

Cinemática Inversa

Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2025



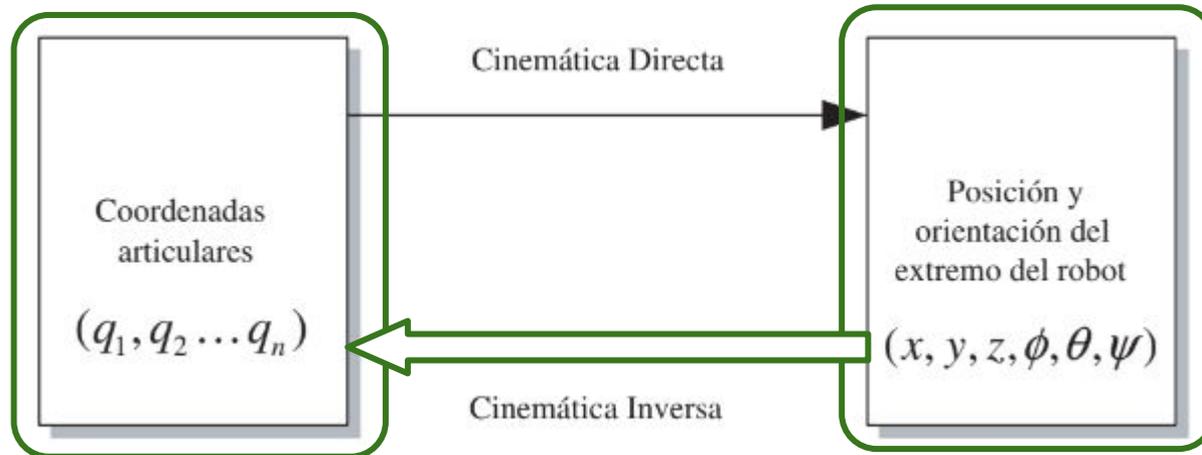
Cinemática

La cinemática se interesa por la **descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo**, [...] relación entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares. [A. Barrientos, 2007]



Cinemática

La cinemática se interesa por la **descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo**, [...] relación entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares. [A. Barrientos, 2007]



Problema de cinemática inversa

La resolución del **problema cinemático inverso** implica entonces la obtención de una **expresión para cada variable articular** para que el estado de la terminal sea el deseado.

Por ejemplo, si se elige la representación de la orientación a partir de los ángulos de euler, se busca encontrar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{formulación cerrada:} \quad & q_k = f_k(x, y, z, \phi, \theta, \psi) \\ & k = 1 \dots n \quad (\text{GDL}) \end{aligned}$$

La resolución de este problema es de especial importancia para transformar las especificaciones de movimiento desde el **espacio operativo**, hasta el **espacio articular** (lenguaje que hablan los actuadores)

Problema de cinemática inversa

A diferencia de lo que pasa con el problema de cinemática directa, en el cual la terminal queda unívocamente determinada a partir de la posición de las articulaciones, **no siempre** ocurre lo mismo con el problema cinemático inverso por las siguientes razones:

- Las ecuaciones a resolver son en general no lineales y por lo tanto no siempre es posible encontrar solución mediante una ***formulación cerrada***.
- Pueden existir **múltiples soluciones** (codo hacia arriba - hacia abajo) **o infinitas soluciones** (redundancias)
- Pueden existir configuraciones no admisibles, lugares a los que la terminal no llega, restricciones de las articulaciones

Por lo tanto, **la existencia de una solución está únicamente garantizada** cuando el estado objetivo de la terminal pertenece al **espacio de trabajo útil**.

Problema de cinemática inversa

A pesar de las dificultades mencionadas, la mayor parte de los robots industriales poseen cinemáticas relativamente simples que facilitan en cierta medida la resolución de su problema cinemático inverso, por la posibilidad de efectuar un **desacoplamiento cinemático** (se verá en próximas diapositivas).

Se utilizan principalmente **dos estrategias** para resolver un problema de cinemática inversa.

1. **Métodos geométricos**
2. **Matriz de transformación Homogénea**

VIDEO



Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2025

Métodos geométricos

Como es de esperar, este tipo de resolución implica la utilización de **relaciones trigonométricas y geométricas** sobre los elementos del robot. Se suele recurrir a la **resolución de triángulos** formados por articulaciones y eslabones.

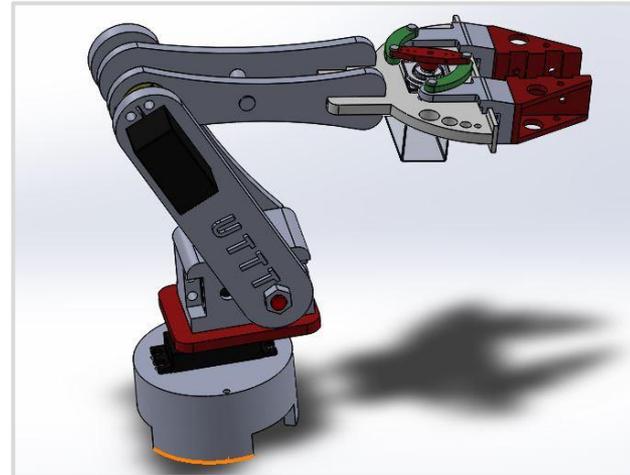
Esto implica que este tipo de métodos son adecuados para robots de **pocos grados de libertad**, o para aquellos que es posible considerar únicamente **los primeros GDL**.

Métodos geométricos

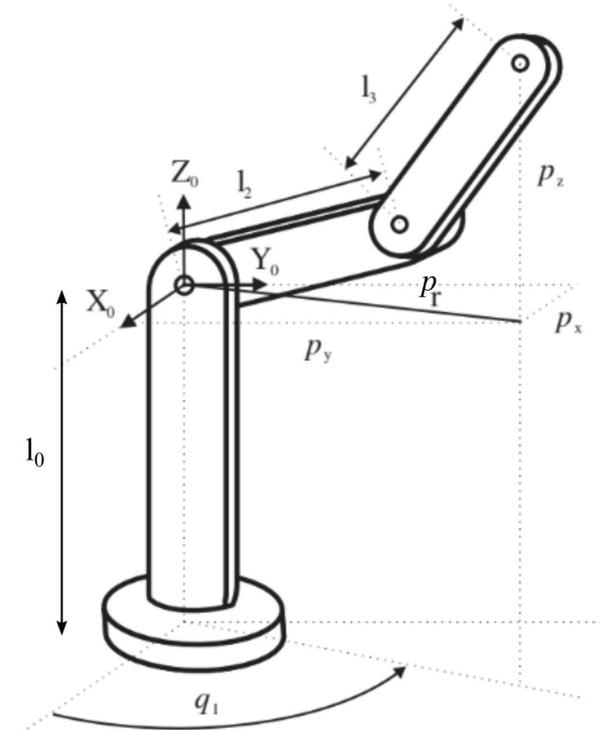
Como es de esperar, este tipo de resolución implica la utilización de **relaciones trigonométricas y geométricas** sobre los elementos del robot. Se suele recurrir a la **resolución de triángulos** formados por articulaciones y eslabones.

Esto implica que este tipo de métodos son adecuados para robots de **pocos grados de libertad**, o para aquellos que es posible considerar únicamente **los primeros GDL**.

Veamos el caso más habitual (3 GDL de rot.)



