2 \mathbf{z}_2,\ \ldots,\ \bar{\epsilon}_n \mathbf{z}_n\right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

¿En qué base nos resultan las velocidades *v* y *w*?

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



Depende de dónde estén estos!

GENERALIZANDO:

$$v = \left[\epsilon_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\epsilon}_1(\mathbf{z}_1 \times {}_1\mathbf{r}_n),\ \epsilon_2 \mathbf{z}_2 + \bar{\epsilon}_2(\mathbf{z}_2 \times {}_2\mathbf{r}_n),\ \ldots,\ \epsilon_n \mathbf{z}_n\right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

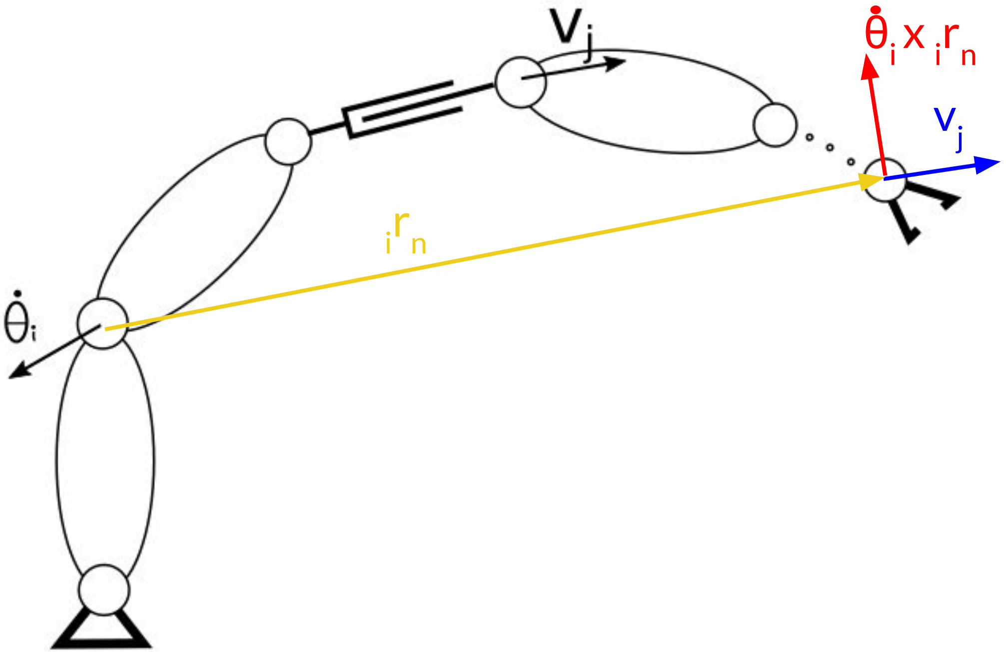
$$\omega = \left[\bar{\epsilon}_1 \mathbf{z}_1,\ \bar{\epsilon}_2 \mathbf{z}_2,\ \ldots,\ \bar{\epsilon}_n \mathbf{z}_n\right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

¿En qué base nos resultan las velocidades *v* y *w*?

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

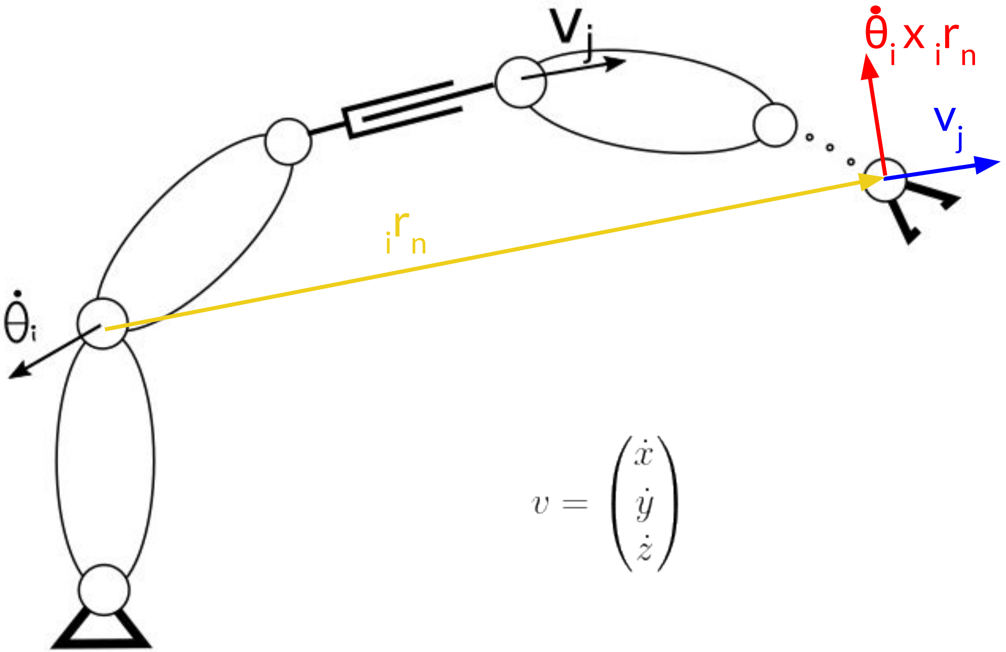
$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices $\boldsymbol{J_v}$ **y** $\boldsymbol{J_w}$

Para $\boldsymbol{J_v}$ **:** $\rightarrow$ Diferenciación directa

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

Para J_v : → Diferenciación directa

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

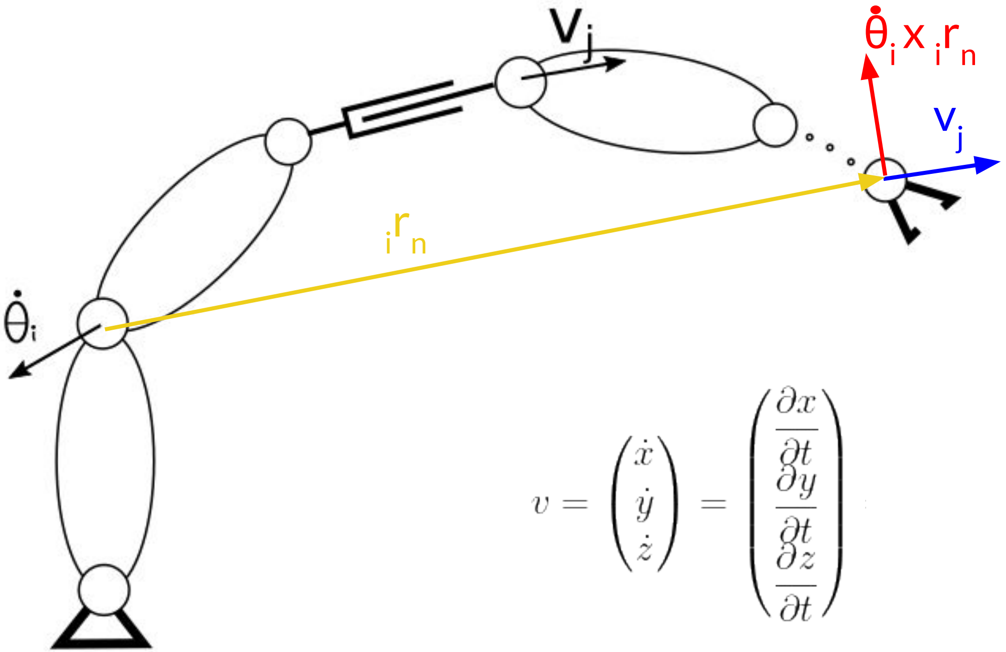
Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.

GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

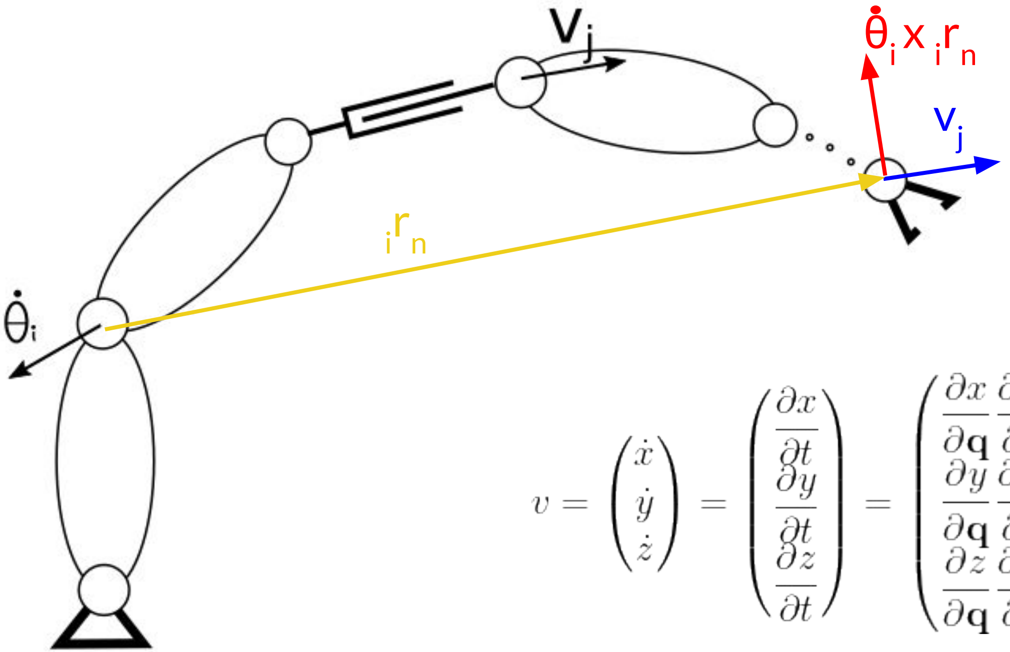
Para J_v : $\rightarrow$ Diferenciación directa



$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

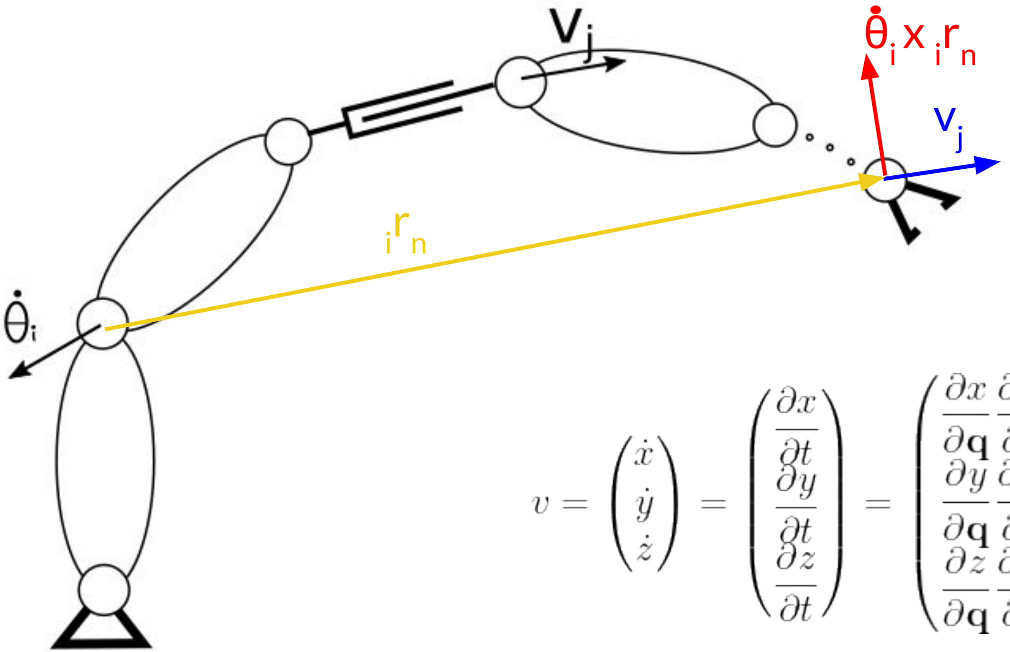
Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

Para J_v : → Diferenciación directa

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

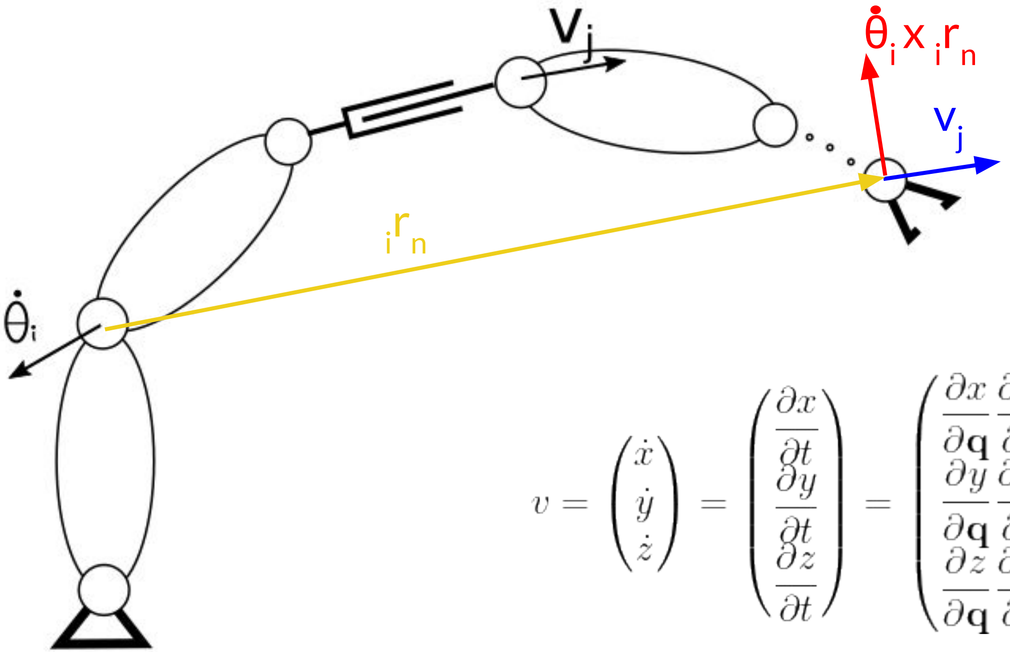
Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

Para J_v : → Diferenciación directa

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

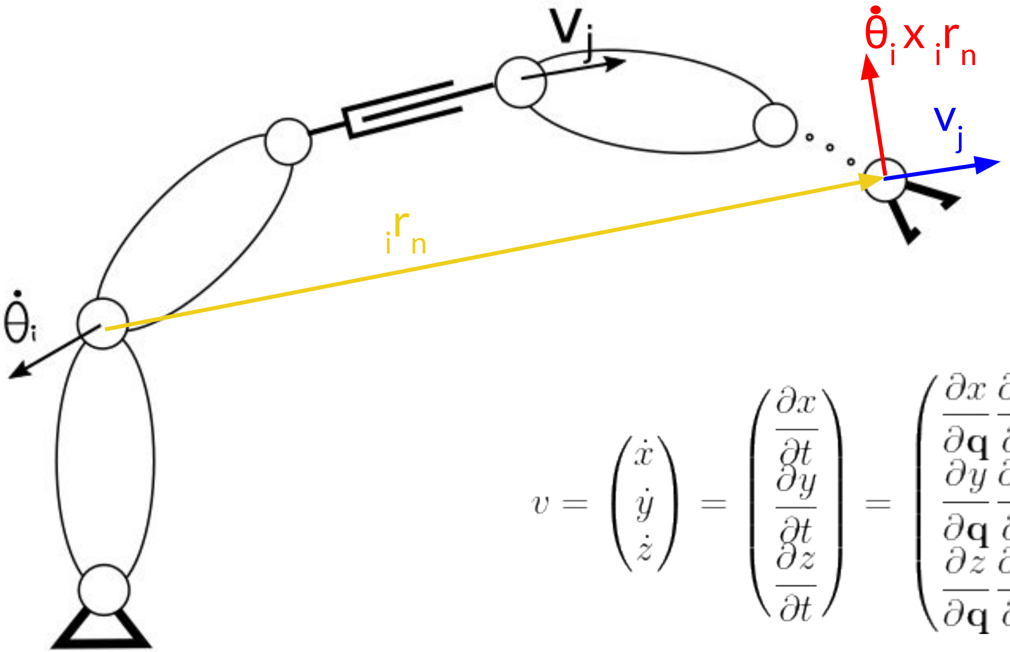
Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

