

# Procesamiento digital de señales de audio

## Filtros digitales

Instituto de Ingeniería Eléctrica  
Facultad de Ingeniería



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

### ① Conceptos básicos

- Caracterización e implementación
- Clasificación y parámetros
- Respuesta en frecuencia

### ② Filtros corrientes en procesamiento de audio

- Filtro de media móvil
- Filtros IIR de primer y segundo orden
- Filtros de Chebyshev

# Introducción

## Aplicaciones de filtros digitales

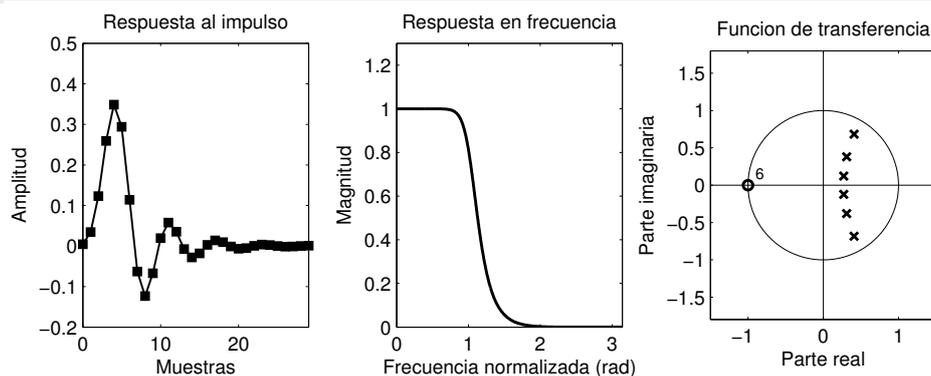
- Separación de señales que fueron combinadas desafortunadamente
  - ruido
  - interferencias provenientes de otros sistemas
- Recuperación de señales distorsionadas de alguna forma
  - por ejemplo, al ser transmitidas a través de un canal de comunicación
- Análisis de señales de audio
  - procesamiento en bandas de frecuencia al filtrar con un banco de filtros
- Síntesis de sonido: creación o modificación de señales para moldear espectros o formas de onda y lograr el efecto auditivo buscado.
  - síntesis por modelado físico
- Efectos de audio
  - reverb, chorus, flanger, phaser

## Caracterización de filtros LTI

### Algunas formas de caracterizar un filtro

- Respuesta al impulso
- Respuesta en frecuencia
- Función de transferencia
  - Coeficientes de recursión
  - Polos y Ceros

A partir de cualquiera de las caracterizaciones, queda determinada la salida del filtro ante cualquier entrada.



# Caracterización de filtros LTI

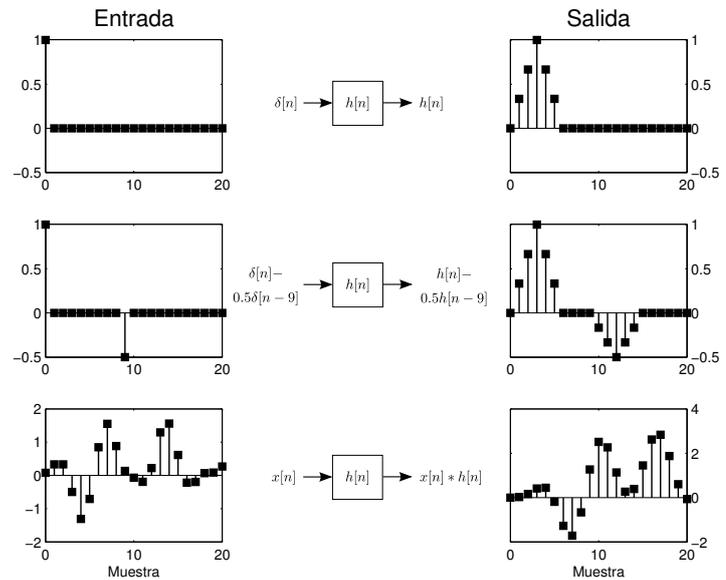
## Respuesta al impulso

### propio. de superposición

La salida  $y[n]$  se calcula como el producto convolución entre la respuesta al impulso  $h[n]$  y la entrada  $x[n]$ .

$$y[n] = (x * h)[n] \\ = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n - k]$$

[caso causal,  $h[n] = 0$  si  $n < 0$ ]



# Caracterización de filtros LTI

## Respuesta en frecuencia

- La respuesta en frecuencia es la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de la respuesta al impulso,

$$h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\theta n}$$

- Las transformadas de Fourier de la entrada y la salida ( $X(e^{j\theta})$  y  $Y(e^{j\theta})$  respectivamente) del sistema se relacionan por

$$Y(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) X(e^{j\theta})$$

### Observaciones

- En el caso general, es una función que toma valores complejos.
- Es periódica de período  $2\pi$ .
- La representación en notación polar muestra de forma clara las propiedades del sistema.

# Caracterización de filtros LTI

## Función de transferencia

- La función de transferencia es la Transformada  $\mathcal{Z}$  de la respuesta al impulso,

$$h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

- Las transformadas  $\mathcal{Z}$  de la entrada y la salida del sistema se relacionan por

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

- La función de transferencia de un filtro recursivo es una función racional (cociente de polinomios),

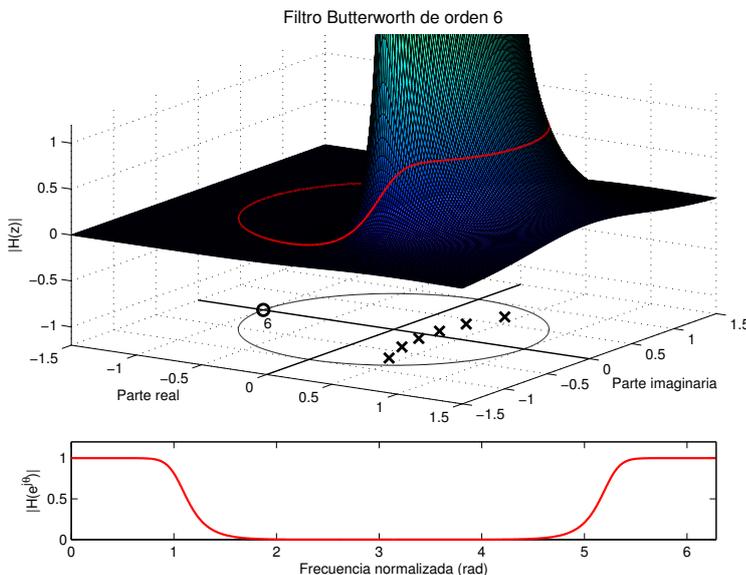
$$y[n] = -a_1 y[n-1] - \dots - a_N y[n-N] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

- Si la transformada  $Z$  es racional, queda (casi) completamente especificada mediante el diagrama de polos y ceros.

# Caracterización de filtros LTI

## Función de transferencia



La respuesta en frecuencia se obtiene evaluando la función de transferencia en la circunferencia unidad,

$$H(e^{j\theta}) = H(z)|_{z=e^{j\theta}}$$

# Implementación de filtros

## Convolución

- Convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso del filtro.
- La salida del filtro en cada instante es un promedio ponderado de la muestra actual y muestras pasadas de la entrada.

### Respuesta al impulso finita (FIR)

$$y[n] = (x * h)[n]$$

$$= \sum_{k=0}^M h[k]x[n - k]$$

## Ecuación en recurrencia

- El filtro se define por los coeficientes de recurrencia.
- La salida en cada instante involucra además de muestras de la entrada, muestras pasadas de la salida.

### Respuesta al impulso infinita (IIR)

$$y[n] = a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2]$$

$$+ b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2]$$

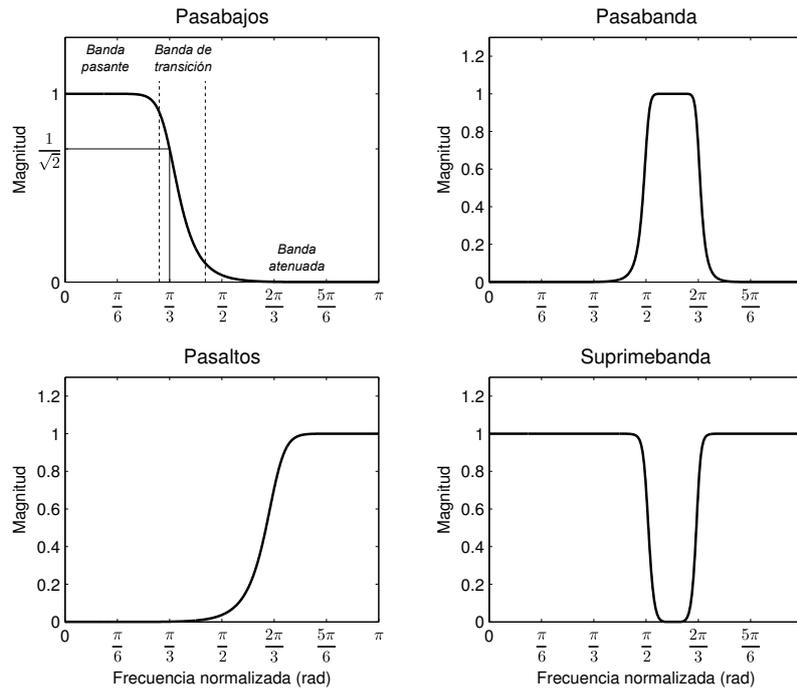
# Implementación de filtros

## Comparación entre filtros FIR e IIR

Característica	FIR	IIR
Implementación	Producto convolución	Ecuación en recurrencia
Costo computacional	Alto La respuesta al impulso tiene cientos o miles de muestras.	Bajo A lo sumo decenas de coeficientes de recurrencia.
Diseño	Muy flexible y sencillo sinc inventanado muestreo en frecuencia	Poco flexible y difícil Transformaciones de prototipos analógicos
Respuesta en fase	Pueden hacerse de fase lineal Respuesta al impulso simétrica	Fase no lineal Respuesta al impulso infinita