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación

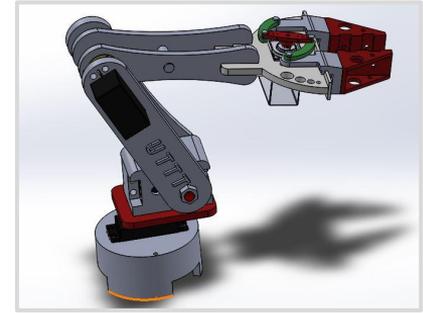


Objetivo:

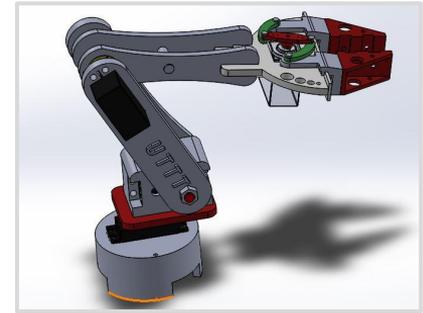
$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



Objetivo:

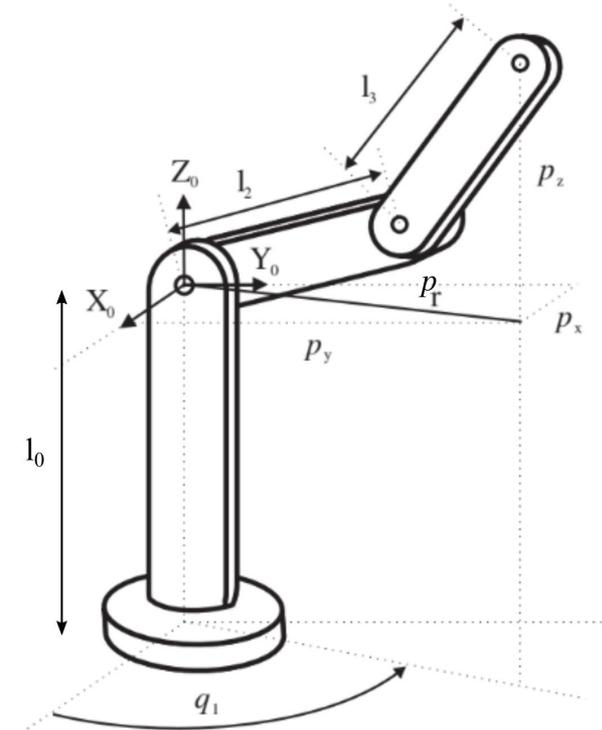
$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

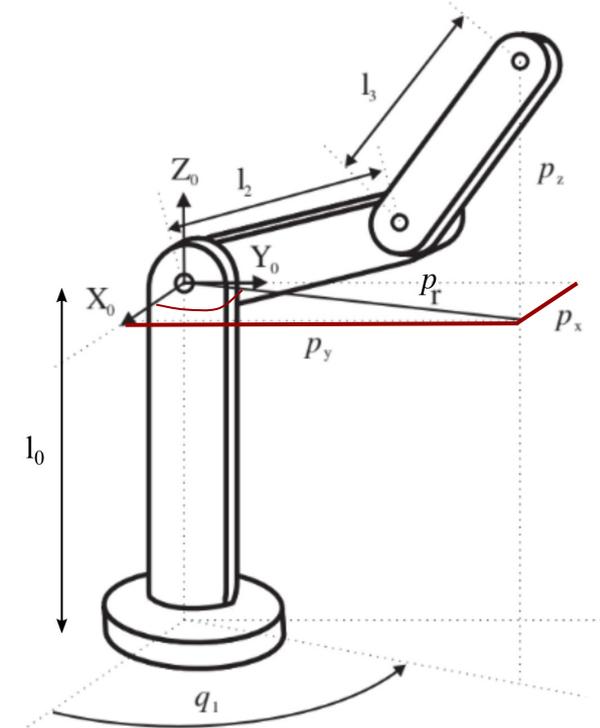
$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

Este robot, a pesar de tener un movimiento tridimensional, posee una estructura que permite que sea analizado como un robot “plano”.

Esto se debe a que la selección del plano vertical en el que trabaja está dado **únicamente** por la posición de **una articulación** (q_1), y la variación del resto de las articulaciones (q_2 y q_3) no modifica este comportamiento.



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



Objetivo:

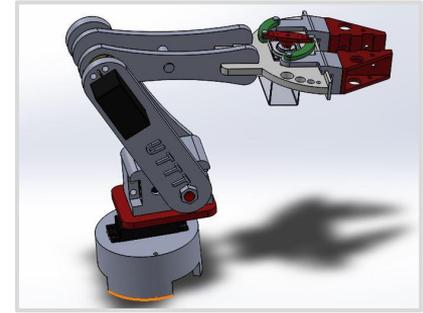
~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

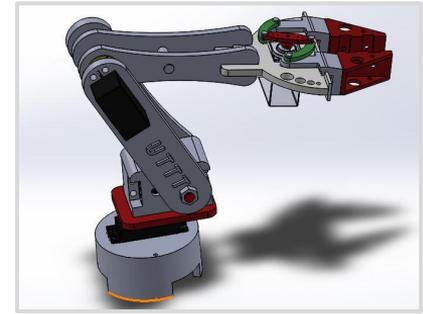
$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

→ Se despeja el valor de esta variable:

$$q_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$$



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



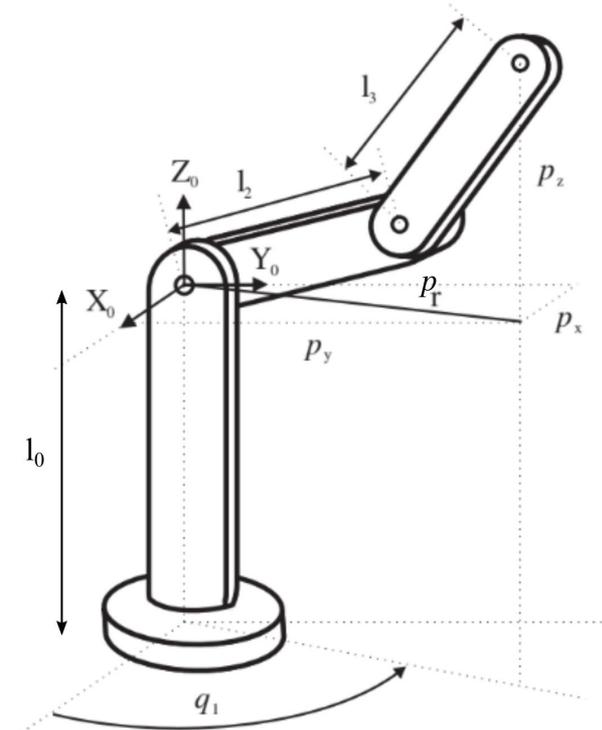
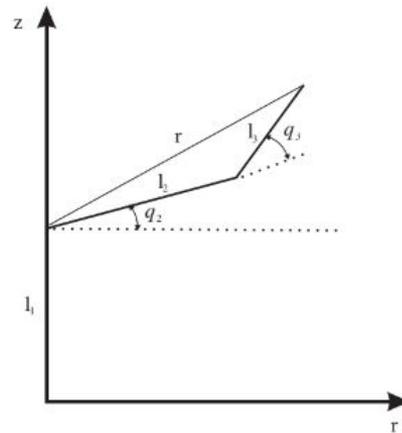
Objetivo:

~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

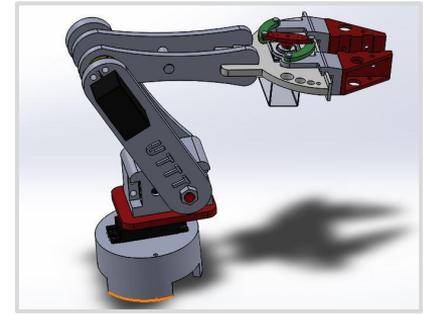
$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

Considerando ahora solamente los elementos 2 y 3:



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



Objetivo:

~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

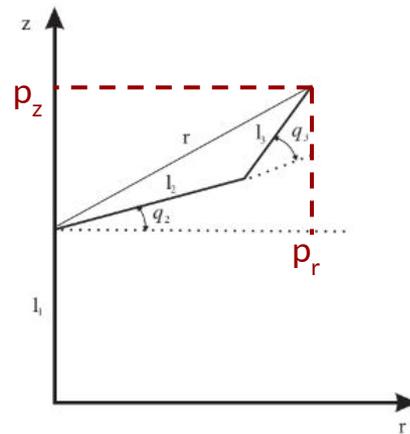
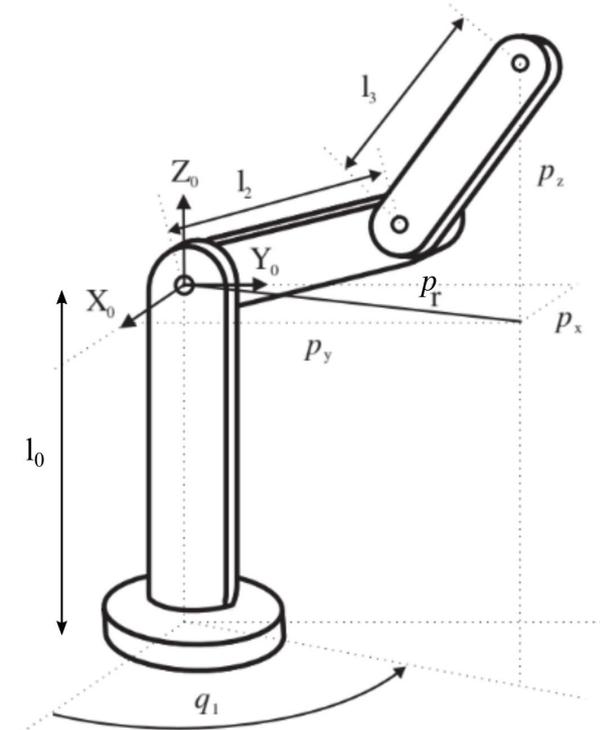
$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

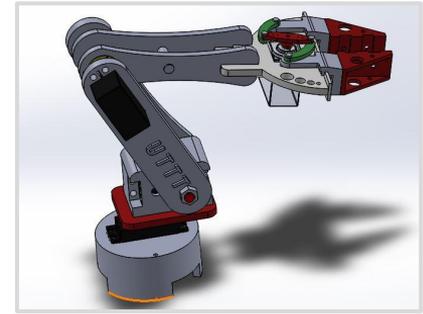
Considerando ahora solamente los elementos 2 y 3:

El teorema del coseno:

$$r^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos(q_3)$$



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



Objetivo:

~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$

$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

Considerando ahora solamente los elementos 2 y 3:

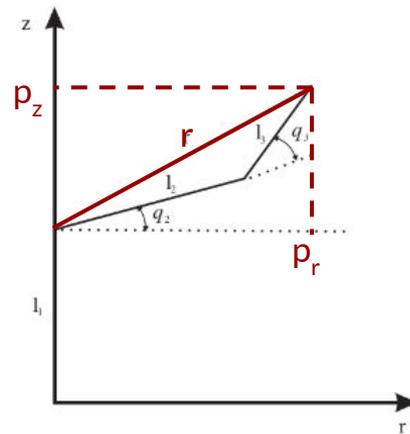
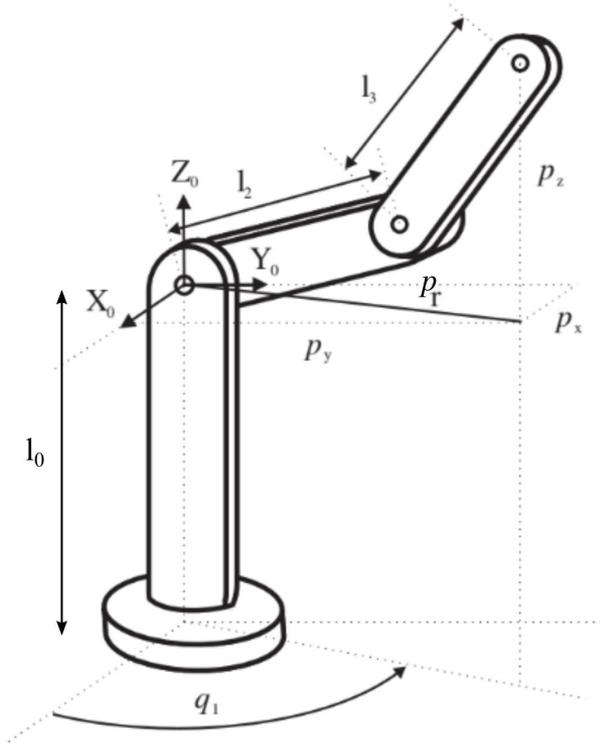
El teorema del coseno:

$$r^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos(q_3)$$

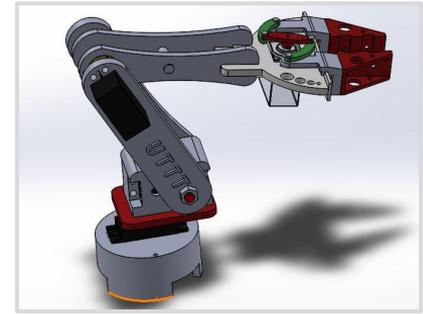
y además que:

$$r^2 = p_r^2 + p_z^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

$$p_r^2 = p_x^2 + p_y^2$$



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



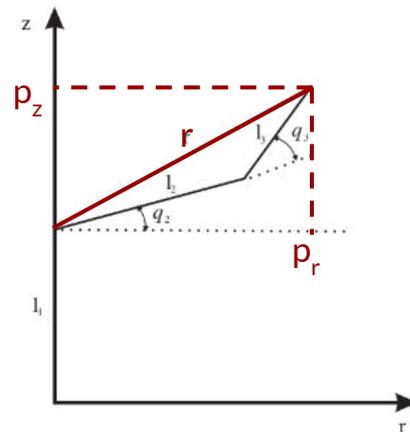
Objetivo:

~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

Considerando ahora solamente los elementos 2 y 3:



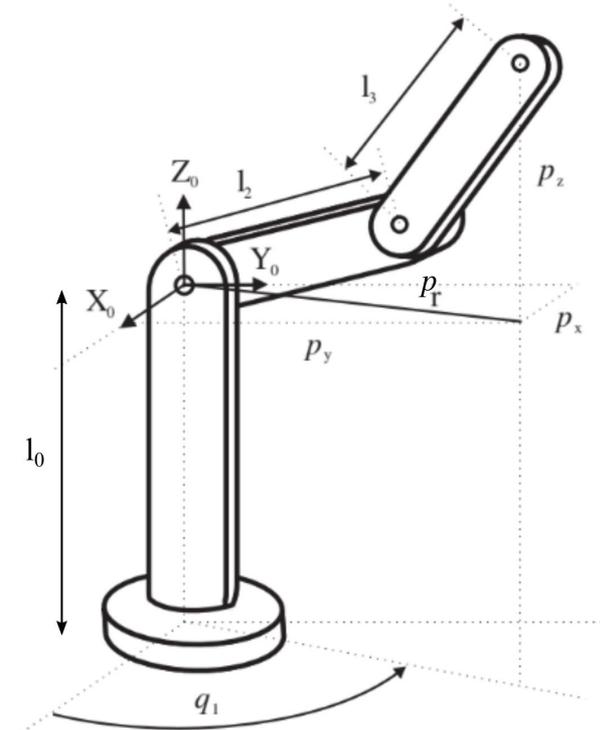
Se obtiene que:

$$\cos(q_3) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_1 l_2}$$

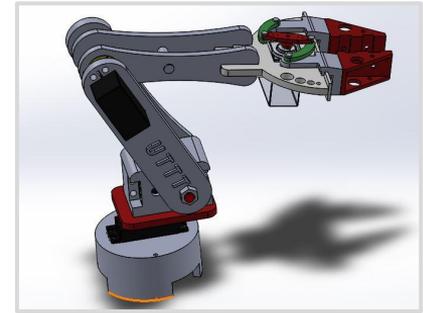
Sin embargo por ventajas computacionales siempre es mejor expresar los ángulos utilizando la función arcotangente:

$$\sin(q_3) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_3)}$$

$$\Rightarrow q_3 = \text{atan2}(\sin(q_3), \cos(q_3))$$



Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



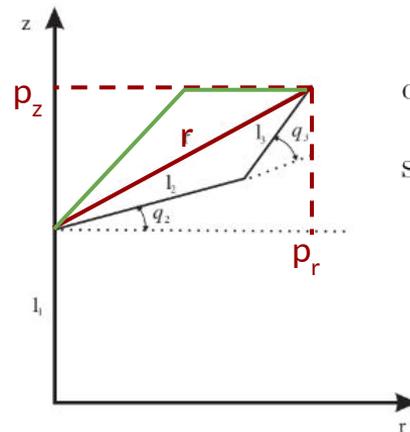
Objetivo:

~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

Considerando ahora solamente los elementos 2 y 3:



$$\cos(q_3) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_1 l_2}$$

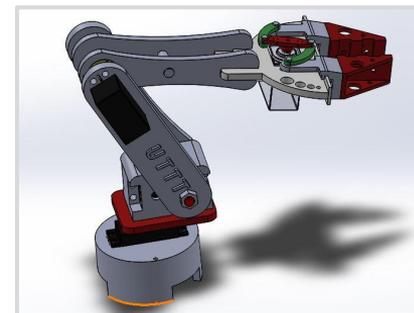
$$q_3 = \text{atan2}(\sin(q_3), \cos(q_3))$$

$$\sin(q_3) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_3)}$$

Este signo define las configuraciones:
 codo hacia arriba
 codo hacia abajo

¿cuál es cuál?

Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



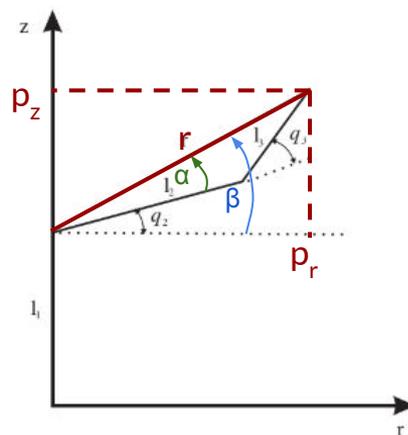
Objetivo:

~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

Considerando ahora solamente los elementos 2 y 3:

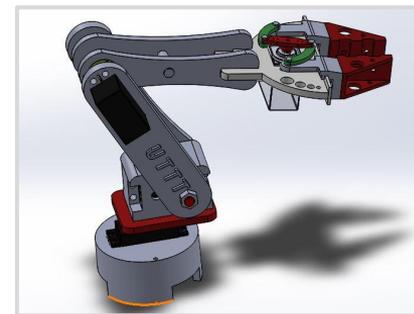


$$\beta = \text{atan2}(p_z, p_r) = \text{atan2}(p_z, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2})$$

$$\alpha = \text{atan2}(l_3 \sin(q_3), l_2 + l_3 \cos(q_3))$$

$$q_2 = \beta - \alpha$$

Métodos geométricos - 3 GDL de rotación



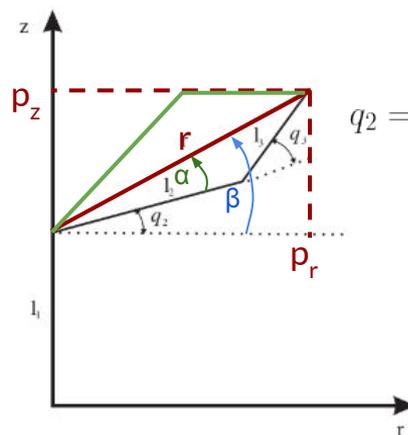
Objetivo:

~~$$q_1 = f_1(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_2 = f_2(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

~~$$q_3 = f_3(p_x, p_y, p_z, l_2, l_3)$$~~

Considerando ahora solamente los elementos 2 y 3:



$$q_2 = \text{atan2} \left(p_z, \oplus \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \right) - \text{atan2} (l_3 \sin(q_3), l_2 + l_3 \cos(q_3))$$

Este signo define las configuraciones:
 codo hacia arriba
 codo hacia abajo

¿cuál es cuál?

Matriz de transformación Homogénea

En “teoría” es posible obtener el modelo cinemático inverso a partir de trabajar con las ecuaciones del modelo directo.

Es decir, conociendo las expresiones $f_{ij}(\mathbf{q})$ de la cinemática directa, y considerando las 6 restricciones de ortonormalidad de la matriz de rotación, se podría resolver.

Matriz de transformación Homogénea

En “teoría” es posible obtener el modelo cinemático inverso a partir de trabajar con las ecuaciones del modelo directo.

Es decir, conociendo las expresiones $f_{ij}(\mathbf{q})$ de la cinemática directa, y considerando las 6 restricciones de ortonormalidad de la matriz de rotación, se podría resolver.

Esto es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_{x_0} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_{y_0} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_{z_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{q}) & f_{12}(\mathbf{q}) & f_{13}(\mathbf{q}) & f_{x_0}(\mathbf{q}) \\ f_{21}(\mathbf{q}) & f_{22}(\mathbf{q}) & f_{23}(\mathbf{q}) & f_{y_0}(\mathbf{q}) \\ f_{31}(\mathbf{q}) & f_{32}(\mathbf{q}) & f_{33}(\mathbf{q}) & f_{z_0}(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} r_{:,1} \cdot r_{:,2} = 0 & r_{:,2} \cdot r_{:,3} = 0 \\ r_{:,3} \cdot r_{:,1} = 0 & \|r_{:,1}\| = 1 \\ \|r_{:,2}\| = 1 & \|r_{:,3}\| = 1 \end{array}$$

Matriz de transformación Homogénea

En “teoría” es posible obtener el modelo cinemático inverso a partir de trabajar con las ecuaciones del modelo directo.

Es decir, conociendo las expresiones $f_{ij}(\mathbf{q})$ de la cinemática directa, y considerando las 6 restricciones de ortonormalidad de la matriz de rotación, se podría resolver.

Esto es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_{x_0} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_{y_0} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_{z_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{q}) & f_{12}(\mathbf{q}) & f_{13}(\mathbf{q}) & f_{x_0}(\mathbf{q}) \\ f_{21}(\mathbf{q}) & f_{22}(\mathbf{q}) & f_{23}(\mathbf{q}) & f_{y_0}(\mathbf{q}) \\ f_{31}(\mathbf{q}) & f_{32}(\mathbf{q}) & f_{33}(\mathbf{q}) & f_{z_0}(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} r_{:,1} \cdot r_{:,2} = 0 & r_{:,2} \cdot r_{:,3} = 0 \\ r_{:,3} \cdot r_{:,1} = 0 & \|r_{:,1}\| = 1 \\ \|r_{:,2}\| = 1 & \|r_{:,3}\| = 1 \end{array}$$

En la gran mayoría de los casos esto resulta impracticable, por lo que habitualmente los robots de más de 3 grados de libertad se diseñan considerando la posibilidad del **desacoplamiento cinemático**.

Desacoplamiento cinemático

El procedimiento visto en como **método geométrico** permite obtener los valores de las 3 primeras variables articulares del robot.

Estas son las que generalmente (en manipuladores de 6GDL) se utilizan para **posicionar el extremo** en las coordenadas (p_x, p_y, p_z) deseadas.

Ahora bien, como es sabido, en general no basta con posicionar el extremo del robot en un punto del espacio, sino que casi siempre es preciso también conseguir que la herramienta se **oriente** de una manera determinada.

Para ello, estos robots cuentan con otros 3GDL, situados al final de la cadena cinemática y cuyos ejes, con frecuencia, se cortan en un punto, conocido como **muñeca del robot**.

Aunque una variación de estos tres últimos GDL origina un cambio en la posición final del extremo real del robot, su verdadero objetivo es poder orientar la herramienta del robot libremente en el espacio.