Para J_v : → Diferenciación directa

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

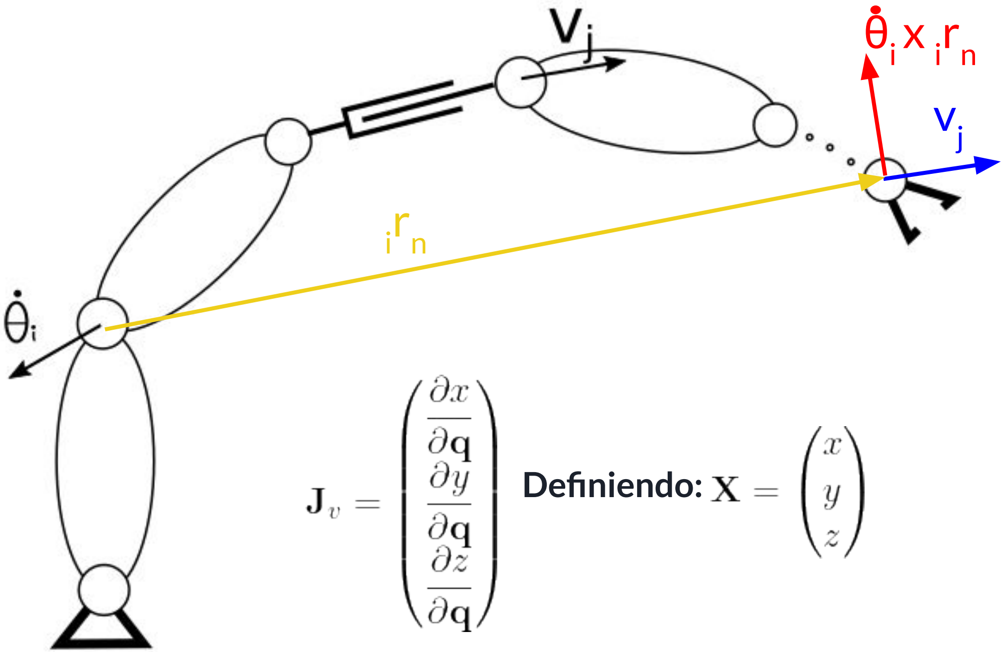
Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices $\boldsymbol{J_v}$ **y** $\boldsymbol{J_w}$

Para $\boldsymbol{J_v}$ **:** → Diferenciación directa

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbf{J}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

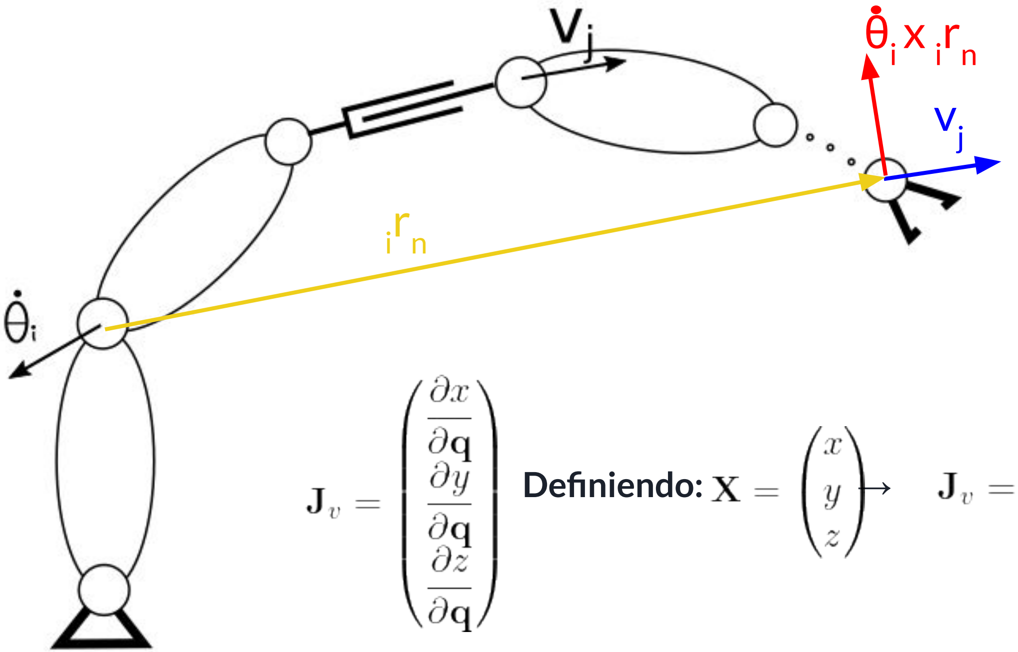
Para J_v : $\rightarrow$ Diferenciación directa

$$\mathbf{J}_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

Definiendo: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

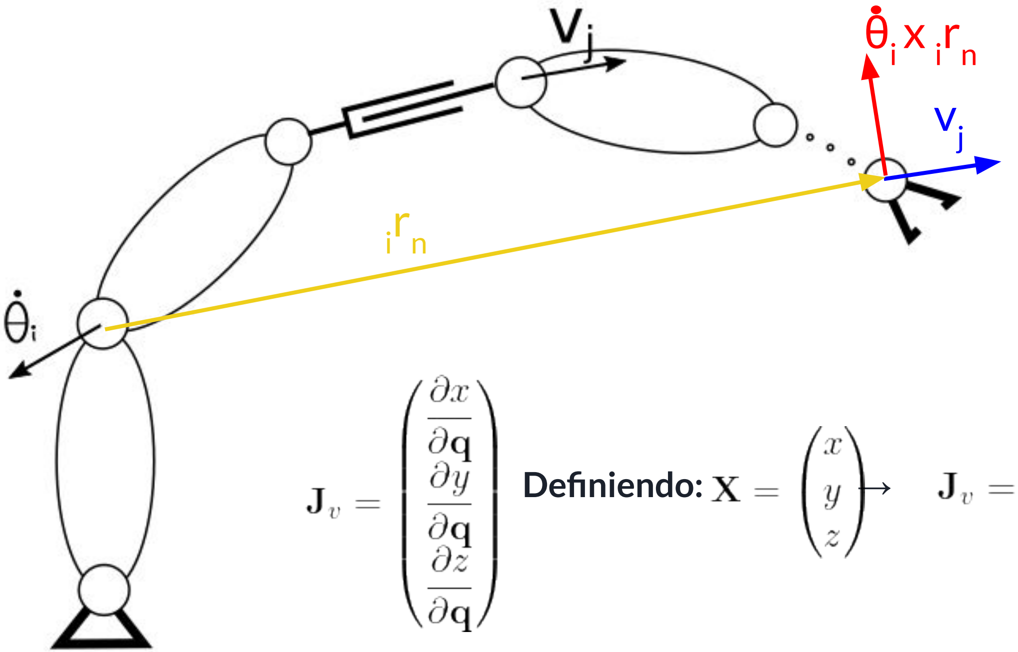
Para J_v : $\rightarrow$ Diferenciación directa

$$\mathbf{J}_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

Definiendo: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{J}_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \dots & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \end{pmatrix}$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Afortunadamente, existen **simplificaciones** para calcular las matrices J_v y J_w

