Clasificación bayesiana.

Recordar:

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ probabilidad condicional.

- Formula de Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B)\, P(A|B)}{P(A)}$$

- A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Supongamos que se cumple la independencia condicional:

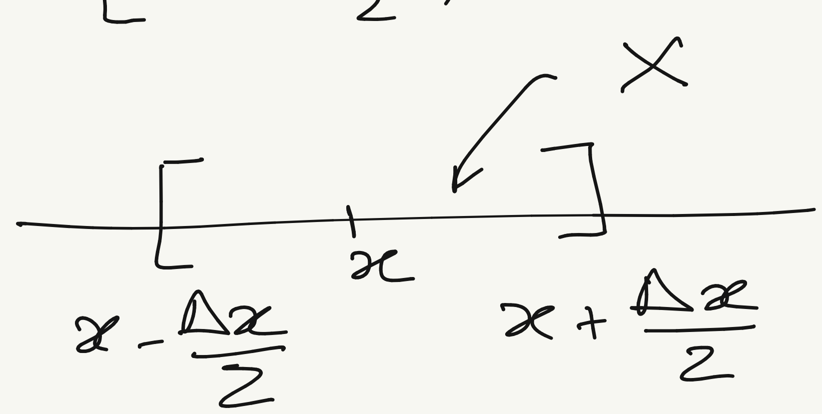
$$P(A \cap B | C) = P(A|C)\, P(B|C).$$

- X es una V.A continua.

$$P(X = x) = 0 \quad \forall x.$$

$P(X=x)$ lo pienso como "la probabilidad de observar x", es decir:

$$P\left(X \in \left[x - \frac{\Delta x}{2},\, x + \frac{\Delta x}{2}\right]\right)$$



con Δx pequeño

$$P\left(X \in \left[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right]\right) = \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} \underbrace{f_X}_{\text{densidad de } X.}(t)\, dt$$

teorema del valor medio.

$$= f_X(x)\, \Delta x.$$

Lo anterior permite establecer un vínculo entre probabilidad de observar x y densidad en x.

Probabilidad de observar x $\longleftrightarrow$ densidad en x.

$$\text{“}P(X = x)\text{”} = f_X(x)\, \Delta x.$$

(proba de observar x)

$f_X(x)$: ≥ 0

Δx: muy chico.

Dos poblaciones P_1 y P_2.

$F : \mathcal{X} \longrightarrow \{0, 1\}$: clasificador

$$F(x) = \mathbb{1}_{\{f(x) > 0\}} = \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) > 0 \\ 0, & \text{si } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

f es una frontera

F me va decir a qué población pertenece x.

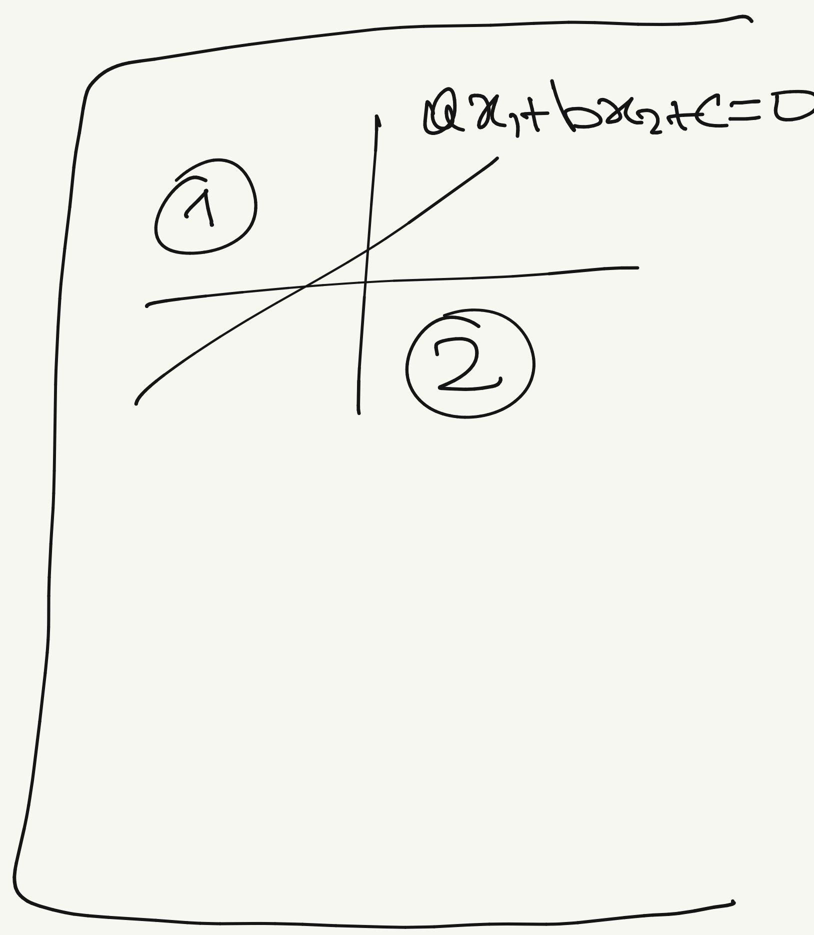
$$F(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

f podría ser $f(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2 + c$.

$$\underbrace{F(x_1,x_2)}_{x} = \begin{cases} 1, & ax_1+bx_2+c>0 \Rightarrow \text{región } 1 \\ 0, & ax_1+bx_2+c\leq 0 \Rightarrow \text{región } 0 \end{cases}$$

$ax_1+bx_2+c=0$

(x_1^0, x_2^0) nuevo punto.