Desacoplamiento cinemático

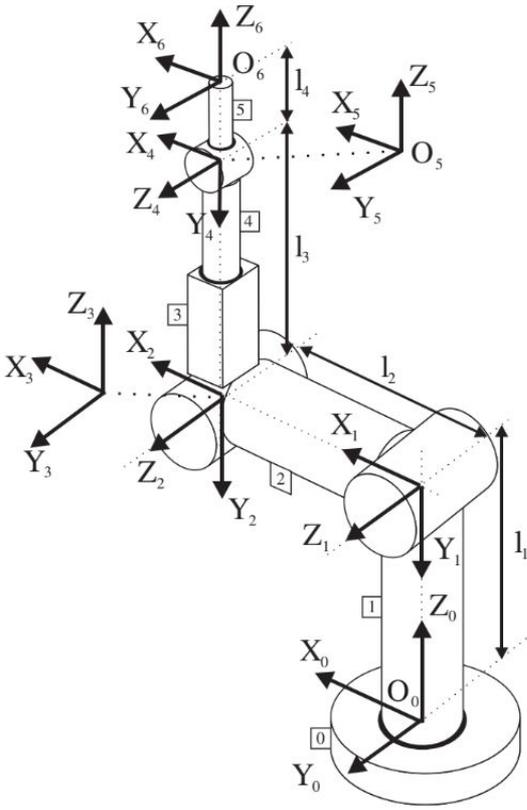
Teniendo en cuenta lo anterior, se podría considerar que los **3 primeros GDL se utilizan para ubicar la muñeca del robot, y que los 3 restantes para orientar la herramienta** (a menos de una distancia).

A esto se le conoce como ***desacoplamiento cinemático*** y ofrece la ventaja de volver relativamente fácil de manejar el problema cinemático inverso.

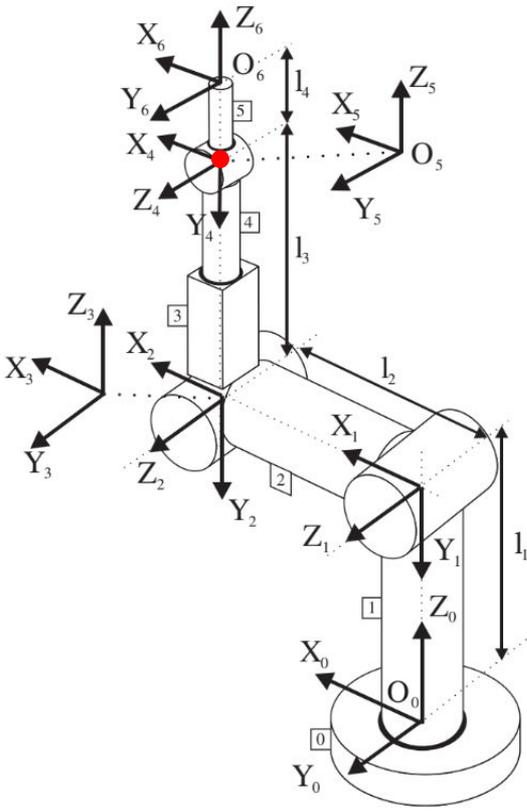
Sin embargo hay que tener en cuenta que es **ÚNICAMENTE VÁLIDO** cuando los **ejes z** de las 3 últimas articulaciones se cortan en un punto (**definido como muñeca**).

Desacoplamiento cinemático

Veamos un ejemplo:



Desacoplamiento cinemático

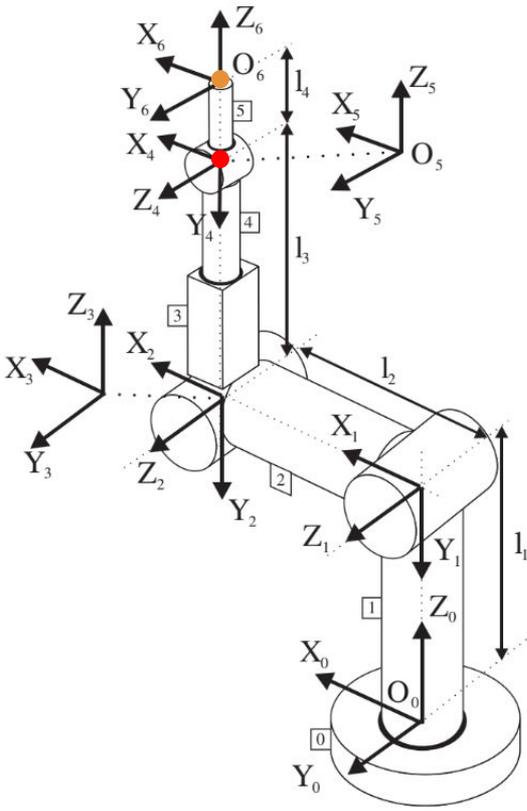


Veamos un ejemplo:

En este caso, los ejes de las últimas 3 articulaciones (z_3 , z_4 y z_5) se cortan en la articulación 5 (**punto rojo**) \rightarrow *Muñeca* (p_m)

Se puede observar que una variación en las articulaciones 4, 5 y 6, no modifica la ubicación de la muñeca, por lo que este punto solo depende de q_1 , q_2 y q_3 .

Desacoplamiento cinemático



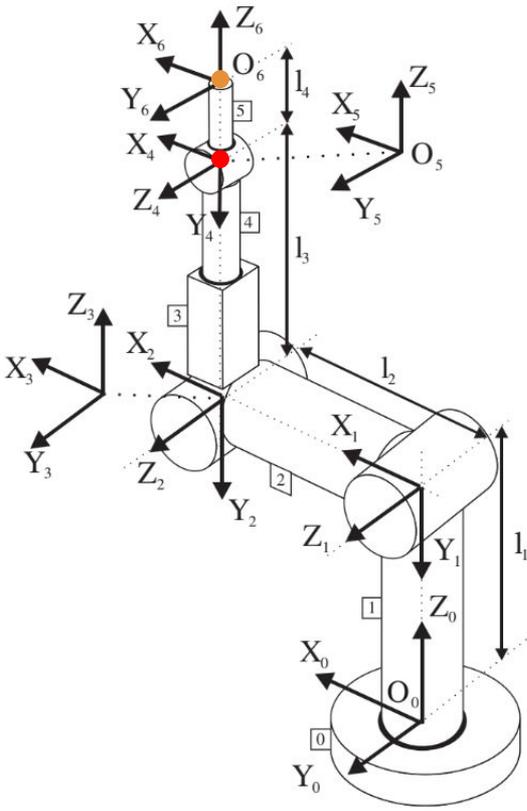
Veamos un ejemplo:

En este caso, los ejes de las últimas 3 articulaciones (z_3 , z_4 y z_5) se cortan en la articulación 5 (punto rojo) → *Muñeca* (p_m)

Se puede observar que una variación en las articulaciones 4, 5 y 6, no modifica la ubicación de la muñeca, por lo que este punto solo depende de q_1 , q_2 y q_3 .

Se tiene también, que el extremo del robot (p_f) estará ubicado en el origen del sistema 6 (punto naranja), que es un desplazamiento según z_5 ($= z_6$).

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

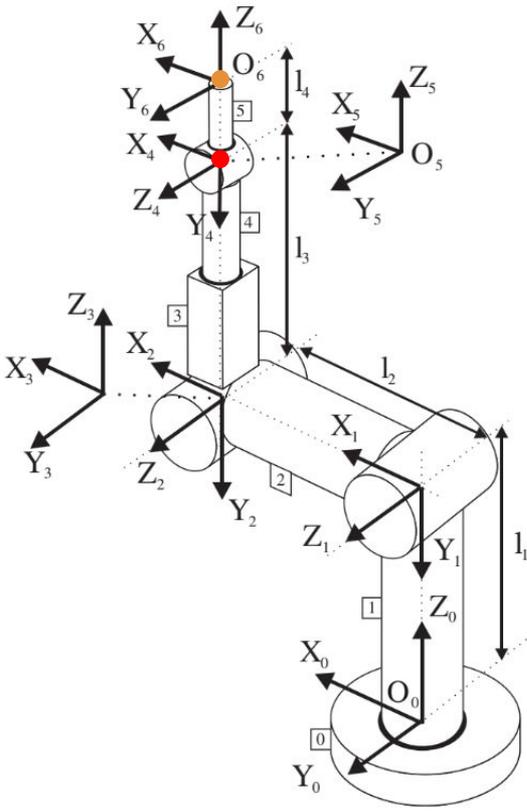
En este caso, los ejes de las últimas 3 articulaciones (z_3 , z_4 y z_5) se cortan en la articulación 5 (punto rojo) → *Muñeca* (\mathbf{p}_m)

Se puede observar que una variación en las articulaciones 4, 5 y 6, no modifica la ubicación de la muñeca, por lo que este punto solo depende de q_1 , q_2 y q_3 .