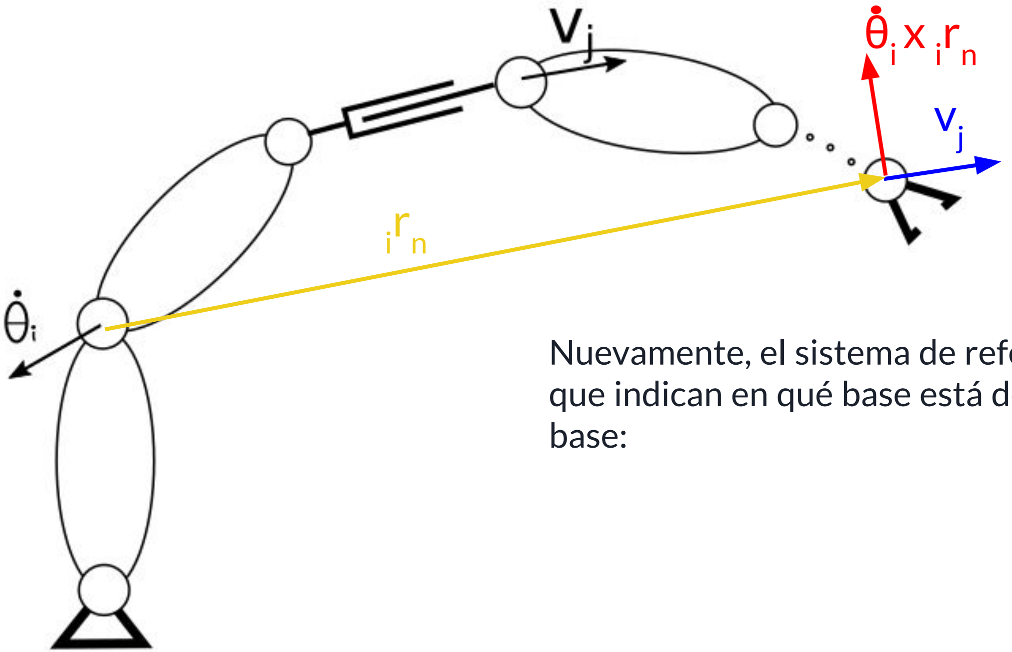
Para J_v : → Diferenciación directa

$$\mathbf{J}_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

Definiendo: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{J}_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \dots & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial q_2} & \dots & \dfrac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_2 & \dots & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_n \end{pmatrix}$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

Consideremos un robot genérico que posee tanto articulaciones prismáticas como de revolución.



GENERALIZANDO:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon} \mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon} \mathbf{Z}_1 & \ldots & \bar{\epsilon} \mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, el sistema de referencia en el que se estén escribiendo los vectores son los que indican en qué base está definido el Jacobiano, por lo tanto, prestar **ATENCIÓN**, a la base:

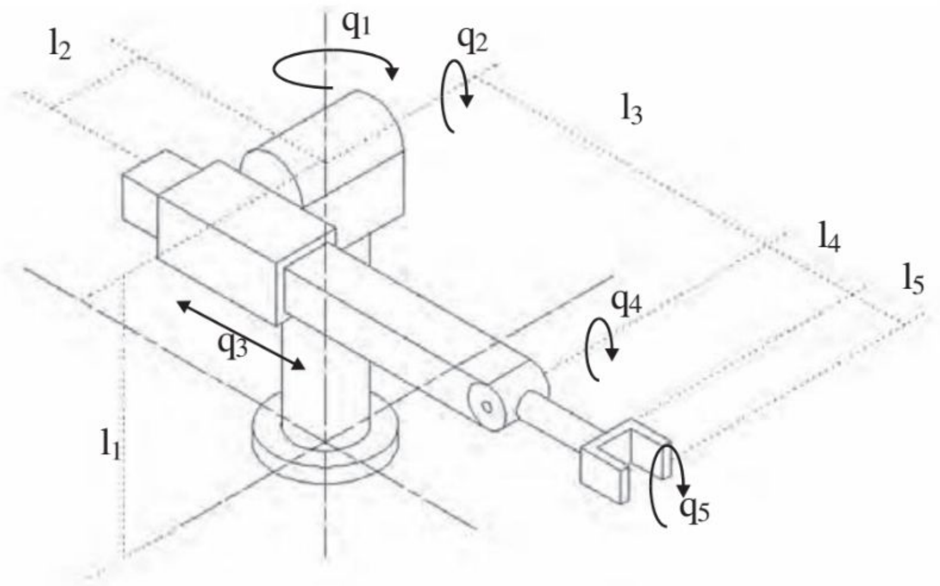
$${}_0\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ {}_0\mathbf{X}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial\ {}_0\mathbf{X}_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial\ {}_0\mathbf{X}_n}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}\ {}_0\mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon}\ {}_0\mathbf{Z}_2 & \ldots & \bar{\epsilon}\ {}_0\mathbf{Z}_n \end{pmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH (${}_{i\text{-}1}A_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano ${}_0J_n$?

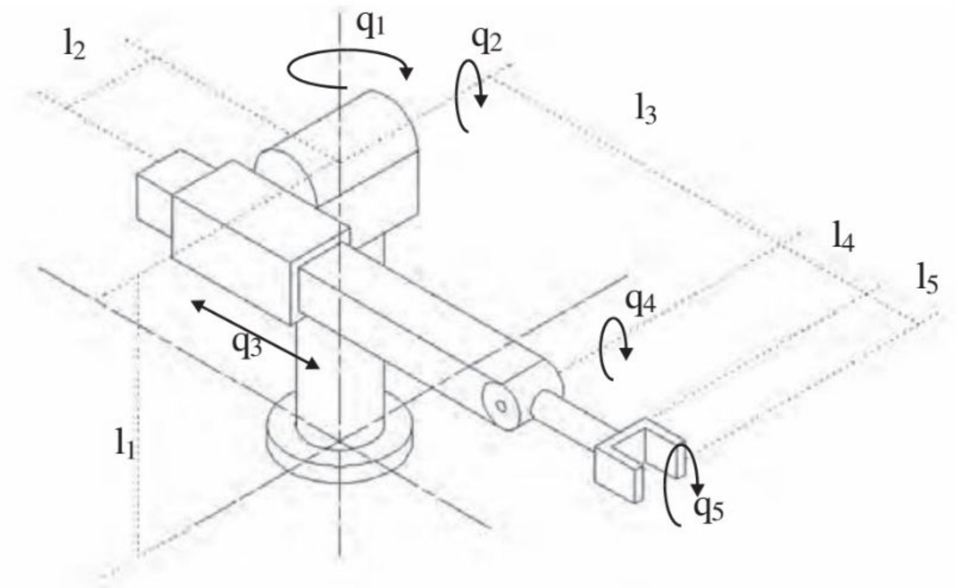


Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH ($_{i\text{-}1}\boldsymbol{A}_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano $_0\boldsymbol{J}_n$?