$F(x_1^0, x_2^0) =$

para decir si vale 0 o 1

miro si $\underbrace{ax_1^0 + bx_2^0 + c}_{f(x_1^0,\, x_2^0)}$ es >0 o ≤ 0

(X, Y) aleatorio. $\quad Y = 0$ o $Y = 1$

Supongo que $\quad X \mid Y=1 \sim g_1$ (densidad)

$\quad X \mid Y=0 \sim g_2$ (densidad).

Clasificador de Bayes: dado x una observación para clasificarlo comparo

$$P(Y=1 \mid X=x) \quad y \quad P(Y=0 \mid X=x)$$

si $P(Y=1 \mid X=x) > P(Y=0 \mid X=x)$

entonces clasifico x en 1.

Formula de Bayes

$$P(Y=1 \mid X=x) \overset{\downarrow}{=} \frac{P(Y=1)\, P(X=x \mid Y=1)}{P(X=x)}$$

$$= \frac{\pi_1\, g_1(x)\, \Delta x}{g_1(x)\Delta x\, \pi_1 + g_2(x)\Delta x\, \pi_2}$$

$$P(X=x) = P(X=x, Y=1) + P(X=x, Y=0)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$
$$= P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

$$= P(X=x \mid Y=1)\underbrace{P(Y=1)}_{\pi_1} + P(X=x \mid Y=0)\underbrace{P(Y=0)}_{\pi_2}$$

$$P(Y=1 \mid X=x) = \frac{\pi_1 g_1(x)}{g_1(x)\pi_1 + g_2(x)\pi_2}$$

Analogamente:

$$P(Y=0 \mid X=x) = \frac{\pi_2 g_2(x)}{g_1(x)\pi_1 + g_2(x)\pi_2}$$

Voy a clasificar x en 1 si:

$$\pi_1 g_1(x) > \pi_2 g_2(x)$$

$$\iff \quad \frac{g_1(x)}{g_2(x)} > \frac{\pi_2}{\pi_1}$$

$$\iff \quad \underbrace{\frac{g_1(x)}{g_2(x)} - \frac{\pi_2}{\pi_1}}_{f(x)} > 0$$

Clasificador Bayesiano. (Wikipedia)

Entrenamiento [editar]

Entrenamiento previo.

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

sexo	altura (pies)	peso (lbs)	talla del pie (inches)
hombre	6	180	12
hombre	5.92 (5'11")	190	11
hombre	5.58 (5'7")	170	12
hombre	5.92 (5'11")	165	10
mujer	5	100	6
mujer	5.5 (5'6")	150	8
mujer	5.42 (5'5")	130	7
mujer	5.75 (5'9")	150	9

Haciendo una distribución Gaussiana extraemos los datos y obtenemos la media y la varianza de cada característica.

$\hat{\mu}_{alt}$ $\hat{\sigma}^2_{alt}$ $\hat{\mu}_{peso}$ $\hat{\sigma}^2_{peso}$ $\hat{\mu}_{pie}$ $\hat{\sigma}^2_{pie}$.

sexo	media (altura)	varianza (altura)	media (peso)	varianza (peso)	media (talla del pie)	varianza (talla del pie)
hombre	5.855	0.035033	176.25	122.92000	11.25	0.91667
mujer	5.4175	0.097225	132.5	558.33000	7.5	1.66670

En este caso nos encontramos en una distribución equiprobable, es decir que tienen la misma probabilidad. P(hombre)=0.5 y P(mujer)=0.5.

π_1 π_2

Testing [editar]

Ahora recibimos unos datos para ser clasificado como hombre o mujer

sex	altura (pies)	peso (lbs)	número de pie(inches)
muestra	6	130	8

x_0. ¡nueva observación!

?

$$P(H|x_0) = \frac{P(H)}{P(x_0)} \cdot P(x_0|H)$$

Supongo estoy trabajando con densidades normales

$$P(H) = P(M) = 0.5$$

Densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-\mu)^2}.$$

Comparo $P(H)\,P(x_0|H)$ contra $P(M)\,P(x_0|M)$

pues $P(H|x_0) = \dfrac{P(H)\,P(x_0|H)}{P(x_0)}$ y $P(M|x_0) = \dfrac{P(M)\,P(x_0|M)}{P(x_0)}$

$$P(x_0|H) = P(alt=6,\ peso=130,\ talla=8\,|H)$$

indep. condicional

$$= P(alt=6|H) \cdot P(peso=130|H) \cdot P(talla=8|H)$$

$$= \underbrace{f_{alt,\,hombre}(6)}_{(1)}\ \underbrace{f_{peso,\,hombre}(130)}_{(2)}\ \underbrace{f_{talla,\,hombre}(8)}_{(3)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0.035}}\, e^{-\frac{1}{2\sqrt{0.035}}(6.-5{,}85)^2}}_{(1)} \cdot \underbrace{\quad}_{(2)} \cdot \underbrace{\quad}_{(3)}$$

$$= 1{,}5789 \cdot 5{,}98.10^{-6} \cdot 1.311.10^{-3}$$

$$P(x_0) = P(x_0|H)\,P(H) + P(x_0|M)\,P(M)$$

$$= P(alt=183|H)\,P(peso=59|H)\,P(talla=20|H)$$

$$+ P(alt=183|M)\,P(peso=59|M)\,P(talla=20|M)$$

(no es necesario

$$\Rightarrow P(H|x_0) = \frac{\overset{P(H)}{0.5}\ \ }{P(x_0)} = \frac{6.1984.10^{-9}}{P(x_0)}$$

$$P(M|x_0) = \frac{5.3778.10^{-4}}{P(x_0)}$$

$\Longrightarrow$ clasifico como M.