# Filtros selectores de bandas de frecuencia

Ejemplo de filtro Butterworth de orden 6 como selector de bandas de frecuencias



# Filtros selectores de bandas de frecuencia

## Filtros selectores de frecuencias

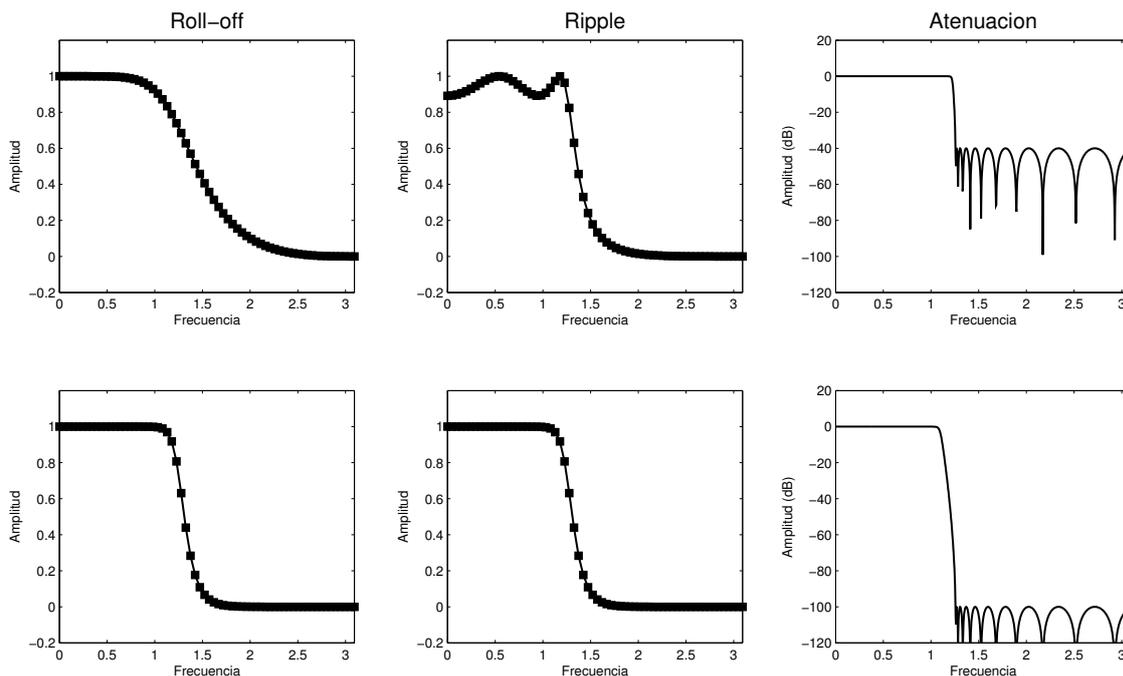
El objetivo es permitir pasar inalterada cierta banda de frecuencias y bloquear completamente el resto. Hay cuatro tipos básicos: pasa-bajos, pasa-altos, pasa-banda y suprime-banda.

## Clasificación de las regiones de filtros selectores

Banda pasante	Rango de frecuencias que el filtro permite pasar sin alterar.
Banda atenuada	Rango de frecuencias que el filtro bloquea.
Banda de transición	Región entre la banda pasante y la banda atenuada.
Frecuencia de corte	Frecuencia entre la banda pasante y la banda de transición.

# Filtros selectores de bandas de frecuencia

## Parámetros de la respuesta en frecuencia



# Filtros selectores de bandas de frecuencia

## Parámetros de la respuesta en frecuencia

Parámetros que miden la calidad del filtro como selector de frecuencias.

### Roll-off

Es el ancho de la banda de transición. Un filtro de roll-off rápido significa que la banda de transición es angosta. Para separar componentes de frecuencia cercanos, el roll-off debe ser rápido.

### Ripple en la banda pasante

Amplitud de las oscilaciones en la banda pasante de la respuesta en magnitud. Para no alterar la magnitud de los componentes espectrales de la banda pasante, el filtro no debe tener ripple.

### Atenuación en la banda atenuada

Es deseable buena atenuación en la banda atenuada para eliminar los componentes espectrales en esa región.

# Respuesta en frecuencia

## Efecto de la respuesta en magnitud y fase

Las transformadas de Fourier de la entrada y la salida del sistema se relacionan por:

$$Y(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) X(e^{j\theta})$$

Con la respuesta en frecuencia expresada en notación polar, la magnitud y la fase de la transformada de Fourier de la entrada y la salida están dadas por:

$$\begin{aligned} |Y(e^{j\theta})| &= |H(e^{j\theta})| |X(e^{j\theta})| \\ \angle Y(e^{j\theta}) &= \angle H(e^{j\theta}) + \angle X(e^{j\theta}) \end{aligned}$$

Cada componente espectral de la entrada aparece a la salida con las siguientes modificaciones:

- La magnitud queda multiplicada por la magnitud de la respuesta en frecuencia en la frecuencia del componente.
- A la fase se le suma la fase de la respuesta en frecuencia en la frecuencia del componente.

# Respuesta en frecuencia

## Efecto de la respuesta en magnitud y fase

Si la magnitud y fase del filtro para cierta frecuencia es

$$|H(e^{j\theta_0})| = G_0$$

$$\angle H(e^{j\theta_0}) = \phi_0$$

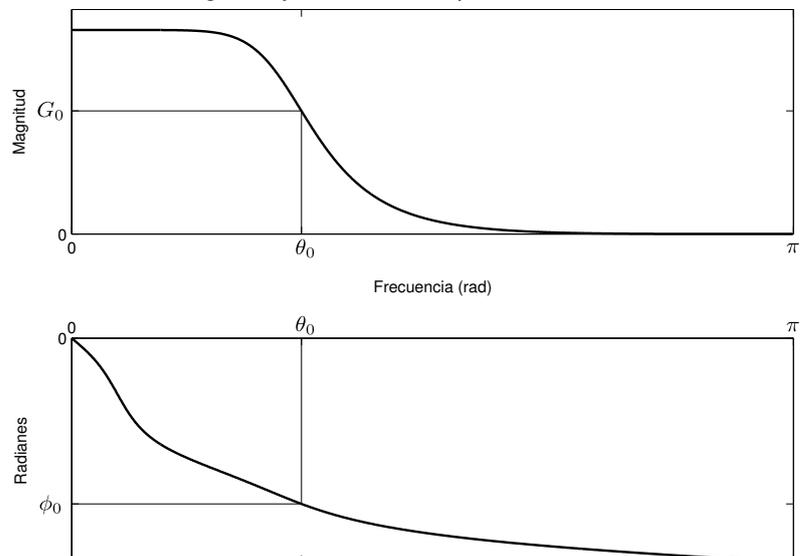
**Entrada**

$$x[n] = \text{sen}(\theta_0 n)$$

**Salida**

$$y[n] = G_0 \text{sen}(\theta_0 n + \phi_0)$$

Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia



# Respuesta en frecuencia

## Respuesta en fase

### Entrada

$$x[n] = \text{sen}(\theta_0 n)$$

El cambio de fase se puede considerar como un retardo de la señal.

**Retardo de fase:** cantidad de muestras que se retarda cada frecuencia.

Otra forma de ver lo mismo: la fase dividida  $2\pi$  indica la cantidad de periodos que se desplaza el componente.

### Salida

$$y[n] = G_0 \text{sen}(\theta_0 n + \phi_0)$$

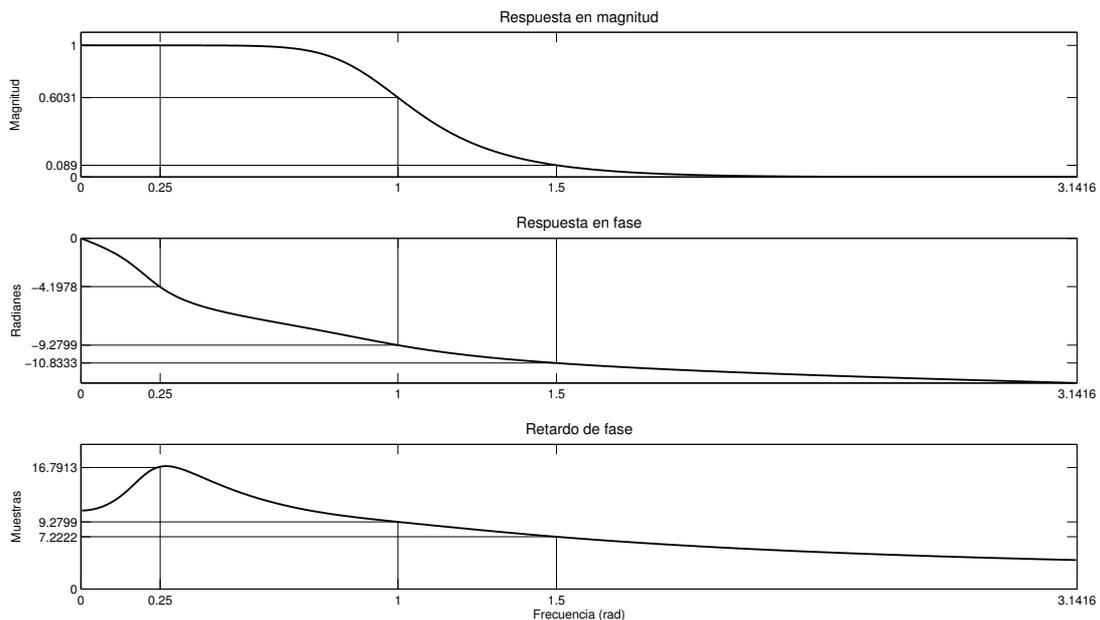
$$y[n] = G_0 \text{sen} \left[ \theta_0 \left( n - \left( -\frac{\phi_0}{\theta_0} \right) \right) \right]$$

$$\tau_\phi = -\frac{\phi(\theta)}{\theta}$$

$$y[n] = G_0 \text{sen} \left[ \theta_0 n + 2\pi \left( \frac{\phi_0}{2\pi} \right) \right]$$