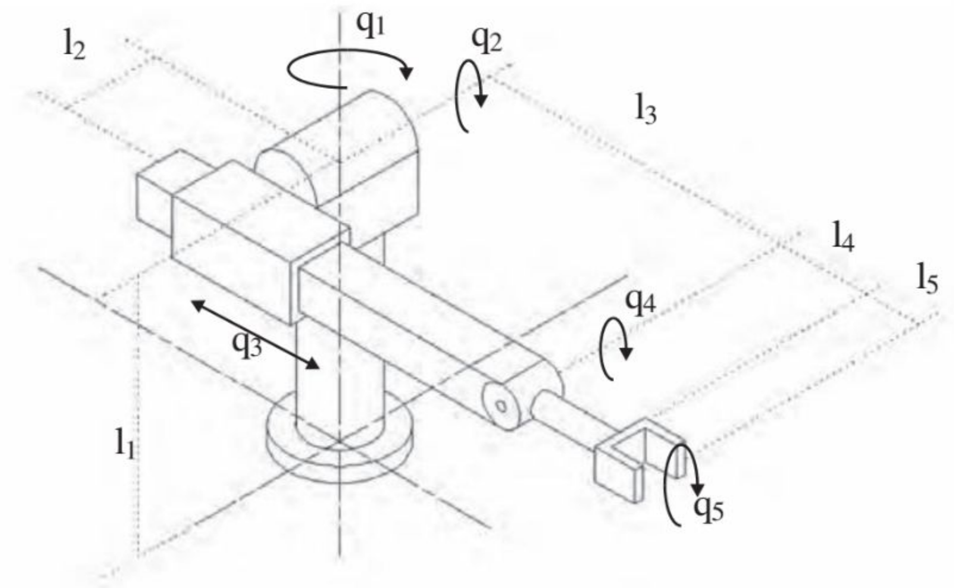
Tenemos: $_0A_1$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_1$]

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH (${}_{i\text{-}1}\boldsymbol{A}_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano ${}_{0}\boldsymbol{J}_{n}$?



Tenemos: ${}_0A_1$ → Guardo columna 3 [${}_0\mathbf{Z}_1$]

Calculamos:

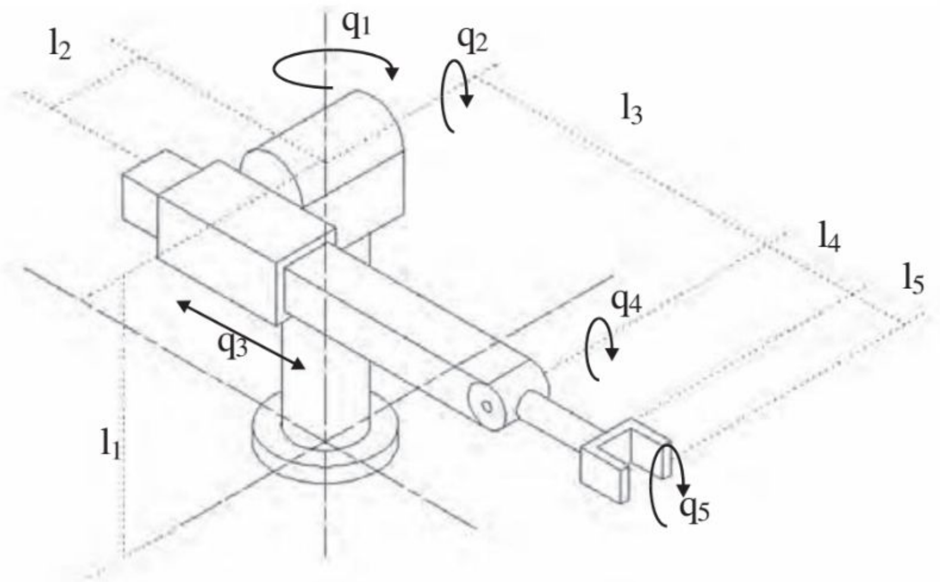
${}_0A_2 = {}_0A_1\,{}_1A_2$ → Guardo columna 3 [${}_0\mathbf{Z}_2$]

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH ($_{i\text{-}1}\boldsymbol{A}_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano $_0\boldsymbol{J}_n$?



Tenemos: $_0A_1$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_1}$]

Calculamos:

$_0A_2 = {_0A_1}\,{_1A_2}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_2}$]

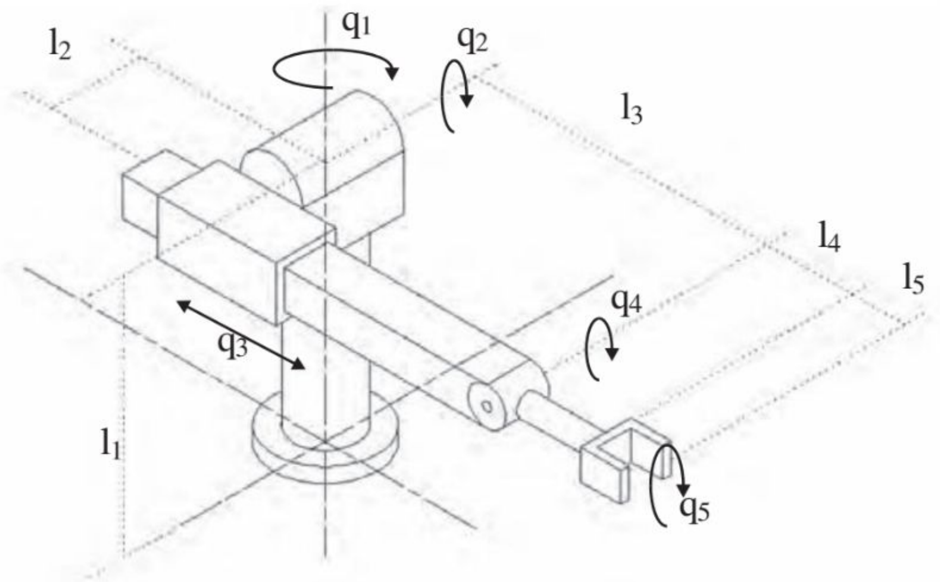
$_0A_3 = {_0A_2}\,{_2A_3}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_3}$]

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH ($_{i-1}\boldsymbol{A}_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano $_0\boldsymbol{J}_n$?



Tenemos: $_0A_1$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_1$]

Calculamos:

$_0A_2 = {_0A_1}\,{_1A_2}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_2$]

$_0A_3 = {_0A_2}\,{_2A_3}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_3$]

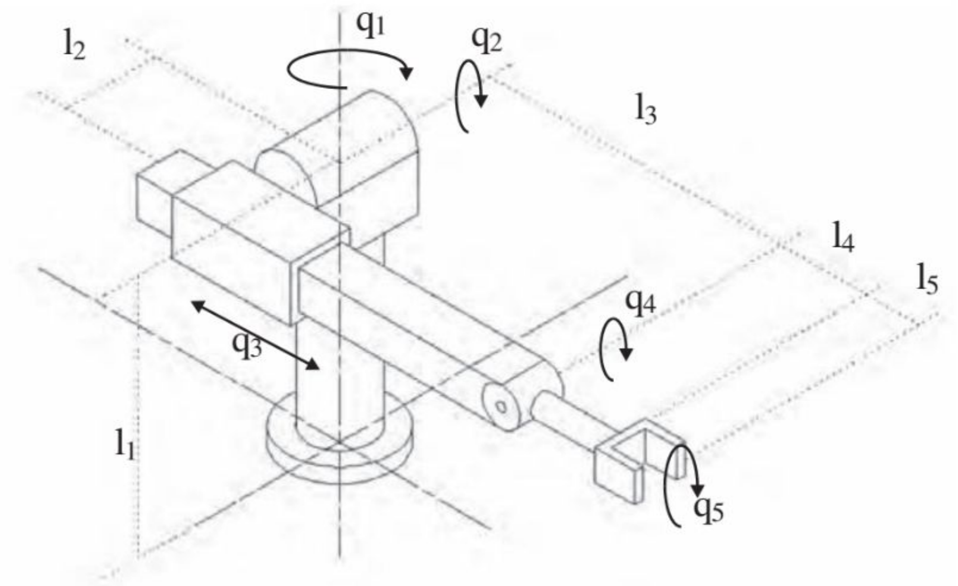
$_0A_4 = {_0A_3}\,{_3A_4}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_4$]

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH ($_{i\text{-}1}A_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano $_0J_n$?