Se tiene también, que el extremo del robot (\mathbf{p}_f) estará ubicado en el origen del sistema 6 (punto naranja), que es un desplazamiento según z_5 ($= z_6$).

→ $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_f - l_4 \mathbf{z}_6$ Donde cada elemento se encuentra escrito en la base 0.

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

En este caso, los ejes de las últimas 3 articulaciones (z_3 , z_4 y z_5) se cortan en la articulación 5 (punto rojo) → *Muñeca* (\mathbf{p}_m)

Se puede observar que una variación en las articulaciones 4, 5 y 6, no modifica la ubicación de la muñeca, por lo que este punto solo depende de q_1 , q_2 y q_3 .

Se tiene también, que el extremo del robot (\mathbf{p}_f) estará ubicado en el origen del sistema 6 (punto naranja), que es un desplazamiento según z_5 ($= z_6$).

$$\rightarrow \mathbf{p}_m = \mathbf{p}_f - l_4 \mathbf{z}_6$$

Donde cada elemento se encuentra escrito en la base 0.

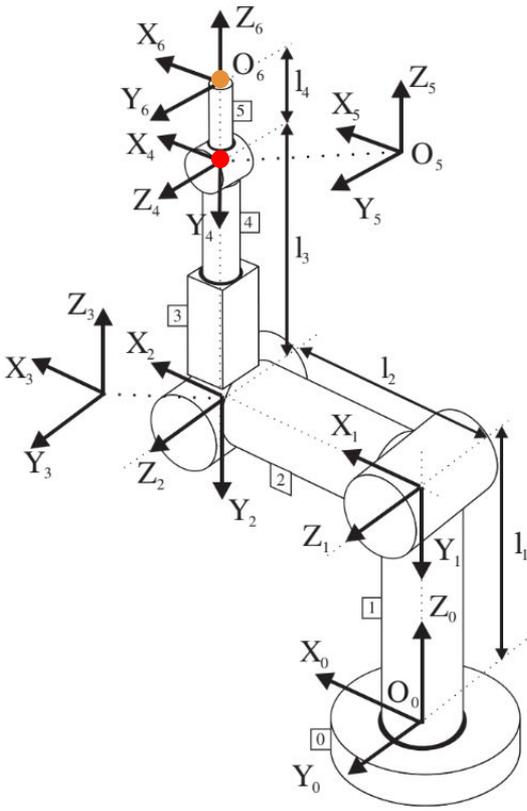
$\mathbf{p}_f = (p_{fx}, p_{fy}, p_{fz})$ es el punto donde se desea la terminal

l_4 es un parámetro geométrico del robot

\mathbf{z}_6 es la tercer columna de la MTH: $T = {}_0A_6$

Entonces \mathbf{p}_m es fácilmente obtenible conociendo \mathbf{p}_f

Desacoplamiento cinemático

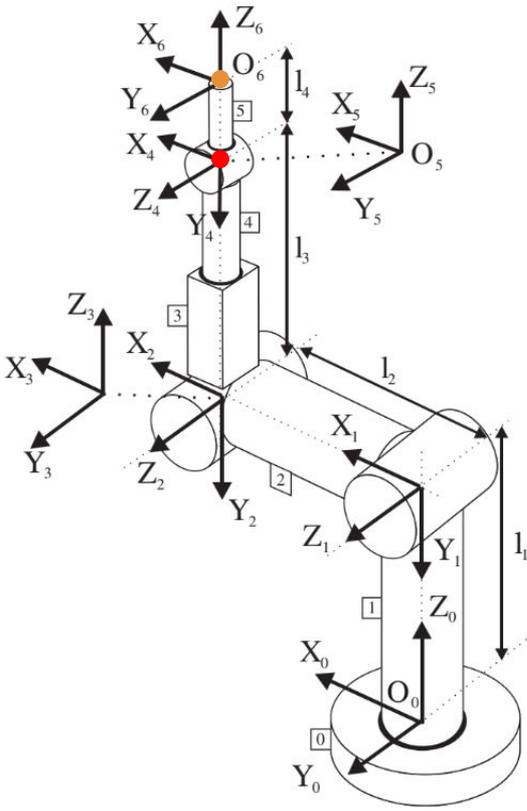


Veamos un ejemplo:

Los eslabones 1, 2 y 3, que finalizan en \mathbf{p}_m constituyen un robot de 3 gdl equivalente al analizado mediante un método geométrico, donde se vio que era posible la obtención de $q_1(\mathbf{p})$, $q_2(\mathbf{p})$, $q_3(\mathbf{p})$.

Queda ahora obtener los valores de q_4 , q_5 , y q_6 que resultan en la orientación deseada.

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

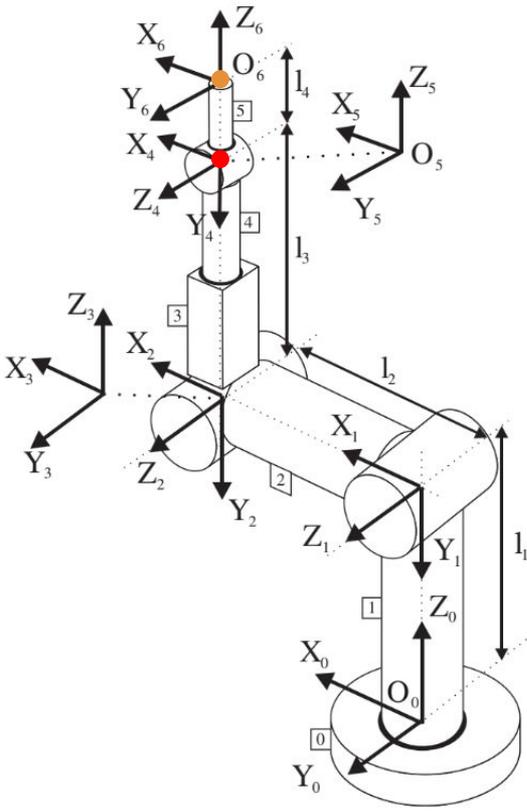
Los eslabones 1, 2 y 3, que finalizan en \mathbf{p}_m constituyen un robot de 3 gdl equivalente al analizado mediante un método geométrico, donde se vio que era posible la obtención de $q_1(\mathbf{p})$, $q_2(\mathbf{p})$, $q_3(\mathbf{p})$.

Queda ahora obtener los valores de q_4 , q_5 , y q_6 que resultan en la orientación deseada.

Consideremos ${}^0\mathbf{R}_6$ a la submatriz de rotación de \mathbf{T} :

$\rightarrow {}^0\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}] = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6$ Donde ${}^0\mathbf{R}_6$ es conocida por ser la orientación de la herramienta

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Los eslabones 1, 2 y 3, que finalizan en \mathbf{p}_m constituyen un robot de 3 gdl equivalente al analizado mediante un método geométrico, donde se vio que era posible la obtención de $q_1(\mathbf{p}), q_2(\mathbf{p}), q_3(\mathbf{p})$.

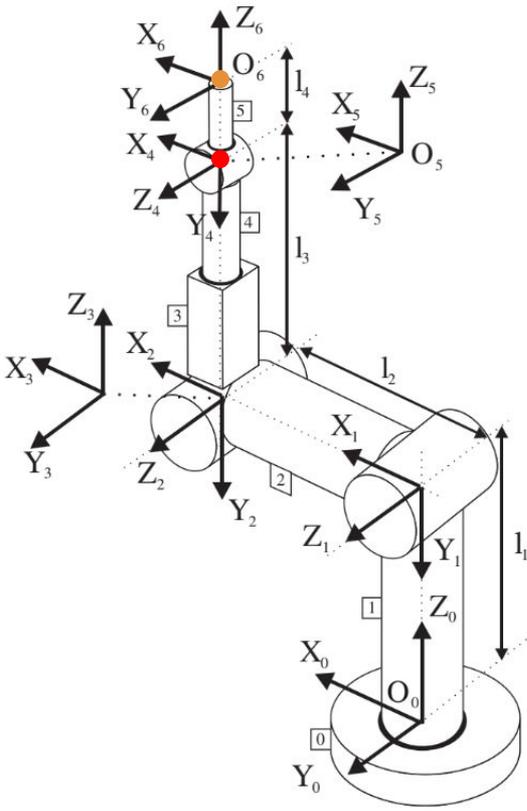
Queda ahora obtener los valores de $q_4, q_5,$ y q_6 que resultan en la orientación deseada.