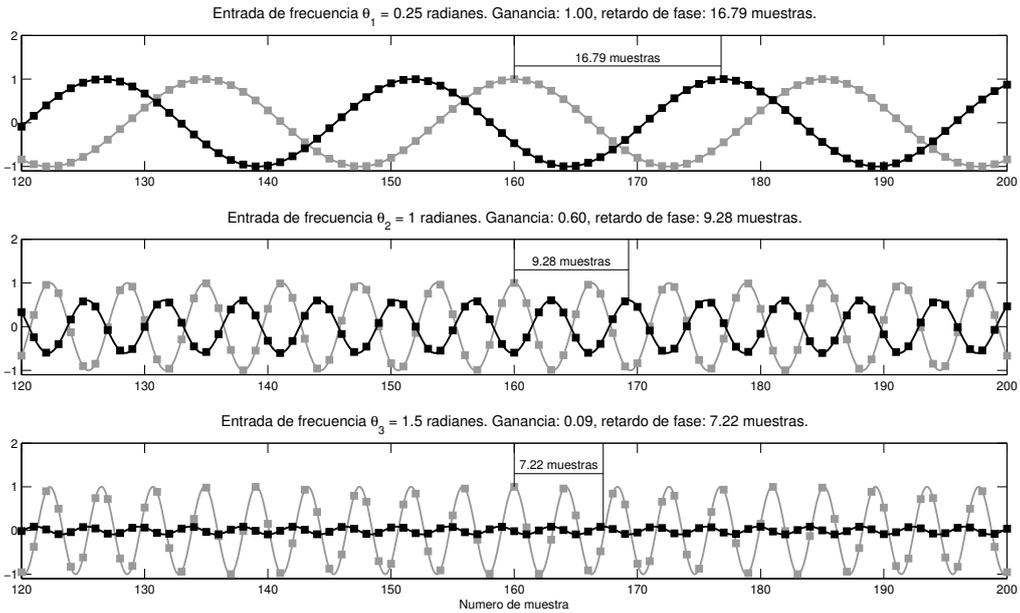
# Respuesta en frecuencia

## Ejemplo: efecto de la respuesta en magnitud y fase



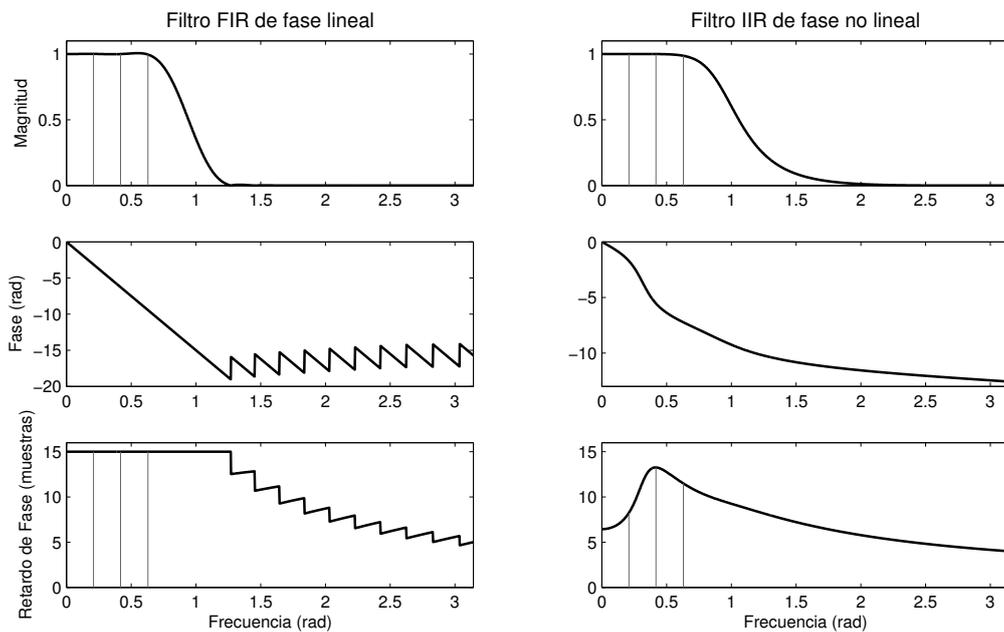
# Respuesta en frecuencia

## Ejemplo: efecto de la respuesta en magnitud y fase



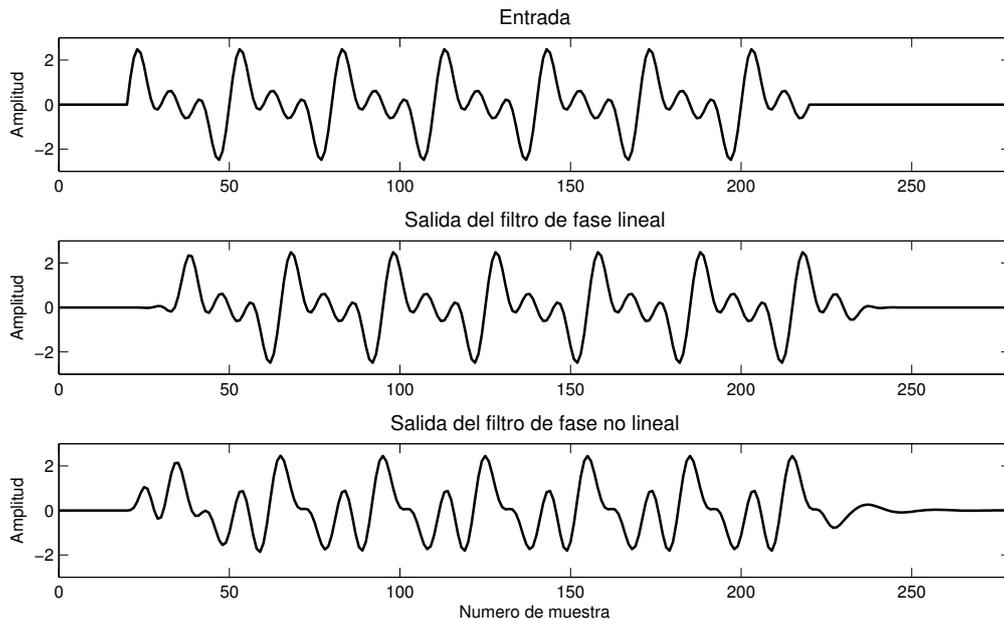
# Respuesta en frecuencia

## Ejemplo: distorsión de fase de filtros de fase no lineal



# Respuesta en frecuencia

Ejemplo: distorsión de fase de filtros de fase no lineal



# Respuesta en frecuencia

Filtros de fase lineal

## Causas

La respuesta en fase es lineal para todas las frecuencias si la respuesta al impulso es simétrica o antisimétrica respecto a una muestra cualquiera.

Se deduce a partir de las siguientes propiedades de la DTFT:

$$\begin{aligned} h[n] &\xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\theta}) \\ \text{real y par} &\quad \quad \quad \text{real y par} \\ h[n - n_0] &\xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\theta})e^{-j\theta n_0} \end{aligned}$$

## Consecuencias

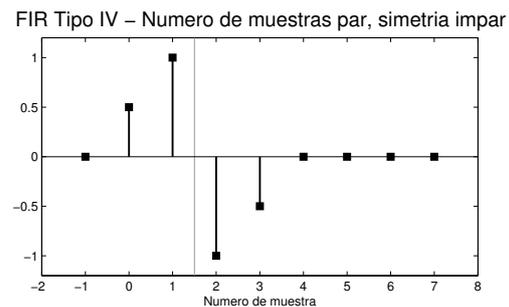
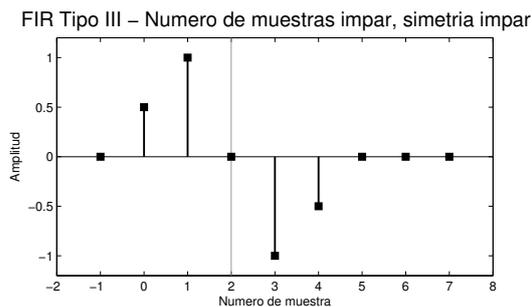
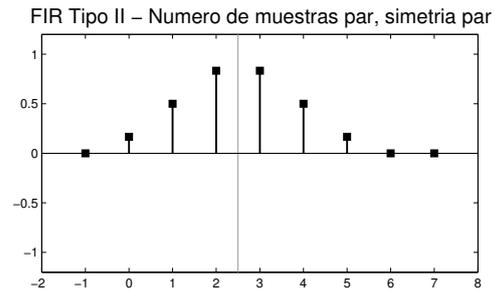
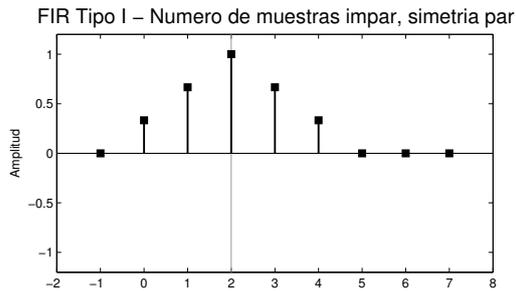
La fase del filtro es lineal con pendiente igual al índice de la muestra de simetría  $n_0$ ,

$$\phi(\theta) = -\theta n_0$$

Retardo de fase constante para todas las frecuencias, igual al índice de la muestra de simetría.

# Respuesta en frecuencia

## Filtros de fase lineal



# Respuesta en frecuencia

## Respuesta en fase

- El retardo de fase indica la cantidad de muestras que se retarda cada componente espectral. En general, componentes de distintas frecuencias se retardan cantidades diferentes.
- Si el filtro es de fase lineal, el retardo de fase no depende de la frecuencia y equivale a retardar la señal completa. Este efecto en general no es nocivo y puede ser compensado.
- Si el filtro no es de fase lineal, se produce distorsión de fase. La forma de onda de la señal se modifica al ser filtrada.
- Los filtros FIR se diseñan a partir de la respuesta al impulso. Es fácil imponer fase lineal haciendo que la respuesta al impulso sea simétrica.
- Los filtros recursivos se especifican a partir de los coeficientes y suelen tener respuesta al impulso infinita. No es posible imponer fase lineal.
- En situaciones donde no se requiere causalidad es posible realizar un filtrado de fase nula con un filtro de fase no nula mediante el **filtrado bidireccional de fase nula**.

## Filtro de media móvil

### Definición

En un filtro de media móvil de largo  $M$ , la salida consiste en el promedio de las últimas  $M$  muestras de la entrada,

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

### Implementación por recursión

- Cálculo de dos muestras sucesivas:

$$y[n] = \frac{x[n] + \dots + x[n - (M - 1)]}{M}, \quad y[n - 1] = \frac{x[n - 1] + \dots + x[n - M]}{M}$$

- Es posible calcular  $y[n]$  a partir de  $y[n - 1]$  como

$$y[n] = y[n - 1] + \frac{x[n] - x[n - M]}{M}.$$

## Filtro de media móvil

### Respuesta al impulso

Filtro de media móvil

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} x[n-k]$$

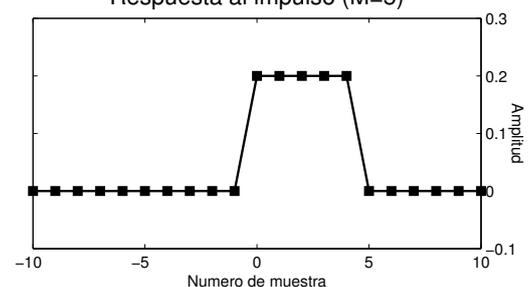
Producto convolución

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

### Respuesta al impulso

$$h_{ma}[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & \text{si } n = 0, \dots, M - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Respuesta al impulso (M=5)



