Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2022

Práctico 4 - Funciones holomorfas

1. Estudiar en qué puntos son derivables las siguientes funciones y en dichos puntos calcular la derivada.

   a) $f(z) = |z|$

   b) $f(z) = \overline{z}$

   c) $f(z) = 1/z$

   d) Sea $f(z) = \log(\varphi(z))$, donde $\varphi(z) = (1+z)/(1-z)$ (log denota el logaritmo principal, es decir, el argumento pertenece al intervalo $[0, 2\pi)$).

2. Sea $f(z) = \sqrt{|xy|}$ con $z = x + iy$. Verificar que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen pero f no es derivable en el origen.

3. *a)* Mostrar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable entonces el determinante del jacobiano de f vista como función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es $\det(J_{(x,z)}f) = |f'(z)|^2$.

   b) Mostrar que si $v = (v_x, v_y)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ entonces $J_{(x,y)}f(v_x, v_y) = (w_x, w_y)$ sii $f'(x + iy)(v_x + iv_y) = w_x + iw_y$.

4. Se llama "región" a un conjunto abierto y conexo. Sea $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región. Probar que cada una de las siguientes condiciones implica que f es constante en Ω.

   a) $f'(z) = 0$ en Ω.

   b) $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

   c) $f(\Omega)$ esta contenido en un recta.

   d) $|f(z)|$ constante en Ω.

   e) $f(\Omega)$ tiene interior vacío. *Sugerencia: observar que el determinante del Jacobiano de f debe ser 0 en todo punto, por qué?*

5. Una base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ se dice *positiva* o *positivamente orientada* si cumple la regla de la mano derecha[1]. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable con matriz Jacobiana invertible se dice que preserva orientación si para todo $p \in \mathbb{R}^2$ y para toda base $\{v_1, v_2\}$ se cumple que la base $\{J_p f v_1, J_p f v_2\}$ es positiva. Es un resultado que pueden aceptar que esto ocurre si y sólo si $J_p f$ tiene determinante positivo en todo punto p.

   a) Probar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomora con $f'(z) \neq 0$ $\forall z$ entonces preserva orientación.

   b) Probar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomora con $f'(z) \neq 0$ $\forall z$ entonces f es conforme. Recordar que un mapa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con matriz jacobiana invertible, se dice *conforme* si preserva ángulos. *Sugerencia: usar la notación compleja.*

   c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con matriz Jacobiana invertible. Probar que si es conforme y preserva orientación entonces es holomorfa como función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y además la derivada es no nula.

[1] Formalmente, si la matriz de cambio de base de la base canónica a $\{v_1, v_2\}$ tiene determinante positivo.

6. Ejercicio del examen Febrero 2010.

   a) Encontrar una función holomorfa que transforme la faja vertical $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathcal{R}e(z) < 1\}$ en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > 0\}$. (Sugerencia: considerar la rotación $z \mapsto iz$ y la función exponencial compleja)

   b) Sean a y b dos complejos diferentes. Llamemos Ω al conjunto que resulta de quitarle el segmento $[a, b]$ al plano complejo.

      Hallar una función holomorfa que transforme Ω en el plano complejo menos la semirecta $\{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$. (Sugerencia: Buscar una función de Möbius que transforme la recta que contiene al segmento $[a, b]$ en la recta $y = 0$.)

   c) Mostrar que existe una función holomorfa que lleva Ω en el disco unitario. (Sugerencia: Observar que al definir la raíz cuadrada con argumento adecuado, se puede transformar el plano complejo menos una semirrecta en un semiplano abierto; y aplicar esto correctamente junto con las partes anteriores.)

7. Sea f una función de variable compleja definida en una región Ω tal que $0 \notin \Omega$. Denotamos $w = f(z)$ donde $z \in \Omega$. La función f se puede expresar como:

$$w = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$$

   donde $z = re^{i\varphi}$, $u = Re(w)$, $v = Im(w)$, $r \in (0, +\infty)$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Es decir, en vez de dar z por su parte real e imaginaria, se da en polares. Mostrar que si f es holomorfa entonces u y v son derivables respecto a r y φ. Mostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares quedan

$$u_r = \frac{1}{r} v_\varphi \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\varphi$$

   Además

$$f'(z) = e^{-i\varphi}\Big[u_r(r, \varphi) + iv_r(r, \varphi)\Big] = \frac{e^{-i\varphi}}{r}\Big[v_\varphi(r, \varphi) - iu_\varphi(r, \varphi)\Big]$$

8. ***Funciones armónicas.*** Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, una función $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ se dice armónica cuando $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. El operador Δ se llama Laplaciano.

   a) Probar que si $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces $\mathcal{R}e(f)$ e $\mathcal{I}m(f)$ son funciones armónicas.

   b) Muestre que la función $u(x, y) = \cosh(y)\sin(x)$ es armónica en el plano y construya otra función armónica $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

   c) Si $u : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ está definida por $u(x, y) = \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Observar que si bien es armónica, no es posible encontrar $f : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa que cumpla $\mathcal{R}e(f) = u$.

   d) Si $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, es armónica y Ω es simplemente conexo entonces existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica y tal que $f = u + iv$ es holomorfa.
      Sugerencia: Intentar vincular con el hecho de que todo campo irrotacional es de gradiantes si el dominio es simplemente conexo.