Tenemos: $_0A_1$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_1}$]

Calculamos:

$_0A_2 = {_0A_1}\,{_1A_2}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_2}$]

$_0A_3 = {_0A_2}\,{_2A_3}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_3}$]

$_0A_4 = {_0A_3}\,{_3A_4}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_4}$]

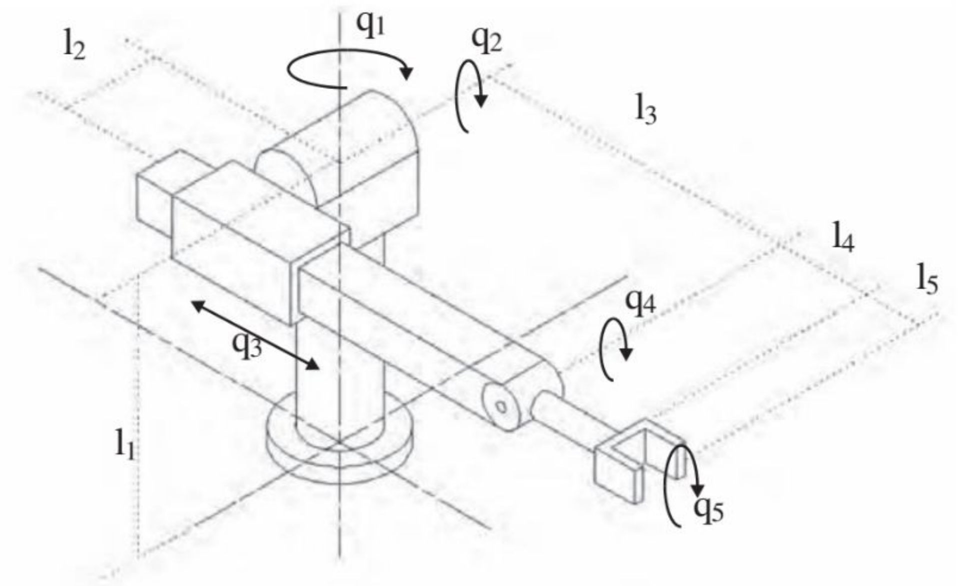
$_0A_5 = {_0A_4}\,{_4A_5}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_5}$]

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH ($_{i\text{-}1}\boldsymbol{A}_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano $_0\boldsymbol{J}_n$?



Tenemos: $_0A_1$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_1}$]

Calculamos:

$_0A_2 = {}_0A_1\,{}_1A_2$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_2}$]

$_0A_3 = {}_0A_2\,{}_2A_3$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_3}$]

$_0A_4 = {}_0A_3\,{}_3A_4$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_4}$]

$_0A_5 = {}_0A_4\,{}_4A_5$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_5}$]

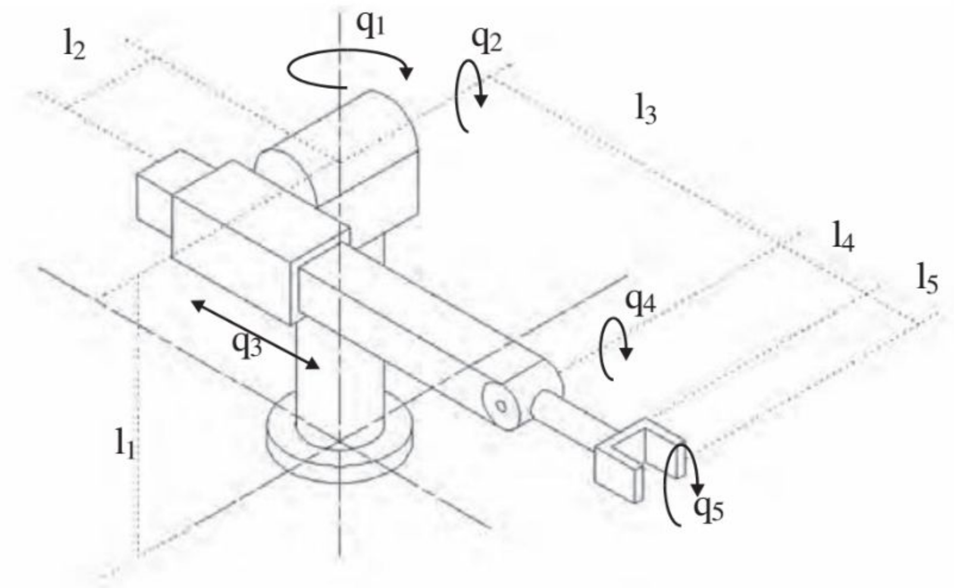
$_0A_n = {}_0A_5\,{}_5A_n$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z_n}$]

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH ($_{i\text{-}1}\boldsymbol{A}_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano $_0\boldsymbol{J}_n$?



Tenemos: $_0A_1$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_1$]

Calculamos:

$_0A_2 = {_0A_1}\,{_1A_2}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_2$]

$_0A_3 = {_0A_2}\,{_2A_3}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_3$]

$_0A_4 = {_0A_3}\,{_3A_4}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_4$]

$_0A_5 = {_0A_4}\,{_4A_5}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_5$]

$_0A_n = {_0A_5}\,{_5A_n}$ → Guardo columna 3 [$_0\mathbf{Z}_n$]

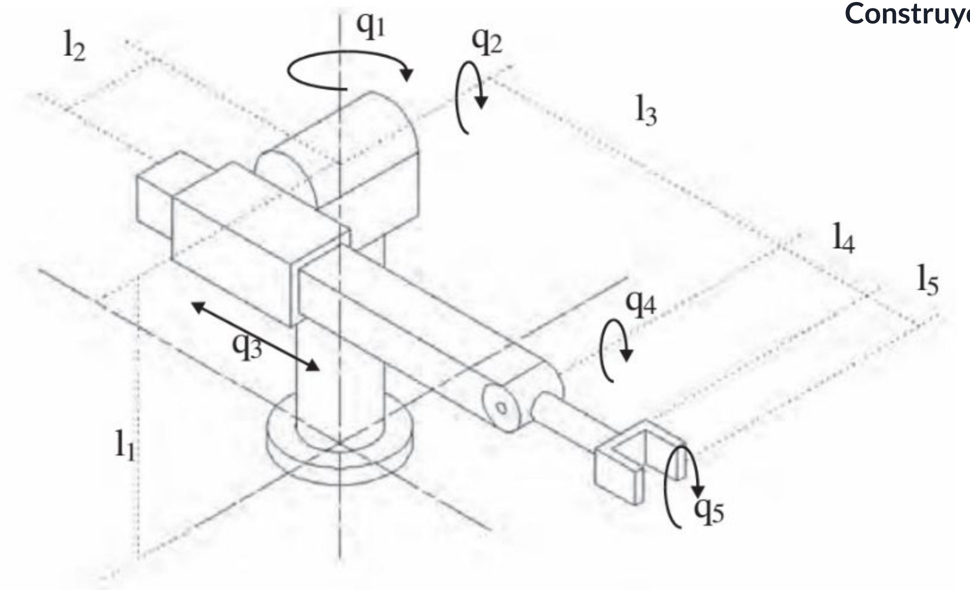
→ De la última columna saco **p =** ($_0p_x\ {_0p_y}\ {_0p_z}$)

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH (${}_{i\text{-}1}A_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano ${}_0J_n$?