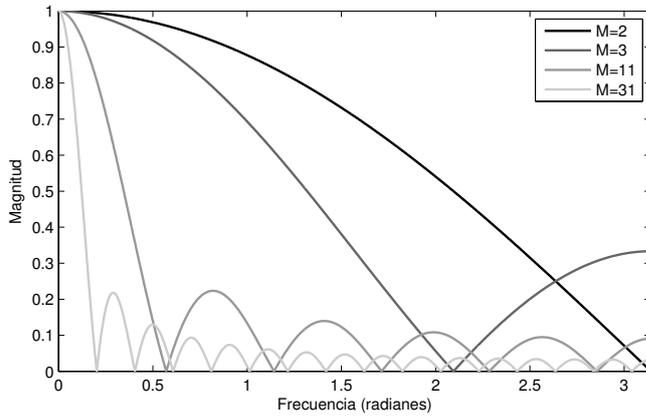
# Filtro de media móvil

## Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia del filtro de media móvil es

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta(M-1)/2} \frac{1}{M} \frac{\sin(\theta M/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Seno cardinal discreto



## Observaciones

La fase es lineal,

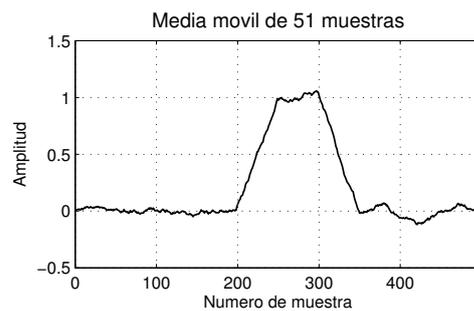
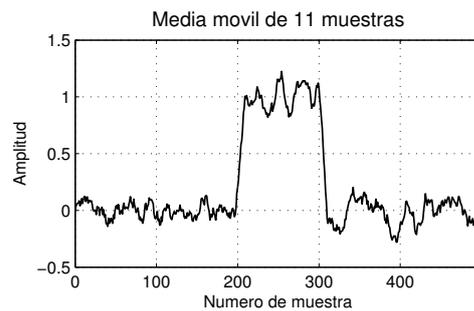
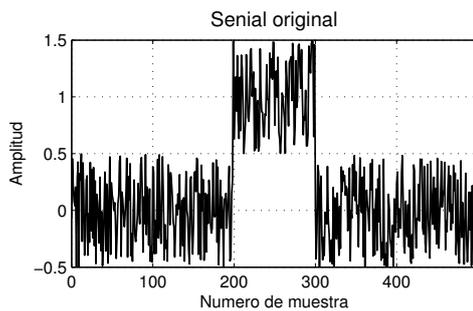
$$\phi(\theta) = -\theta(M-1)/2$$

El retardo de fase es constante,

$$\tau_\phi = (M-1)/2.$$

# Filtro de media móvil

Aplicación: suavizado



# Filtro de media móvil

## Características

- Es un filtro FIR.
- Como su respuesta al impulso es simétrica, es de fase lineal. El retardo de fase es constante.
- Tiene un comportamiento de filtro pasabajos, pero sus características como pasabajos son malas,
  - pobre roll-off.
  - mala atenuación en altas frecuencias.
- Es de costo computacional bajo gracias a su implementación en recurrencia (2 sumas y una multiplicación en cada paso).
- Su desempeño es óptimo para reducción de ruido blanco.

## Diseño a partir de la ubicación de polos y ceros

### Efecto de un polo y un cero

- Se considera un filtro recursivo cuya función de transferencia tiene un cero y un polo en  $a$  y  $b$  respectivamente,

$$H(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{z - b}{z - a}$$

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n] - bx[n - 1]$$

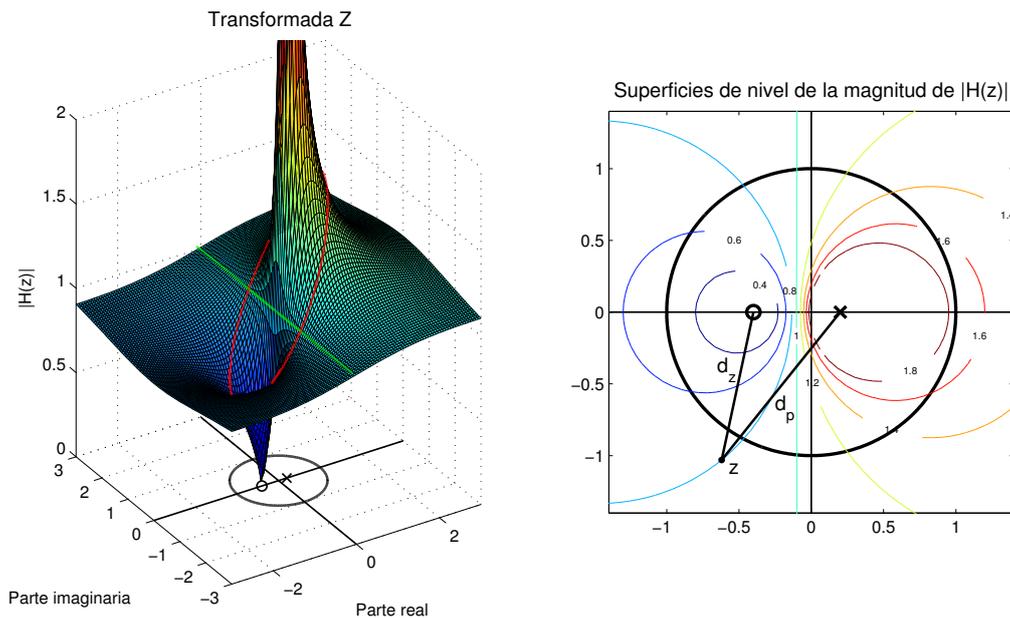
- El módulo de la transformada  $\mathcal{Z}$  en cierto punto del plano  $z_0$  es

$$|H(z_0)| = \frac{|z_0 - b|}{|z_0 - a|} = \frac{\text{dist}(z_0, b)}{\text{dist}(z_0, a)}$$

Esto permite a grande rasgos deducir la forma de la transformada  $\mathcal{Z}$  y en particular, el valor en la circunferencia unidad.

# Diseño a partir de la ubicación de polos y ceros

## Efecto de un polo y un cero



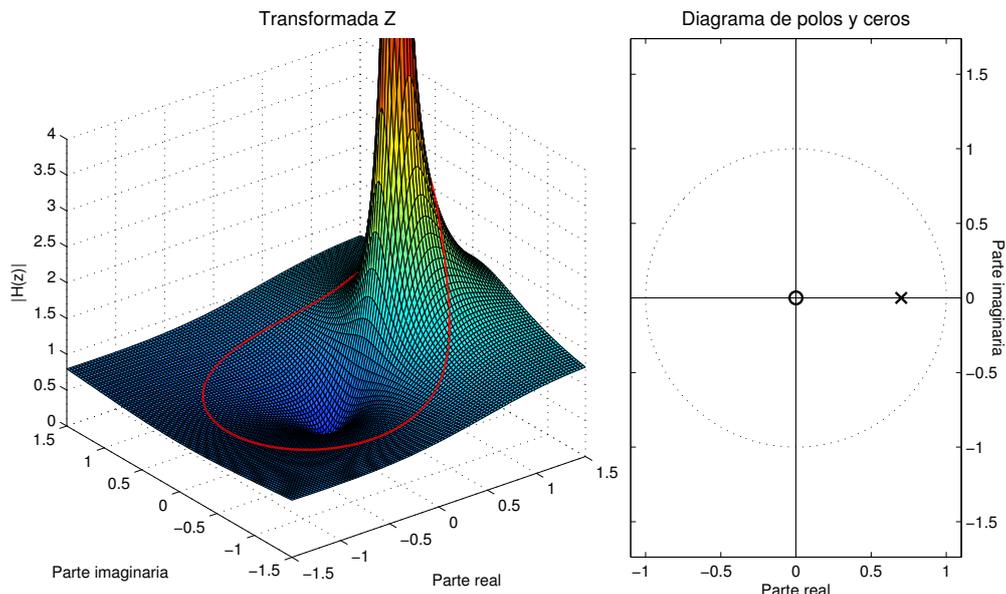
# Diseño a partir de la ubicación de polos y ceros

## Efecto de un polo y un cero

- La transformada  $Z$  en los puntos del plano mas cercanos al cero que al polo van a tener menor magnitud que 1. La magnitud es mas pequeña a medida que el punto está mas cercano al cero.
- La transformada  $Z$  en los puntos del plano mas cercanos al polo que al cero van a tener mayor magnitud que 1. La magnitud es mayor a medida que el punto está mas cercano al polo.
- El efecto del polo y el cero se cancela en distancias grandes.

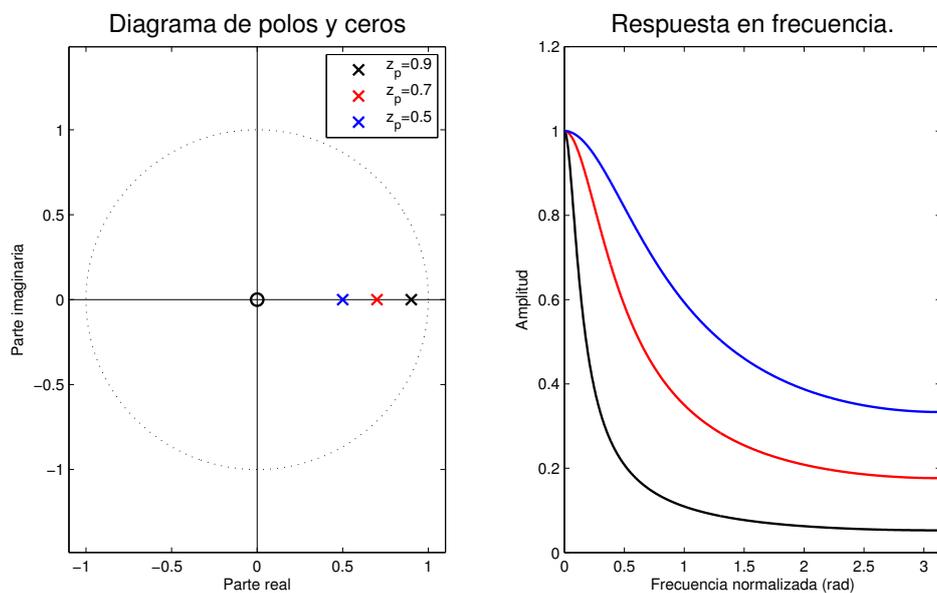
# Filtros IIR de primer orden - Pasa-bajos

Cero en  $z = 0$ , Polo en  $0 < z < 1$



# Filtros IIR de primer orden - Pasa-bajos

Respuesta en frecuencia en función de la posición del polo



# Filtros IIR de primer orden - Pasa-bajos

## Características

Función de transferencia

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z}{z - a_1}$$

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n]$$

- Restricción de ganancia 1 en continua:

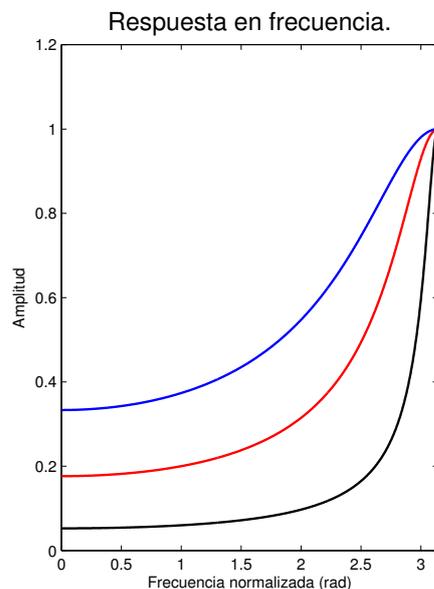
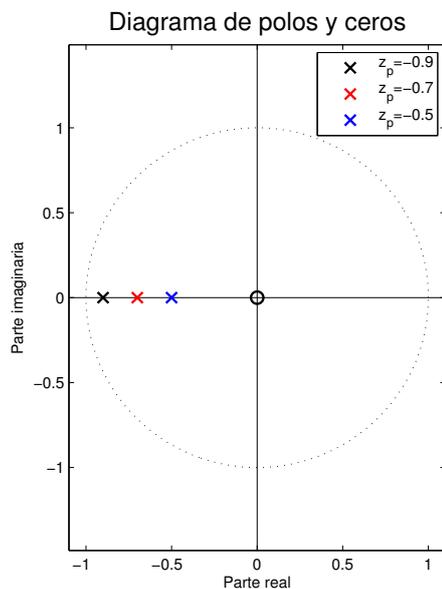
$$H(e^{j\theta}) \Big|_{\theta=0} = 1 \text{ o equivalentemente, } H(z) \Big|_{z=1} = 1 \implies b_0 = 1 - a_1$$

- Respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{b_0}{1 - a_1 \cos \theta + ja_1 \sin \theta} \quad |H(e^{j\theta})|^2 = \frac{b_0^2}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \theta}$$

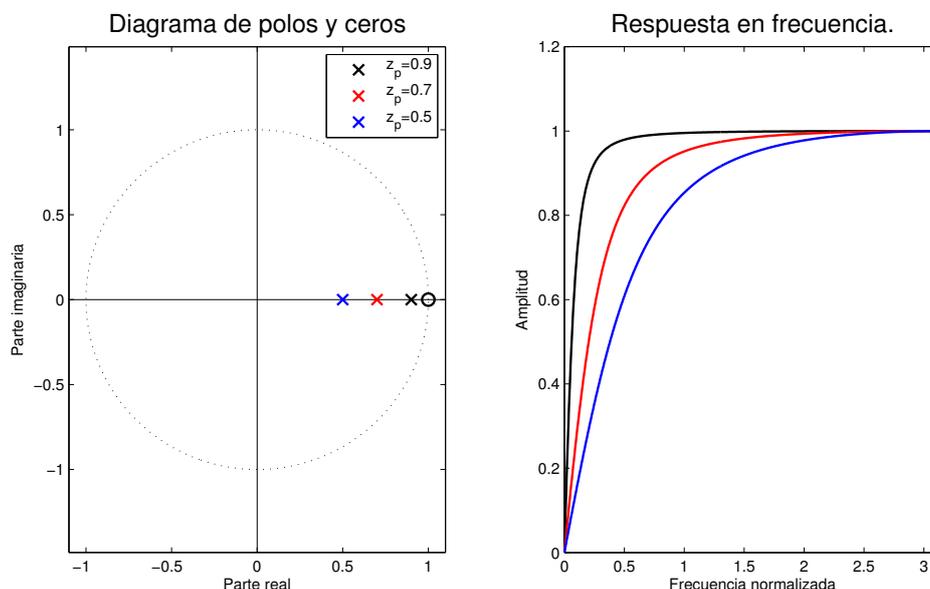
# Filtros IIR de primer orden - Pasa-altos 1

Respuesta en frecuencia en función de la posición del polo



## Filtros IIR de primer orden - Pasa-altos 2

Respuesta en frecuencia en función de la posición del polo



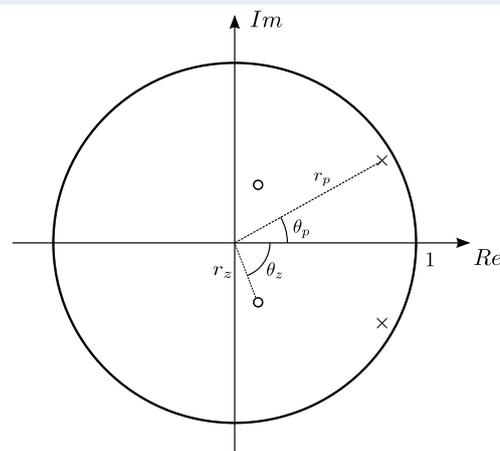
## Filtro IIR de segundo orden

### Resonadores

- Los filtros de un solo polo pueden resonar en continua (polo positivo) o en la frecuencia de Nyquist (polo negativo).
- Para que un filtro resuene en cualquier frecuencia, se necesitan pares de polos complejos conjugados.

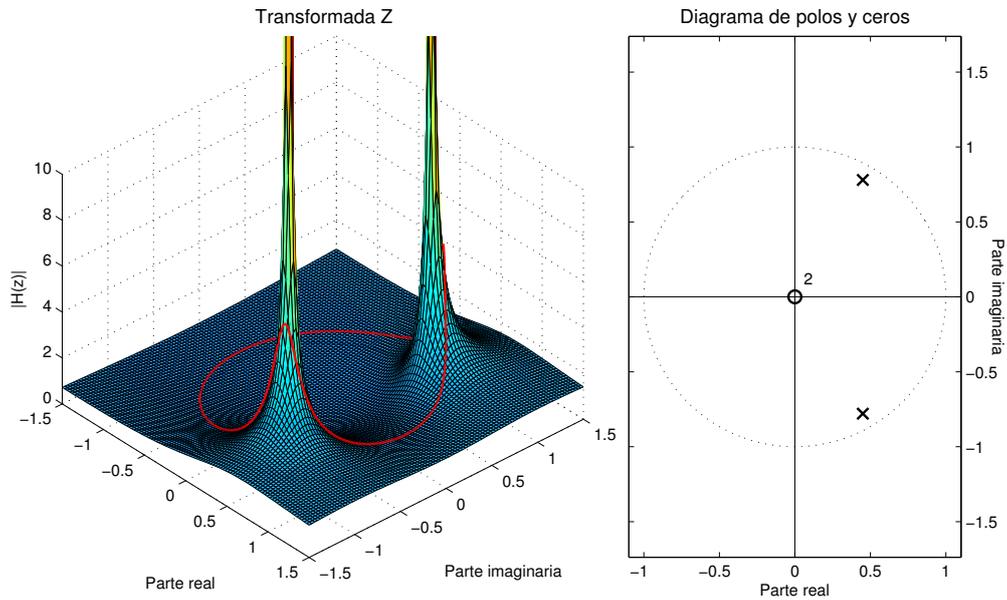
### Función de transferencia

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{(z - r_z e^{j\theta_z})(z - r_z e^{-j\theta_z})}{(z - r_p e^{j\theta_p})(z - r_p e^{-j\theta_p})} \\
 &= \frac{z^2 - 2r_z z \cos \theta_z + r_z^2}{z^2 - 2r_p z \cos \theta_p + r_p^2}
 \end{aligned}$$



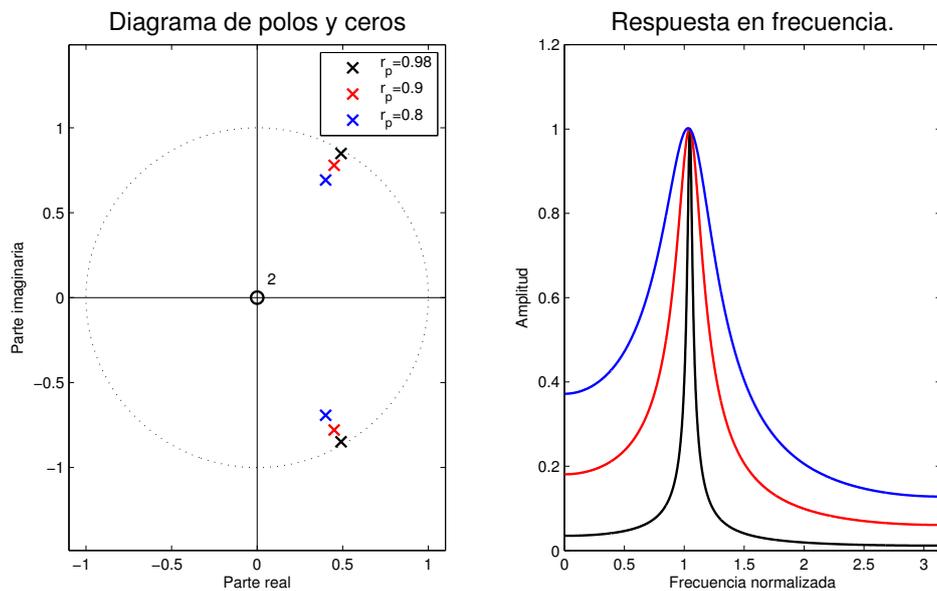
# Filtros IIR de segundo orden - Resonadores

$$r_z = 0, r_p \approx 1$$



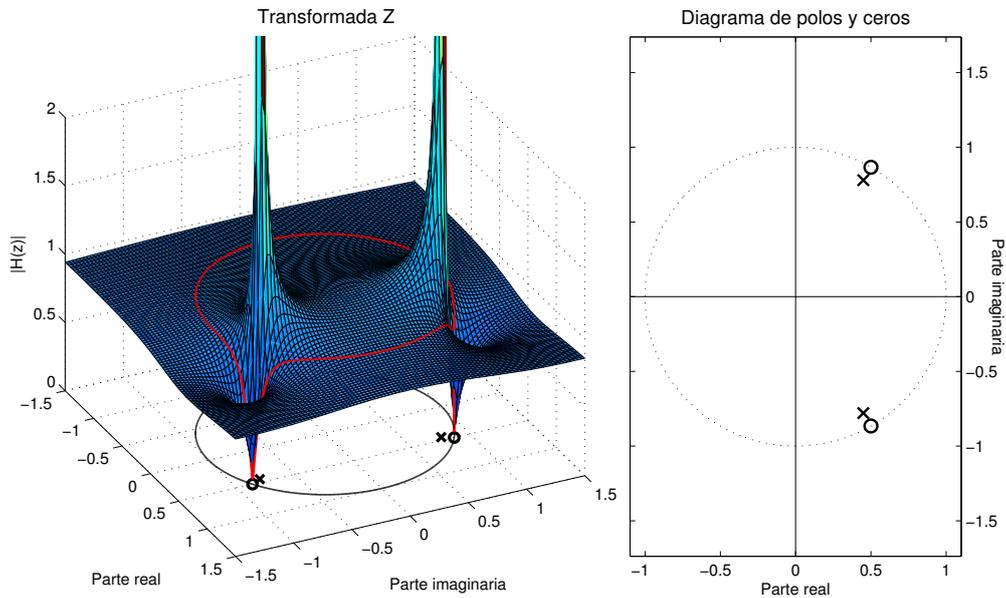
# Filtros IIR de segundo orden - Resonadores

