Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen

26 de febrero de 2022

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

La duración del examen es de tres horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Tenga cuidado al pasar las respuestas
Para los ejercicios de verdadero o falso y los de múltiple opción,
lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

VERDADERO O FALSO (Total: 12 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **V** o **F**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**

Correctas: 10 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 48 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

V/F	MO	D1	D2	Total

PARTE I: Verdadero o Falso

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = |x + e^{y^2}|$. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones sobre f es verdadera o falsa.

(1) f es continua en $(0, 0)$.

(2) f no es continua en $(-1, 0)$.

(3) f es diferenciable en $(0, 0)$ y su gradiente en ese punto es $(1, 0)$.

(4) Existe la derivada parcial de f respecto a x en $(-1, 0)$ y vale 1.

(5) Existe la derivada parcial de f respecto a y en $(-1, 0)$ y vale 0.

(6) f es integrable en $K = [0, 1] \times [-1, 1]$ y $\displaystyle\iint_K f = 2 \iint_{[0,1]\times[0,1]} f$.

PARTE II: Múltiple Opción

MO 1. Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy + \ln(x^2 + y) - (a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy)}{x^2 + (y - 1)^2} = 0.$$

Entonces la suma $a + b + c + d + e + f$ es igual a:

(A) 2 (C) 1 (E) 3

(B) 0 (D) -1 (F) -2

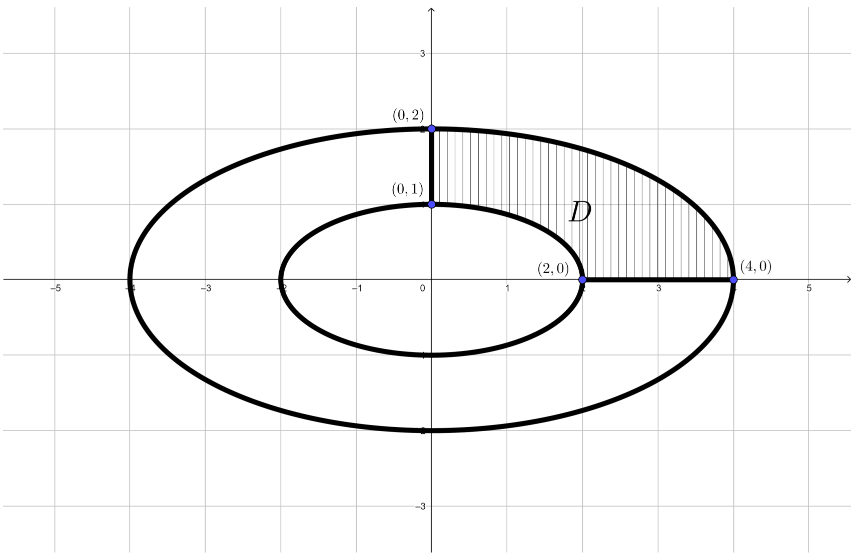
MO 2. Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 4)$. Calcular la integral

$$\iint_T x \, dxdy.$$

(A) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (E) 4

(B) 3 (D) $\frac{5}{3}$ (F) $\frac{11}{2}$

MO 3. Consideremos la región D rayada en la figura, que está comprendida entre dos elipses y contenida en el primer cuadrante.



Calcular

$$\iint_D y\, dxdy.$$

(A) $\frac{5}{3}$

(B) $\frac{7}{3}$

(C) $\frac{11}{3}$

(D) $\frac{14}{3}$

(E) $\frac{19}{3}$

(F) $\frac{22}{3}$

MO 4. Recordemos que el plano complejo $\mathbb{C}$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$, considerando que el número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Consideremos el siguiente subconjunto del plano complejo:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z\bar{z} > 2, \ \mathrm{Re}(z) > 1, \ \mathrm{Im}(e^z) = 0\}.$$

Si ahora pensamos en A como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) A es abierto, es acotado, y acumula en $(1, 1)$.

(B) A no es abierto, es acotado, y acumula en $(1, 1)$.

(C) A no es abierto, es acotado, y no acumula en $(1, 1)$.

(D) A es abierto, no es acotado, y no acumula en $(1, 1)$.

(E) A no es abierto, no es acotado, y no acumula en $(1, 1)$.

(F) A no es abierto, no es acotado, y acumula en $(1, 1)$.

PARTE III: Desarrollo

(Justifique detalladamente todas sus respuestas)

Desarrollo 1. [`24 pts.`] Consideremos las siguientes sucesiones de números reales:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \ \text{ con } (n \geq 2) \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{n \ \ln(n) \ (\ln(\ln(n)))^2} \ \text{ con } (n \geq 3).$$

(A) Para la sucesión (a_n), estudiar su monotonía y convergencia. [`6 pts.`]

(B) Para la sucesión (b_n), estudiar su monotonía y convergencia. [`6 pts.`]

(C) Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ es absoluta y condicionalmente convergente. [`6 pts.`]

(D) Determinar si la serie $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ converge o diverge. [`6 pts.`]

Desarrollo 2. [`24 puntos`] Consideremos la siguiente función escalar sobre $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} y\dfrac{(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(A) Determinar si f es continua en el punto $(0, 0)$. [`8 pts.`]

(B) Calcular, en caso de existir, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0, 0)$. [`8 pts.`]

(C) Determinar si f es diferenciable en $(0, 0)$. [`8 pts.`]