Construyo:

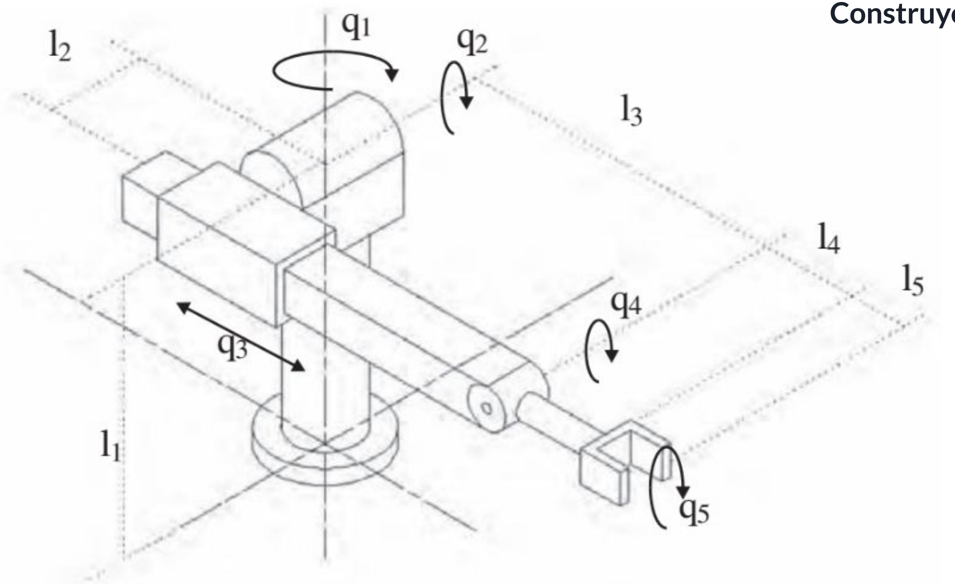
$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_5} \\ {}_0\mathbf{Z}_1 & {}_0\mathbf{Z}_2 & 0 & {}_0\mathbf{Z}_4 & {}_0\mathbf{Z}_5 \end{pmatrix}$$

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH (${}_{i\text{-}1}A_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano ${}_0J_n$?



Construyo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_5} \\ {}_0\mathbf{Z}_1 & {}_0\mathbf{Z}_2 & 0 & {}_0\mathbf{Z}_4 & {}_0\mathbf{Z}_5 \end{pmatrix}$$

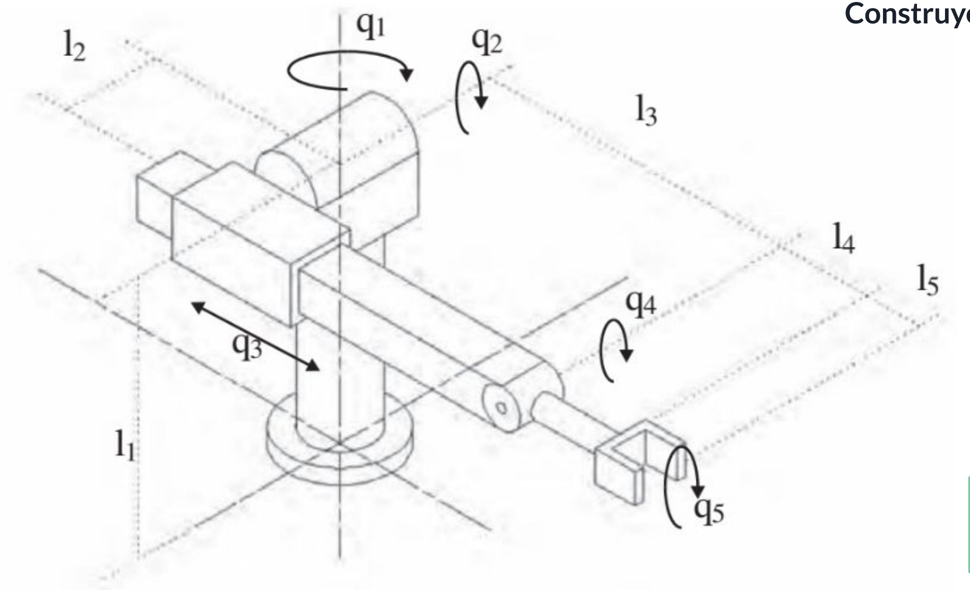
¿Por qué hay un cero acá?

Jacobiano Geométrico - Forma explícita

EJEMPLO

Para el robot de 5GDL de la figura asumamos que conocemos todas las MTH (${}_{i\text{-}1}A_i$) porque armamos la tabla.

Cómo se obtiene el Jacobiano ${}_0J_n$?



Construyo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_5} \\ {}_0\mathbf{Z}_1 & {}_0\mathbf{Z}_2 & 0 & {}_0\mathbf{Z}_4 & {}_0\mathbf{Z}_5 \end{pmatrix}$$

¿Por qué hay un cero acá?

Porque la expresión era $\bar{\epsilon}\ {}_0\mathbf{Z}_i$

Singularidades cinemáticas

Se denominan ***configuraciones singulares*** de un robot a aquellas en las que el determinante de su matriz Jacobiana se anula.

Es importante encontrarlas por las siguientes razones:

- Son configuraciones donde la **movilidad es reducida**
- En dichas singularidades pueden existir **infinitas soluciones del problema inverso**
- En los alrededores de las singularidades, **pequeñas velocidades de la herramienta pueden representar grandes velocidades de los actuadores**

Se las clasifica en dos grupos:

- **De frontera:** cuando el manipulador está en sus límites de recorrido (tanto en máxima extensión como retracción).
- **Internas:** son causadas generalmente cuando dos o más ejes se alinean.

Desacople de singularidades

El cálculo de singularidades mediante el determinante del jacobiano puede ser complicado para manipuladores con varios grados de libertad. Por lo tanto, es habitual su estudio mediante el ***desacoplamiento de singularidades***.

Esto se basa en el mismo fenómeno que el desacoplamiento cinemático, es decir, para aquellos manipuladores en los que **los ejes de los 3 últimas articulaciones se cortan en un punto** (muñeca).

Es posible analizar las singularidades en dos partes, cálculo de **singularidades para un brazo** y **para su muñeca.**

Desacople de singularidades

Consideremos como ejemplo un robot de 6GDL de los cuales los últimos 3 GDL cumplen con lo solicitado para aplicar el desacople de singularidades.

Recordando el resultado obtenido para el Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \dots & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Desacople de singularidades

Consideremos como ejemplo un robot de 6GDL de los cuales los últimos 3 GDL cumplen con lo solicitado para aplicar el desacople de singularidades.

Recordando el resultado obtenido para el Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \cdots & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Para simplificar, si consideramos que el Jacobiano está calculado en el **sistema de referencia de la muñeca**, cuál es la forma que toman los últimos 3 vectores de la matriz ***J*** (J_{12})?

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}$$

Desacople de singularidades

Consideremos como ejemplo un robot de 6GDL de los cuales los últimos 3 GDL cumplen con lo solicitado para aplicar el desacople de singularidades.

Recordando el resultado obtenido para el Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \cdots & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Para simplificar, si consideramos que el Jacobiano está calculado en el **sistema de referencia de la muñeca**, cuál es la forma que toman los últimos 3 vectores de la matriz ***J*** (J_{12})?

0

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}$$

Desacople de singularidades

Consideremos como ejemplo un robot de 6GDL de los cuales los últimos 3 GDL cumplen con lo solicitado para aplicar el desacople de singularidades.

Recordando el resultado obtenido para el Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \dots & \epsilon\mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Para simplificar, si consideramos que el Jacobiano está calculado en el **sistema de referencia de la muñeca**, cuál es la forma que toman los últimos 3 vectores de la matriz ***J*** (J_{12})?

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \cancelto{0}{\boldsymbol{J}_{12}} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante del jacobiano se puede simplificar a:

$$det(\mathbf{J}) = det(\mathbf{J}_{11})det(\mathbf{J}_{22})$$

Desacople de singularidades

Consideremos como ejemplo un robot de 6GDL de los cuales los últimos 3 GDL cumplen con lo solicitado para aplicar el desacople de singularidades.

Recordando el resultado obtenido para el Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 & \cdots & \bar{\epsilon}\mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Para simplificar, si consideramos que el Jacobiano está calculado en el **sistema de referencia de la muñeca**, cuál es la forma que toman los últimos 3 vectores de la matriz ***J*** (J_{12})?