Respuesta en frecuencia en función de la magnitud de los polos



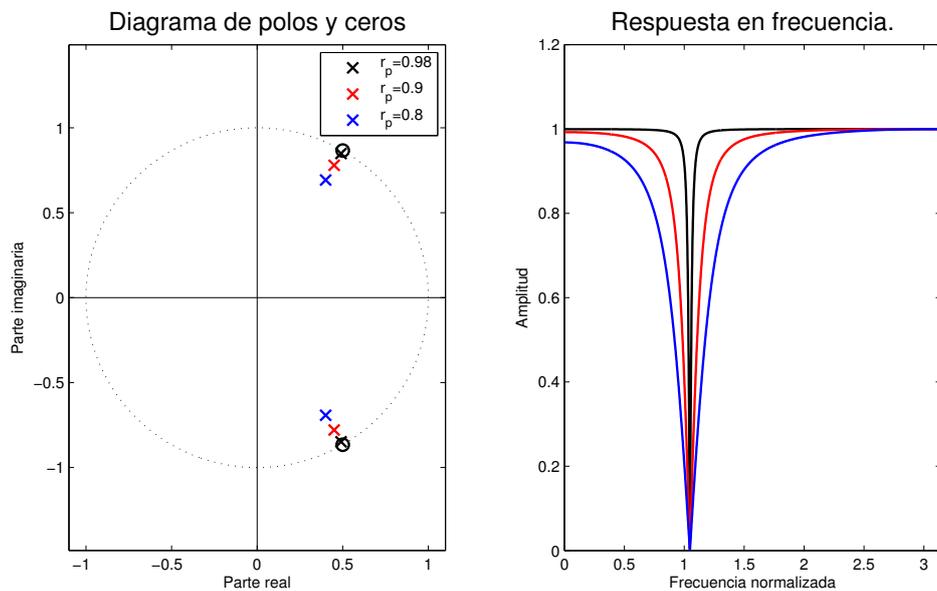
## Filtros IIR de segundo orden - Filtros "notch"

$$r_z = 1, \quad \theta_z = \theta_p$$



## Filtros IIR de segundo orden - Filtros "notch"

Respuesta en frecuencia en función de la magnitud de los polos



# Filtros de Chebyshev

## Descripción

- Son filtros IIR usados para separar bandas de frecuencias (pasa-bajos, pasa-altos, pasa-banda o suprime-banda).
- Surgen de la transformación de filtros analógicos al dominio discreto. El nombre se debe a que su respuesta en frecuencia se basa en los polinomios de Chebyshev.
- En general, el diseño consiste en construir un filtro pasa-bajos y luego aplicar alguna transformación en frecuencia para convertir a otro tipo de filtro (por ejemplo, pasa-altos).
- Su desempeño es óptimo en cuanto al compromiso entre el roll-off y el orden del filtro. Suelen ser la primera elección cuando se pretende implementar un filtro de selección de frecuencias de buen desempeño.

# Filtros de Chebyshev

## Características

- Están diseñados para tener el roll-off mas rápido posible a costa de permitir ripple. Son filtros óptimos en este sentido: dado el orden (cantidad de polos) y el ripple permitido, tienen el roll-off óptimo.
- El ripple está presente en la banda pasante o en la banda atenuante, pero no en ambas.
- Involucran un compromiso entre el roll-off y el ripple. Cuanto mayor es el ripple permitido, mas rápido es el roll-off.
- Pueden diseñarse para que el ripple sea nulo. En este caso, reciben el nombre de filtro Butterworth.

## Clasificación

- Filtros Butterworth: no tienen ripple.
- Tipo I: Tienen ripple en la banda pasante.
- Tipo II: Tienen ripple en la banda atenuante.

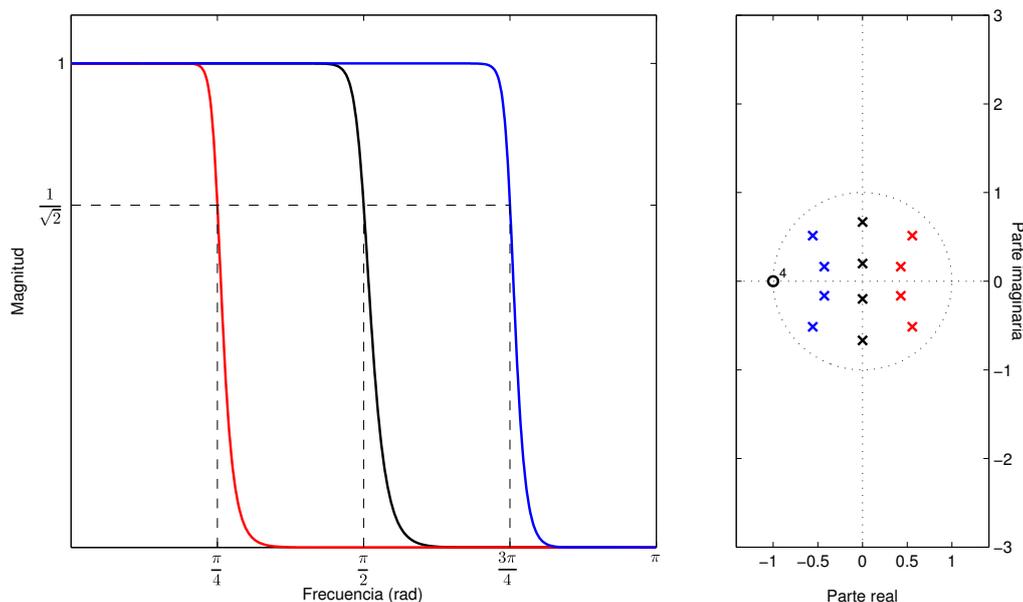
# Filtro de Butterworth

## Características

- No tiene ripple.
- Se diseña especificando tres parámetros: el tipo de respuesta (pasa-bajos, pasa-altos), la frecuencia de corte y el orden.
- Al aumentar el orden, el roll-off mejora (manteniendo la frecuencia de corte constante).
- Al aumentar el orden, crece el retardo de grupo, o equivalentemente, la fase es menos lineal.
- El roll-off depende de la frecuencia de corte para un orden fijo.

