Sistemas de ecuaciones lineales

Matemática 1 – UTU - UdelaR

Bettina Neira – César Piña

π

Temas

› Definición

› Conjunto solución

› Sistemas equivalentes

› Operaciones elementales

› Método de eliminación de Gauss

Definición

Son sistemas de la forma:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde

$$a_{ij} \in \Re\ \forall i,j\ con\ i = 1..m; j = 1..n$$
$$x_i \in \Re\ \forall i = 1..n$$
$$b_i \in \Re\ \forall i = 1..m$$

Tenemos un Sistema de m ecuaciones y n incógnitas

Conjunto solución

Notación: $\mathbb{K}^n \rightarrow$ n − uplas ordenas de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$
Ejemplo: $(1,0) \neq (0,1)$

<u>Definición:</u>
$\alpha = \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ es una solución del Sistema (S) si al sustituir las incógnitas

por los elementos de α; esto es $\begin{matrix} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{matrix}$ se verifican todas las ecuaciones.

Notación: $\mathrm{Sol}(S) \subset \mathbb{R}^n$ conjunto solución del sistema (S)

Ejemplo: $(S)\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x=4 \end{cases}$

$¿\,Es\ \left(-\frac{1}{2},2\right) solución\ del\ sistema\ (S)?$

$\mathrm{x}=-\frac{1}{2},\ \mathrm{y}=2 \Rightarrow$ Verifiquemos en la segunda ecuación: $2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\ \neq 4 \Rightarrow$ no es solución del Sistema

$¿\,Es\ (0,1) solución\ del\ sistema\ (S)?$

$\mathrm{x}=0\ \ \mathrm{y}=1 \Rightarrow$ Verifiquemos en la segunda ecuación: $2(0)=0\ \neq 4 \Rightarrow$ no es solución del sistema

$¿\,Es\ \left(2,-\frac{1}{2}\right) solución\ del\ sistema\ (S)?$

$\mathrm{y}=-\frac{1}{2},\ \mathrm{x}=2 \Rightarrow$ Verifiquemos en la segunda ecuación: $2(4)=4 \Rightarrow$

para afirmar que es solución, es necesario verificar en la primera ecuación: $2+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow$

$\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ es solución del sistema (S)

<u>Definición:</u>

$\alpha=\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ es una solución del Sistema (S) si al sustituir las incógnitas

por los elementos de α; esto es $\begin{matrix} x_1=\alpha_1 \\ x_2=\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_n \end{matrix}$ se verifican todas las ecuaciones.

Sistemas equivalentes

(S) y (S') sistemas lineales (con igual cantidad de incógnitas)
<u>Definición:</u> $\mathrm{S} \sim \mathrm{S}' \leftrightarrow \mathrm{Sol}(\mathrm{S}) = \mathrm{Sol}(\mathrm{S}')$

Ejemplo:

$$(S)\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(S')\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 2y + z = 8 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(S'')\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

¿Son los tres sistemas equivalente?

Operaciones elementales

1. Intercambio de ecuaciones
2. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero
3. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Operaciones elementales

Teorema.

Si a un Sistema lineal (S) le aplicamos las operaciones elementales, se obtiene un sistema (S') equivalente.

Método de eliminación de Gauss

Aplicando en forma ordenada las operaciones elementales, se llega a un sistema de la forma “escalerizada”, que es equivalente al sistema original, y es sencillo de resolver.

En general

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \;\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \;\dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \;\dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

le asociamos la siguente matriz de coeficientes

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Método de eliminación de Gauss

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \;\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \;\dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \;\dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

le asociamos la siguente matriz de coeficientes

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Matriz ampleada de A:

$$\tilde{A} = \left(\boxed{A} \;\middle|\; \boxed{b} \right) \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Método de eliminación de Gauss

Teorema:
Toda matriz se puede escalerizar aplicando las operaciones elementales.

Resolver:

$$(S'')\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) & \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \end{array}$$

$$(S')\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 2y + z = 8 \\ z = 2 \end{cases} \Longleftarrow \begin{array}{c c} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right. & \begin{array}{c} \\ E_1 - E_2 \\ E_1 - E_3 \end{array} \end{array}$$

Rango

El rango de una matriz en *forma escalonada*, es el número de escalones no nulos.

Ejemplos

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -y + z = 0 \\ 0 \ = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango(A) = 2

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 0 = 0 \\ 0 \ = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango(A) = 1

$Sol(S) = \{(8-y-2z, y, z)\}$

Rango

El rango de una matriz en ***forma escalonada***, es el número de escalones no nulos.

Ejemplos

Rango(A) = 3

$$(S)\begin{cases} w + x + y + 2z = 8 \\ x - y + z = 0 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Teorema de Rouche-Fröbenius

Sea $\mathrm{A.x = b}$ la representación matricial de un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas.

- Si rango(A) < rango(Ã) -> sistema incompatible (No hay solución)

- Si rango(A) = rango (Ã) -> $\begin{cases} rango(A) = n \;\rightarrow sistema\ determinado\ \text{(solución única)} \\ rango(A) < n \;\rightarrow sistema\ indeterminado\ con \\ \qquad\qquad\qquad\quad n - p\ grados\ de\ libertad \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{(infinitas soluciones)} \end{cases}$