Consideremos ${}_0\mathbf{R}_6$ a la submatriz de rotación de \mathbf{T} :

→ ${}_0\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] = {}_0\mathbf{R}_3 {}_3\mathbf{R}_6$ Donde ${}_0\mathbf{R}_3$ es conocida por ser la orientación de la herramienta

→ Como se conoce $q_1(\mathbf{p}), q_2(\mathbf{p})$ y $q_3(\mathbf{p})$ se pueden calcular las MTH a partir de DH

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Los eslabones 1, 2 y 3, que finalizan en \mathbf{p}_m constituyen un robot de 3 gdl equivalente al analizado mediante un método geométrico, donde se vio que era posible la obtención de $q_1(\mathbf{p})$, $q_2(\mathbf{p})$, $q_3(\mathbf{p})$.

Queda ahora obtener los valores de q_4 , q_5 , y q_6 que resultan en la orientación deseada.

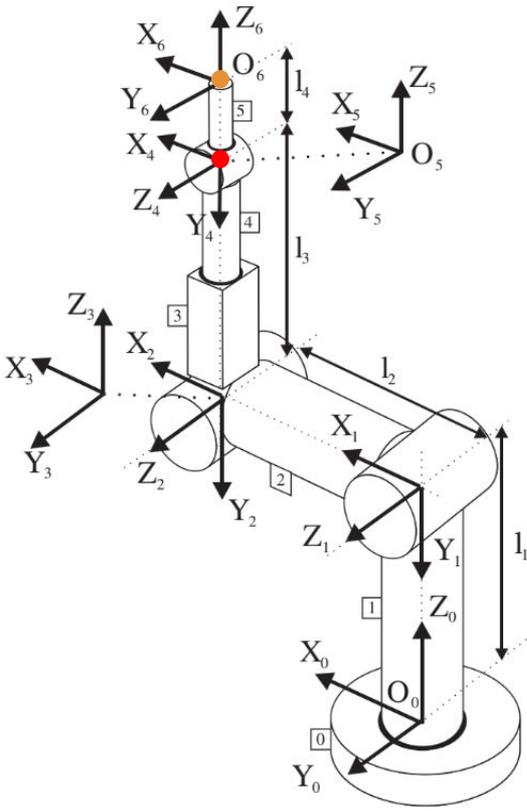
Consideremos ${}^0\mathbf{R}_6$ a la submatriz de rotación de T :

→ ${}^0\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6$ Donde ${}^0\mathbf{R}_6$ es conocida por ser la orientación de la herramienta

→ Como se conoce $q_1(\mathbf{p})$, $q_2(\mathbf{p})$ y $q_3(\mathbf{p})$ se pueden calcular las MTH a partir de DH

→ Se pueden determinar las submatrices ${}^0\mathbf{R}_1$, ${}^1\mathbf{R}_2$ y ${}^2\mathbf{R}_3 \rightarrow {}^0\mathbf{R}_3$

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Los eslabones 1, 2 y 3, que finalizan en \mathbf{p}_m constituyen un robot de 3 gdl equivalente al analizado mediante un método geométrico, donde se vio que era posible la obtención de $q_1(\mathbf{p}), q_2(\mathbf{p}), q_3(\mathbf{p})$.

Queda ahora obtener los valores de $q_4, q_5,$ y q_6 que resultan en la orientación deseada.

Consideremos ${}^0\mathbf{R}_6$ a la submatriz de rotación de \mathbf{T} :

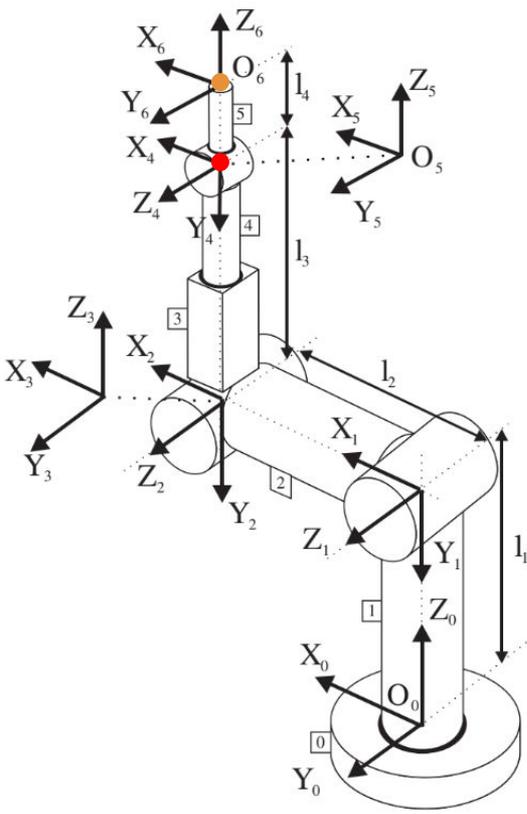
$\rightarrow {}^0\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6$ Donde ${}^0\mathbf{R}_6$ es conocida por ser la orientación de la herramienta

\rightarrow Como se conoce $q_1(\mathbf{p}), q_2(\mathbf{p})$ y $q_3(\mathbf{p})$ se pueden calcular las MTH a partir de DH

\rightarrow Se pueden determinar las submatrices ${}^0\mathbf{R}_1, {}^1\mathbf{R}_2$ y ${}^2\mathbf{R}_3 \rightarrow {}^0\mathbf{R}_3$

$\rightarrow {}^3\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ **CONOCIDA!**

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Por otra parte, se sabe también que:

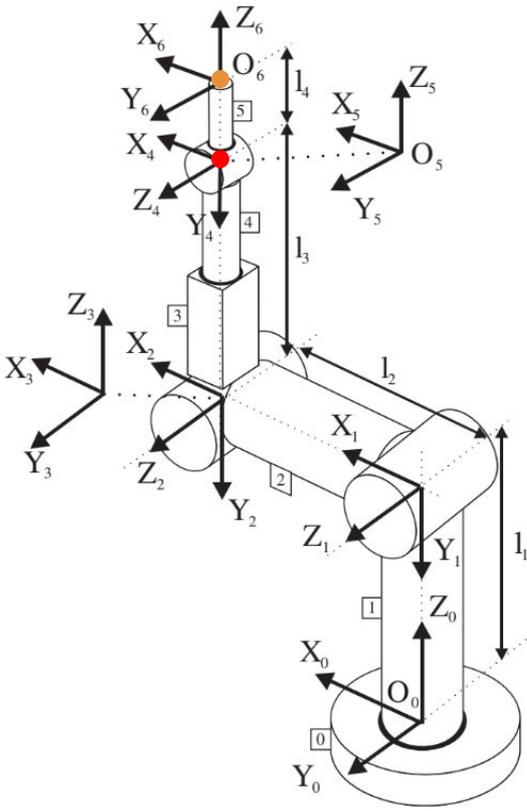
${}^3R_6 = {}^3R_{44} {}^4R_{55} {}^5R_6$ Donde ${}_{i-1}R_i$ son las matrices de rotación asociadas a los últimos GDL

$${}^3R_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4R_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5R_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Por otra parte, se sabe también que:

${}^3R_6 = {}^3R_{44} {}^R_{55} {}^R_{66}$ Donde ${}_{i-1}R_i$ son las matrices de rotación asociadas a los últimos GDL