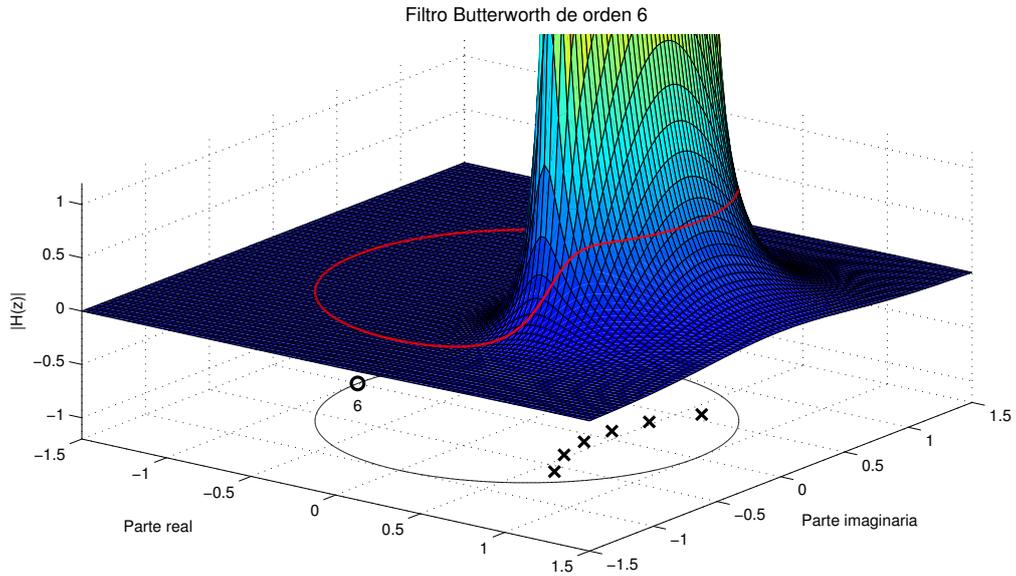
# Filtro de Butterworth

Filtro de Butterworth con distintas frecuencias de corte



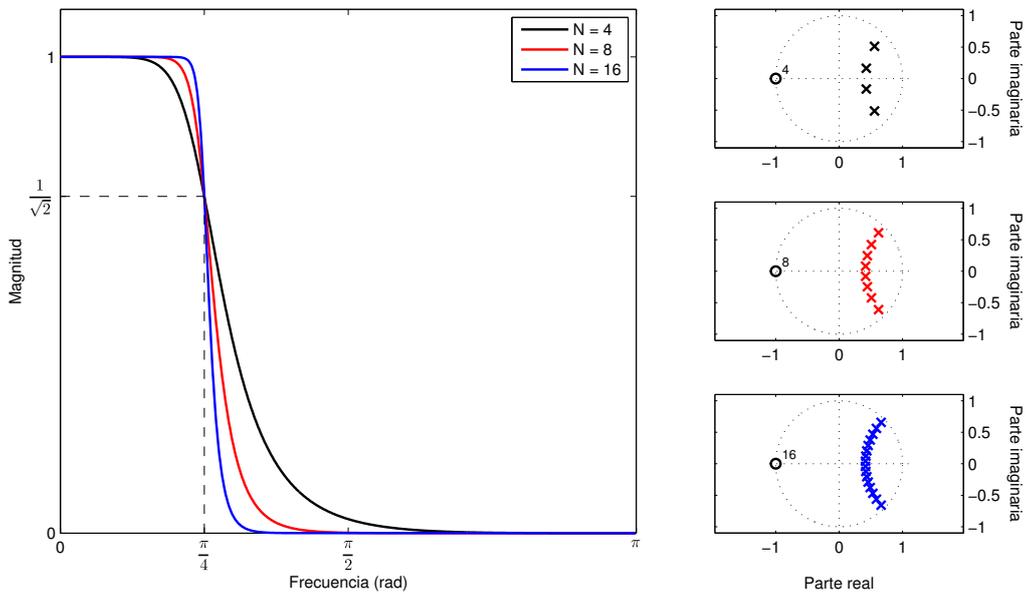
# Filtro de Butterworth

## Magnitud de la transformada $Z$



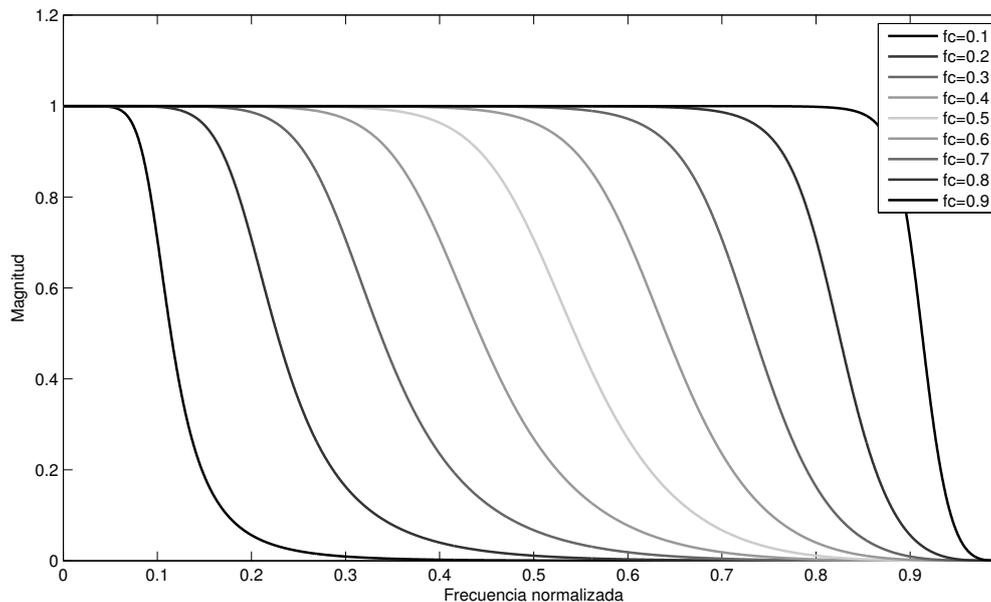
# Filtro de Butterworth

## Filtro Butterworth de distintos órdenes



# Filtro de Butterworth

Roll-off al variar la frecuencia de corte (orden 4)



# Filtro de Butterworth

## Construcción de filtro pasa-altos

Para convertir filtros pasabajos en filtros pasa-altos se emplea la técnica de **reversión espectral**. Consiste en modificar la respuesta al impulso de forma tal que la respuesta en frecuencia se desplace circularmente  $\pi$  radianes en frecuencia.

- Se basa en la siguiente propiedad de la DTFT:

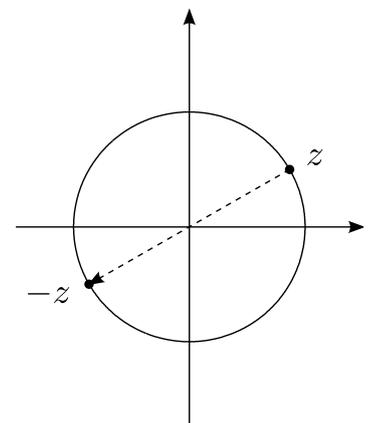
$$(-1)^n h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j(\theta+\pi)})$$

- En la función de transferencia, equivale a rotar todo el plano complejo un cantidad  $\pi$  radianes:

$$(-1)^n h[n] \xleftrightarrow{z} H(-z)$$

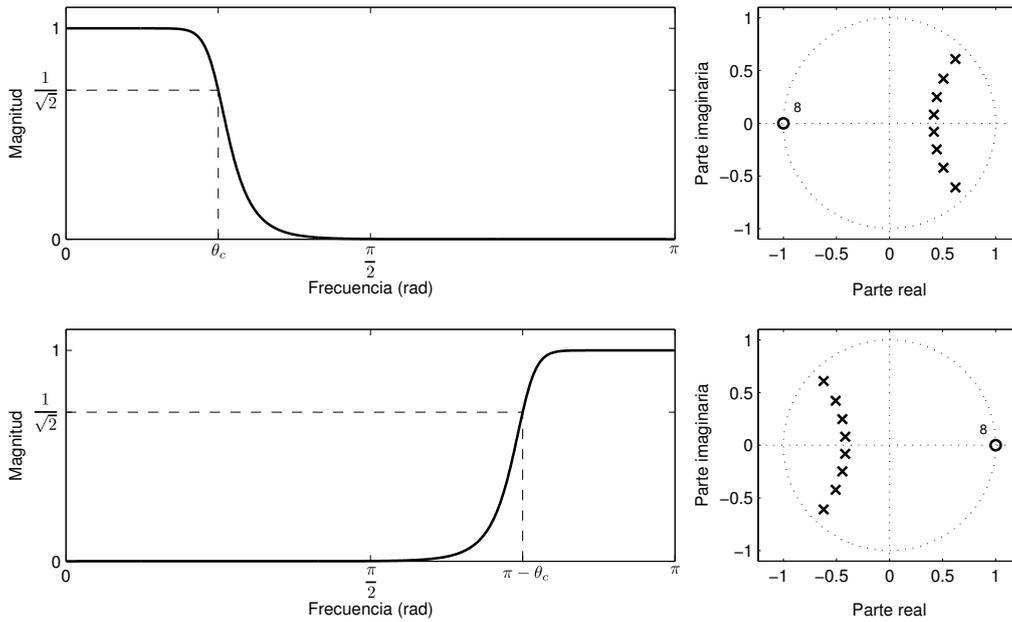
- Se modifican los coeficientes de la ecuación en recurrencia:

$$a_i^{rev} = (-1)^i a_i \quad b_i^{rev} = (-1)^i b_i$$



# Filtro de Butterworth

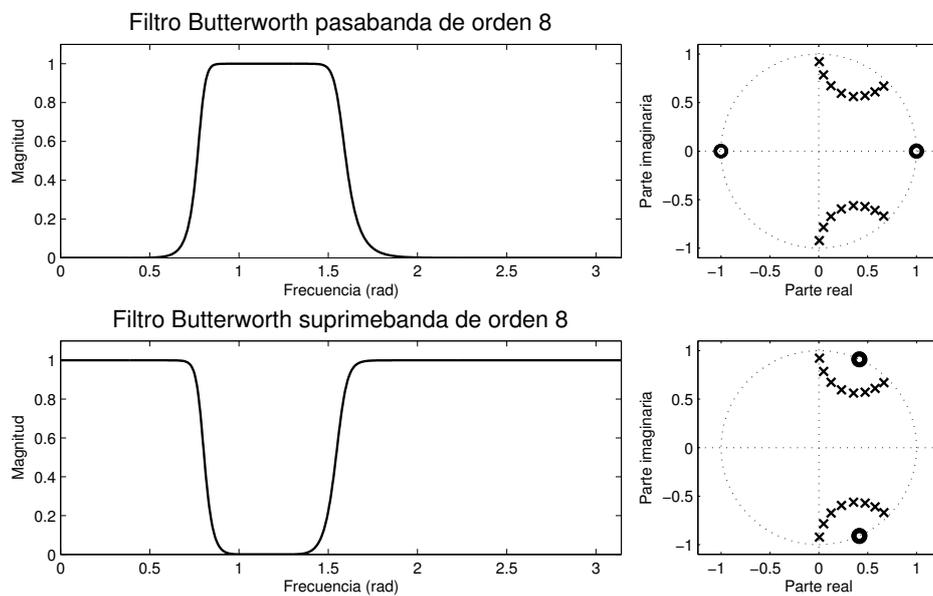
## Construcción de filtro pasa-altos a partir de pasa-bajos



# Filtro de Butterworth

## Filtros Butterworth pasabanda y subprimebanda

Se obtienen a partir de filtros Butterworth pasabajos mediante otras transformaciones.



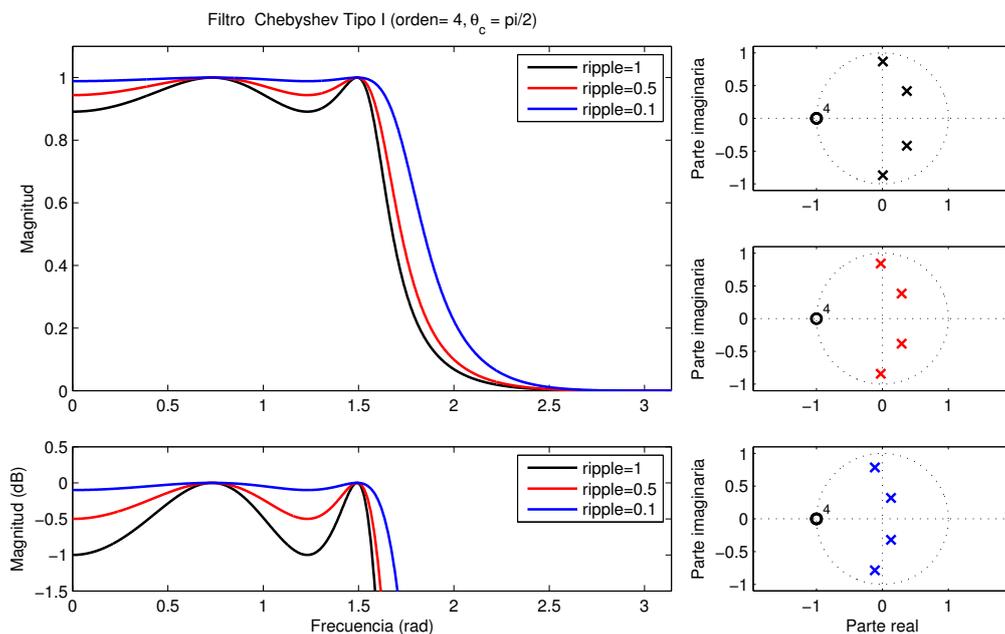
# Filtros Chebyshev

## Características

- Permiten ripple en la banda pasante o en la banda atenuada.
- Se diseñan especificando cuatro parámetros: el tipo de respuesta (pasa-bajos, pasa-altos), la frecuencia de corte, el orden y el ripple en decibels (en la banda pasante si es de tipo I o en la banda atenuada si es de tipo II).
- Al aumentar el orden, el roll-off mejora (dejando la frecuencia de corte constante y el ripple constante).
- Al permitir mayor ripple, el roll-off mejora respecto al filtro de Butterworth del mismo orden.
- El roll-off depende de la frecuencia de corte para un orden y ripple fijo.

