v 11

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2021

Primer parcial

5 de octubre de 2021

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

La duración del parcial es de tres horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Tenga cuidado al pasar las respuestas
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

VERDADERO O FALSO (Total: 8 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **V** o **F**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**

Correctas: 2 puntos. Incorrectas: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 32 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Correctas: 4 puntos. Incorrectas: −1 punto. Sin responder: 0 puntos.

SOLO PARA USO DOCENTE

V/F	MO	Total

Ejercicios del tipo VERDADERO/FALSO

Indicar si las siguientes afirmaciones son *necesariamente* verdaderas.

1. Todo número complejo distinto de 0 tiene exactamente tres raíces cúblicas.
2. Si P es un polinomio con coeficientes complejos y $\lambda \in \mathbb{C}$ es raíz de P, entonces $\bar{\lambda}$ también es raíz de P.
3. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\forall n \geq 0\ a_n \geq 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
4. Consideremos la ecuación diferencial $y' - \cos(x)y = 0$. Si y_1 e y_2 son soluciones de la misma, entonces $y_1 + y_2$ tambiés es solución.

Ejercicios de MÚLTIPLE OPCIÓN

Ejercicio 1

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + e^{-(n+1)^2} - e^{-n^2} \right)$$

(A) converge a $\frac{3}{2}$.

(B) converge a $\frac{1}{2}$.

(C) converge a 1.

(D) converge a $3 - e$.

(E) diverge.

Ejercicio 2

Consideremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n^4 + 2n + 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}.$$

(A) La primera converge y la segunda diverge.

(B) La primera converge, y la segunda converge pero no converge absolutamente.

(C) La primera converge y la segunda converge absolutamente.

(D) Ambas divergen.

(E) La primera diverge, y la segunda converge pero no converge absolutamente.

Ejercicio 3

La integral impropia

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

(A) converge a -4.

(B) converge a $2\sqrt{3}$.

(C) converge a $-\sqrt{2}$.

(D) converge a $-\sqrt[3]{2}$

(E) diverge.

Ejercicio 4

Consideremos los números complejos que satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$\begin{cases} z\bar{z} &= 4 \\ Re(z)^4 &= 1 \\ |e^z| &> 1 \end{cases}$$

Entonces el producto de dichos números da:

(A) 0

(B) $4i$

(C) 16

(D) 4

(E) $2+2i$

Ejercicio 5

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 6x - 1$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Entonces $y(1)$ vale:

(A) $-e^{-2} + 2e^{-3} - 2$

(B) $e^2 - e^{-3} + 5$

(C) $2e^{-2} - e^{-3}$

(D) $e^2 - e^{-3} + 3$

(E) $e^{-2} + e^{-3} + 5$

Ejercicio 6

Consideremos la sucesión de números reales $(a_n)_{n\geq 0}$ que satisface la relación

$$a_{n+1} = 2a_n + 5$$

y tal que $a_0 = 0$.
Entonces:

(A) $(a_n)_{n\geq 0}$ es creciente y no es acotada.

(B) $(a_n)_{n\geq 0}$ es creciente y tiene límite 5.

(C) $(a_n)_{n\geq 0}$ es creciente y tiene límite -5.

(D) $(a_n)_{n\geq 0}$ es decreciente y tiene límite -5.

(E) $(a_n)_{n\geq 0}$ no es ni creciente ni decreciente, pero converge a -5.

Ejercicio 7

Consideremos la sucesión en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$a_n = \left(\frac{(1 - e^{\frac{1}{n^2}})n^2}{3}, \frac{(-1)^n \log(n)}{\log(2n+1)} \right), \quad n \geq 1.$$

Entonces:

(A) $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a $(-1/3, 0)$.

(B) $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a $(1/3, 0)$.

(C) $(a_n)_{n\geq 1}$ está acotada, y tiene subsucesiones que convergen a $(-1/3, 1)$ y $(-1/3, -1)$.

(D) $(a_n)_{n\geq 1}$ está acotada, y tiene subsucesiones que convergen a $(1/3, 1)$ y $(1/3, -1)$.

(E) $(a_n)_{n\geq 1}$ no está acotada.

Ejercicio 8

Consideremos el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 - 4y^2 = 0\} - \{(0, 0)\},$$

y las siguientes afirmaciones:

(I) A no es ni abierto ni cerrado.

(II) Todos los puntos de A son de acumulación de A.

(III) A es un conjunto acotado.

Entonces:

(A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.

(B) Sólo la afirmación (II) es verdadera.

(C) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

(D) Ninguna de las tres afirmaciones es verdadera.

(E) Las tres afirmaciones son verdaderas.