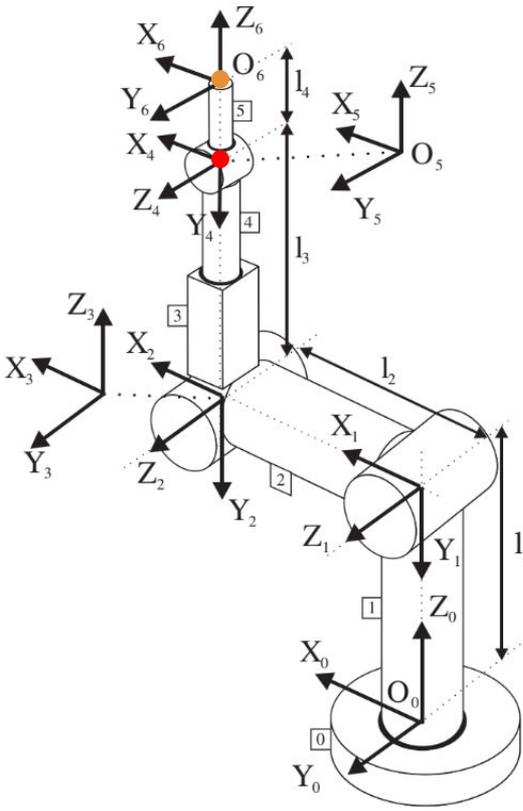
$${}^3R_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4R_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5R_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3R_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & -S_4 C_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix}$$

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Por otra parte, se sabe también que:

${}^3R_6 = {}^3R_{44} {}^4R_{55} {}^5R_6$ Donde ${}_{i-1}R_i$ son las matrices de rotación asociadas a los últimos GDL

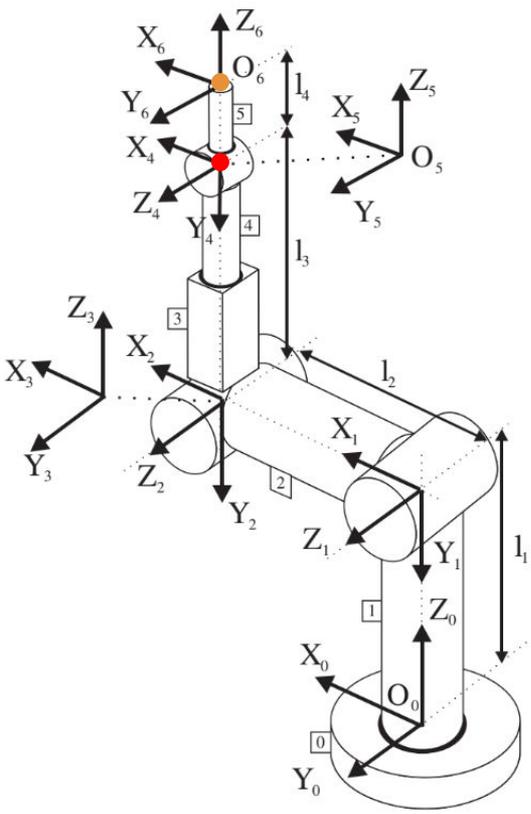
$${}^3R_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4R_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5R_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3R_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & -S_4 C_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Por otra parte, se sabe también que:

${}^3R_6 = {}^3R_{44} {}^R_{55} {}^R_{66}$ Donde ${}_{i-1}R_i$ son las matrices de rotación asociadas a los últimos GDL

$${}^3R_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4R_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5R_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3R_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & -S_4 C_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

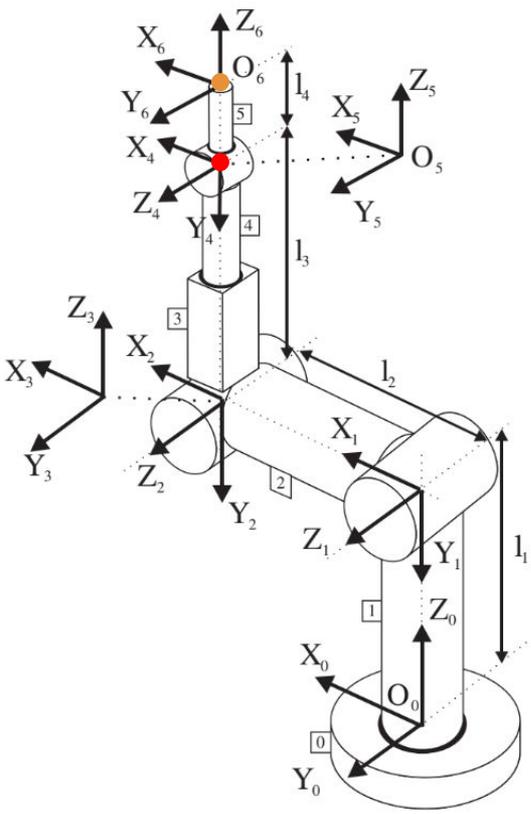
$$r_{13} = C_4 S_5$$

$$r_{23} = -S_4 C_5$$

Seleccionando:

$$r_{31} = -S_5 C_6 \quad r_{32} = -S_5 S_6 \quad r_{33} = -C_5$$

Desacoplamiento cinemático



Veamos un ejemplo:

Por otra parte, se sabe también que:

${}^3R_6 = {}^3R_{44} {}^R_{55} {}^R_{66}$ Donde ${}_{i-1}R_i$ son las matrices de rotación asociadas a los últimos GDL

$${}^3R_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4R_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5R_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3R_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & -S_4 C_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Seleccionando:

$$r_{13} = C_4 S_5$$

$$r_{23} = -S_4 C_5$$

$$r_{31} = -S_5 C_6 \quad r_{32} = -S_5 S_6 \quad r_{33} = -C_5$$

se obtienen:

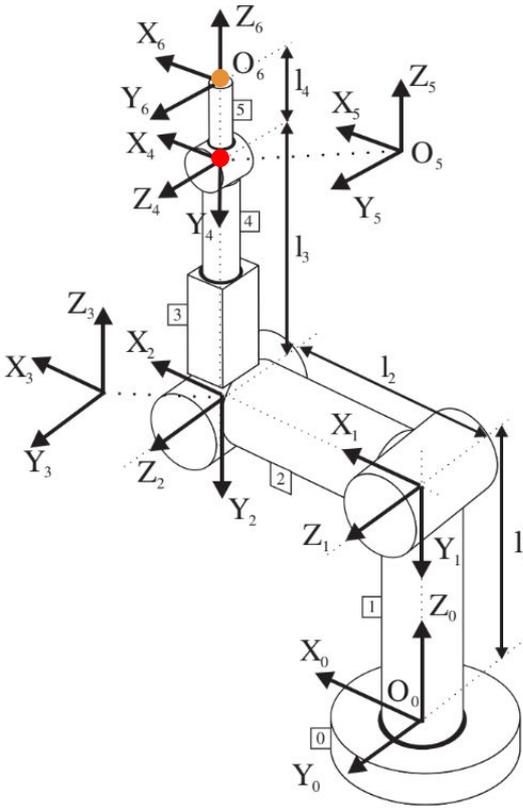
$$q_4 = \arcsen \left(-\frac{r_{23}}{r_{33}} \right)$$

$$q_5 = \arccos (r_{33})$$

$$q_6 = \arctan \left(-\frac{r_{32}}{r_{31}} \right)$$

Desacoplamiento cinemático

Veamos un ejemplo:



$$q_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$$

$$\cos(q_3) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_1l_2} \Rightarrow q_3 = \text{atan2}(\sin(q_3), \cos(q_3))$$

$$\sin(q_3) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_3)}$$

$$q_2 = \text{atan2}(p_z, p_r) = \text{atan2}(p_z, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2}) - \text{atan2}(l_3 \sin(q_3), l_2 + l_3 \cos(q_3))$$

$$q_4 = \arcsin\left(-\frac{r_{23}}{r_{33}}\right)$$

$$q_5 = \arcsin(r_{33})$$

$$q_6 = \arctan\left(-\frac{r_{32}}{r_{31}}\right)$$

CUIDADO!

- q_1, q_2 y q_3 fueron copiadas del ejemplo anterior que no es exactamente igual porque el sistema 0 está ubicado diferente.
- El punto p en q_1, q_2 y q_3 refiere al punto p_m del ejemplo de 6GDL
- Las expresiones para q_4, q_5 y q_6 deberían expresarse con la función $\text{arctan}(\dots)$

FIN!