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \cancel{\boldsymbol{J}_{12}} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}$$

0

Entonces el determinante del jacobiano se puede simplificar a:

$$det(\mathbf{J}) = det(\mathbf{J}_{11})det(\mathbf{J}_{22}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det(\mathbf{J}_{11}) = 0 \;\; o \;\; det(\mathbf{J}_{22}) = 0$$

Produciéndose el ***desacoplamiento de singularidades***

Desacople de singularidades

Por lo tanto:

$det(\mathbf{J}_{11}) = 0$ Considera las singularidades del brazo.

$det(\mathbf{J}_{22}) = 0$ Considera las singularidades de la muñeca

Vale la pena resaltar que el desacoplamiento de singularidades solamente sirve para el análisis de singularidades, pero no puede escribirse: $\mathbf{v} = \mathbf{J}_{11}\dot{\mathbf{q}}$ ***ni*** $\omega = \mathbf{J}_{22}\dot{\mathbf{q}}$

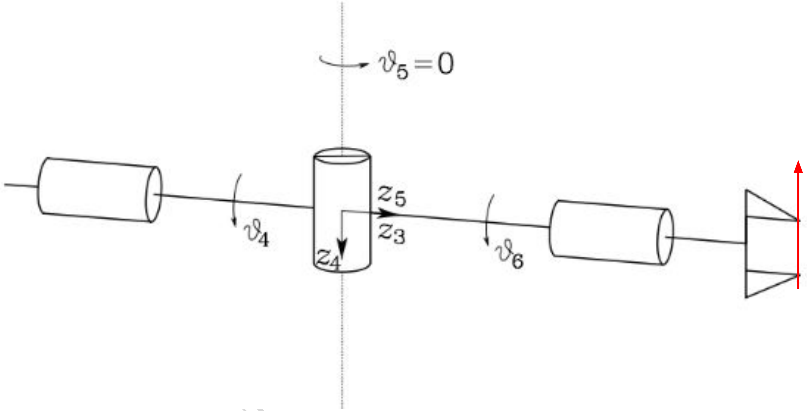
Desacople de singularidades

Singularidad de la muñeca:

Inspeccionando el bloque $\mathbf{J}_{22}$ de: $J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$ sabemos que para una muñeca toma la forma de $[{}_0\mathbf{z}_3 \ \ {}_0\mathbf{z}_4 \ \ {}_0\mathbf{z}_5]$

Se puede reconocer entonces que se producirá una singularidad de tipo ***interna*** cuando ${}_0\mathbf{z}_3$ se alinea con ${}_0\mathbf{z}_5$.

Esto provoca una limitación de movilidad en la dirección **roja,** por lo tanto hay que prestar especial cuidado a



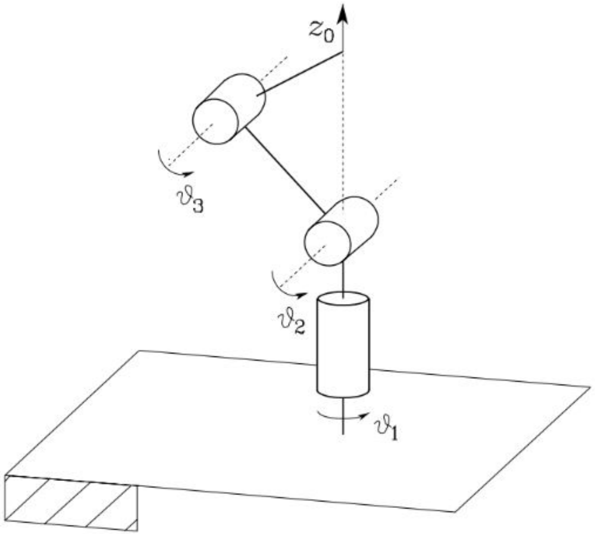
las configuraciones cercanas a la mostradas, pues dificulta en creciente el movimiento, aumentando las cargas y las velocidades necesarias.

Desacople de singularidades

Singularidad del brazo:

Las singularidades de brazo son características inherentes a la configuración de la cadena cinemática.

Consideremos el brazo antropomórfico de la figura:



Se puede demostrar que $det(\mathbf{J}_{11}) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23})$

El cual se anula sii: $\sin(q_3) = 0$

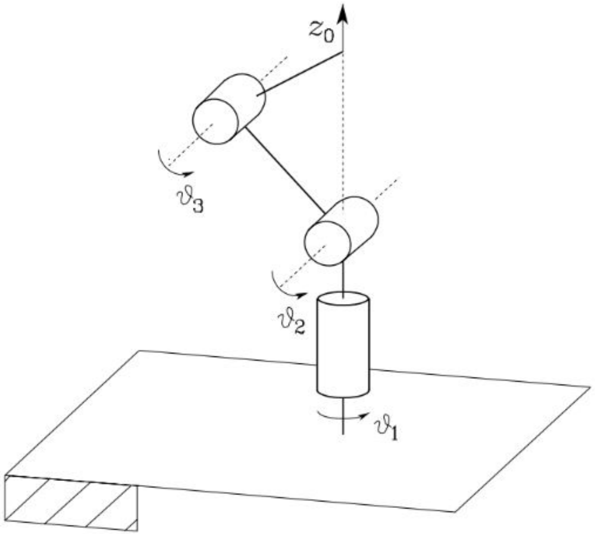
$$a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$$

Desacople de singularidades

Singularidad del brazo:

Las singularidades de brazo son características inherentes a la configuración de la cadena cinemática.

Consideremos el brazo antropomórfico de la figura:



Se puede demostrar que $det(\mathbf{J}_{11}) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23})$

El cual se anula sii: $\boxed{\sin(q_3) = 0}$

$$a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$$

En el primer caso sin(q_3)=0 sii $\boldsymbol{q_3 = k\pi}$ → Esto implica alcanzar el límite del espacio de trabajo

→ ***Singularidad de frontera***

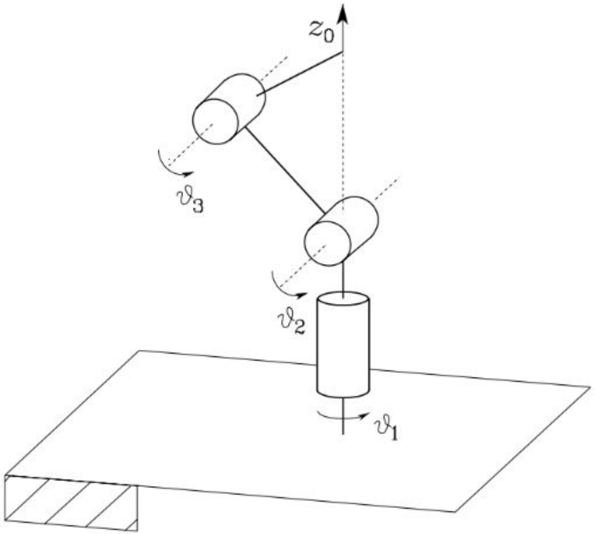
→ No se puede mover instantáneamente en **x**

Desacople de singularidades

Singularidad del brazo:

Las singularidades de brazo son características inherentes a la configuración de la cadena cinemática.

Consideremos el brazo antropomórfico de la figura:



Se puede demostrar que $det(\mathbf{J}_{11}) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23})$

El cual se anula sii: $\sin(q_3) = 0$

$$\boxed{a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0}$$

El primer caso ocurre cuando q_2=90 y q_3=0 → Todo el brazo se encuentra horizontal

El segundo caso $a_2c_2 + a_3c_{23}=0$ → ***Singularidad de hombro (interna)***

→ Un movimiento en q_1 no genera movimiento de la herramienta

→La cinemática admite infinitas soluciones

Singularidades

Es importante notar que las singularidades de los manipuladores son generalmente fáciles de ubicar en los espacios de trabajo y deberán ser evitadas cuando se calculen trayectorias.

FRI - Fundamentos de Robótica Industrial

FIN!

Todo listo para realizar la **Entrega 2** del Proyecto