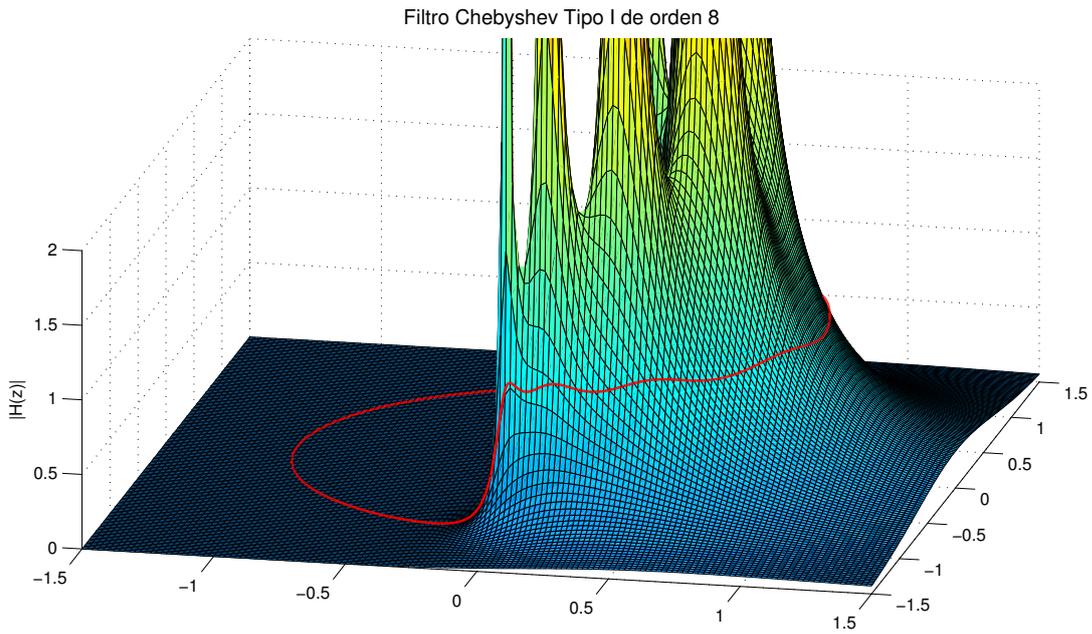
## Filtro de Chebyshev Tipo I

Filtro de Chebyshev con distintos valores de ripple admitidos



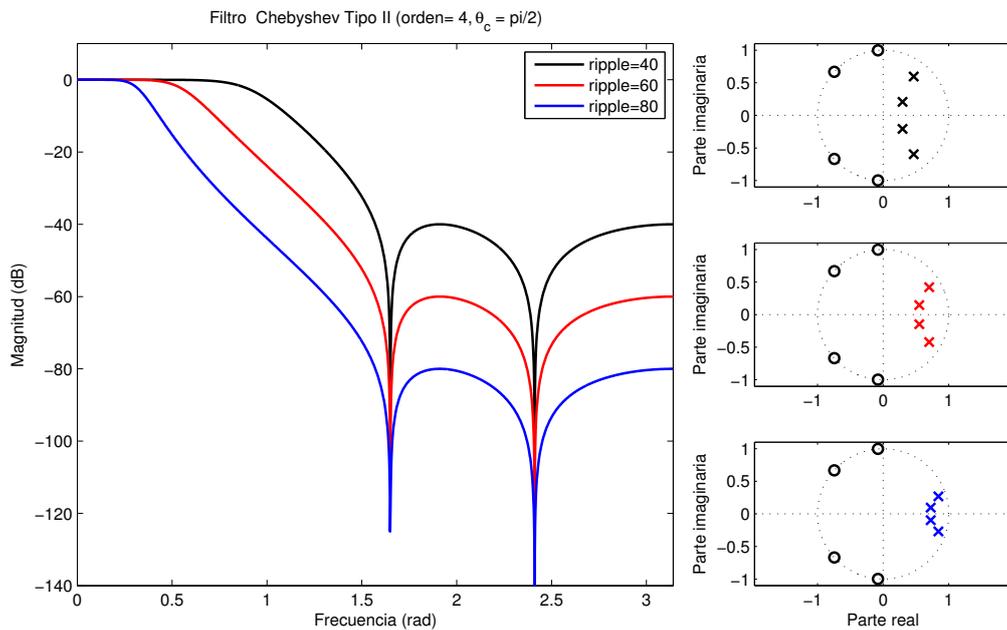
# Filtro de Chebyshev

## Magnitud de la transformada $Z$



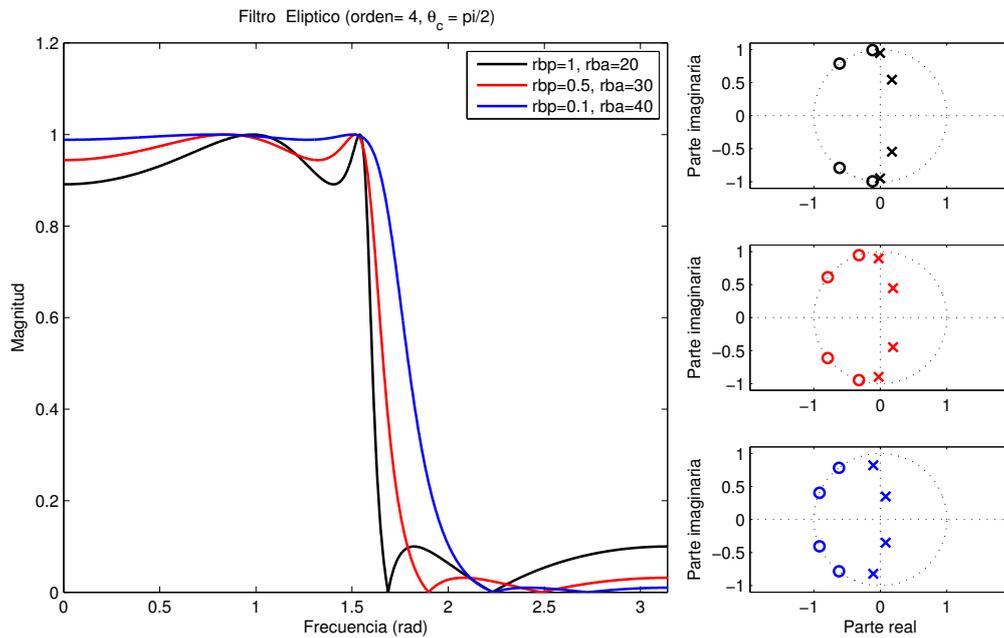
## Filtro de Chebyshev Tipo II

Filtro de Chebyshev con distintos valores de ripple admitidos

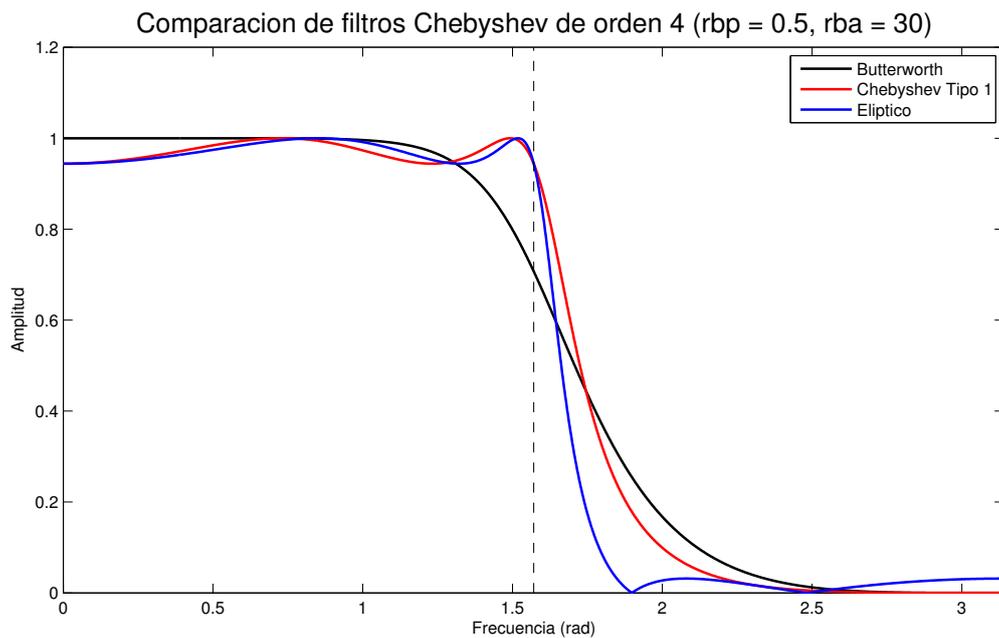


# Filtros Elípticos

Filtro Elíptico con distintos valores de ripple admitidos (en las dos bandas)



# Comparación de filtros Chebyshev



# Comparación de filtros Chebyshev

## Observaciones

- Los filtros Butterworth tienen el roll-off más rápido posible considerando los filtros de respuesta plana.
- Los filtros Elípticos tienen el roll-off más rápido posible admitiendo ripple.
- El roll-off depende del orden del filtro y del ripple permitido. Cuanto mayor es el orden y el ripple permitido, más rápido es el roll-off.
- En los filtros Chebyshev el roll-off depende de la frecuencia de corte, siendo más rápido en las frecuencias de los extremos del espectro.
- Son filtros más eficientes computacionalmente respecto a los filtros FIR de selección de frecuencias (por ejemplo, sinc enventanado).
- Tienen respuesta en fase no lineal. Esta es la principal desventaja respecto a los filtros FIR de selección de frecuencias.
- El orden no se puede aumentar arbitrariamente porque aparecen problemas de estabilidad.

## Bibliografía por tema

- **Conceptos básicos** [Smith, 1997]
  - Caracterización e implementación
  - Clasificación y parámetros
  - Respuesta en frecuencia [Smith, 2007]
- **Filtros corrientes en procesamiento de audio** [Smith, 1997]
  - Filtro de media móvil
  - Filtros IIR de primer y segundo orden [Oppenheim et al., 1999]
  - Filtros de Chebyshev [Steiglitz, 1996]

## Referencias I

-  Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., and Buck, J. R. (1999).  
*Discrete-Time Signal Processing*.  
Prentice Hall, 2nd edition.
-  Smith, J. (2007).  
*Introduction to Digital Filters with Audio Applications*.  
W3K Publishing.
-  Smith, S. W. (1997).  
*The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*.  
California Technical Pub., 1st edition.
-  Steiglitz, K. (1996).  
*Digital Signal Processing Primer: With Applications to Digital Audio and Computer Music*.  
Prentice Hall.