Cálculo diferencial e integral de varias variables.

Parcial 26/11/2021

Soluciones (versión 01)

Ejercicios tipo VF

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ tiene como recorrido al conjunto $(0,1]$.
Para $k\notin(0,1]$ el conjunto de nivel k es vacío.
El conjunto de nivel 1 es $\{(0,0)\}$.
Para $k\in(0,1)$, el conjunto de nivel k es la circunferencia de ecuación

$$x^2+y^2=-\log k.$$

Es decir, para todo $r>0$ la circunferencia centrada en el origen y radio r es el conjunto de nivel e^{-r^2}.
La afirmación es verdadera.

2) La afirmación es falsa. Un contraejemplo es $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } xy=0\\ 1 & \text{si } xy\neq 0,\end{cases}$$

que tiene derivadas parciales en $(0,0)$ y no es continua en $(0,0)$.

3) $\nabla f(x,y)=(2,1)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}$. Por lo tanto la afirmación es verdadera en la versión 01 y falsa en la versión 10.

4) La afirmación es verdadera; ver teórico.

Ejercicios tipo MO

Ej. 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{e^{x^2+y^2}-1}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(u)}{e^u-1}=$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}}_{\xrightarrow{u\to 0}\,1}\cdot\underbrace{\frac{u}{e^u-1}}_{\xrightarrow{u\to 0}\,1}=1.$$

Ej. 2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{ax^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=0.\end{cases}$$

El valor de f en el eje y es

$$f(0,y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\neq 0\\ 1 & \text{si } y=0\end{cases}$$

por lo que f no es continua para ningún valor de a.

Ej. 3

Como f es diferenciable en $(0,0)$, para cualquier dirección u

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=df_{(0,0)}(u),$$

y $df_{(0,0)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una transformación lineal. Como

$$w=2\cdot(1,0)-(1,1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0)=df_{(0,0)}\big(2(1,0)-(1,1)\big)=$$

$$2\,df_{(0,0)}(1,0)-df_{(0,0)}(1,1)=$$

$$=2\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=2\cdot 2-5=-1.$$

Ej. 4

$$f(x,y)=e^{xy^2}(2x+x^3y)$$

$$f(1,0)=2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2e^{xy^2}(2x+x^3y)+e^{xy^2}(2+3x^2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy\,e^{xy^2}(2x+x^3y)+e^{xy^2}\cdot x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=1$$

El diferencial de f en $(1,0)$ es $df_{(1,0)}(x,y)=2x+y$, por lo que el plano π es el plano paralelo a

$$z=2x+y \qquad (*)$$

que pasa por $(1,0,2)$. Como $(1,0,2)$ satisface $(*)$, ésta es la ecuación de π. Por lo tanto $(0,0,0)\in\pi$.

Ej. 5

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{y^2+1};\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-(y^2+1)-(x^2-y)\cdot 2y}{(y^2+1)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-1.$$

Como $\nabla(f\circ g)(1,1)=\nabla f(1,0)\cdot J_g(1,1)$,

$$\nabla(f\circ g)(1,1)=(2\ \ -1)\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=(3,1).$$

Por lo tanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=3.$

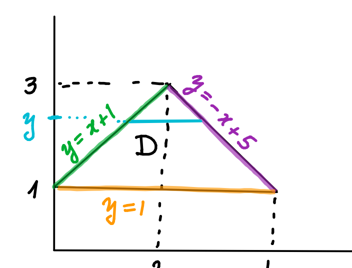
Ej. 6

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=(x-1)e^{y^2}$. Su polinomio de Taylor de orden 2 en $(1,0)$ es $P_2(x,y)=x-1$.
Por lo tanto

$$\frac{f(x,y)-x+1}{(x-1)^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{}0.$$

Entonces $a=-1$, $b=1$, $c=d=e=f=0$, y $a+b+c+d+e+f=-1+1=0$.

Ej. 7



$$\iint_D (xy^2)\,dx\,dy=\int_1^3\left(\int_{y-1}^{5-y}xy^2\,dx\right)dy$$

$$=\int_1^3 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_{x=y-1}^{x=5-y}\,dy$$

$$=\int_1^3(-4y^3+12y^2)\,dy=$$

$$=\left(-y^4+4y^3\right)\Big|_1^3=24.$$

Ej. 8

En coordenadas polares, estamos integrando en

$$\left\{(\rho,\theta):-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 1\le\rho\le 2\right\}$$

$$\iint_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_1^2\frac{\rho\cos\theta}{\rho}e^{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\right)d\theta=$$

$$=\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\right)\left(\int_1^2\rho e^{\rho^2}d\rho\right)=$$

$$=\left(\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}\right)\left(\frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_1^2\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}(e^4-e)=\frac{\sqrt{2}}{2}e(e^3-1).$$