Práctico 5

Teoría de Lenguajes

Los objetivos de este práctico son que el/la estudiante: se familiarice con otros formalismos de autómata finito como

- autómata finito con **salida**,
- autómata finito de **dos cinta**s,
- autómata finito **probabilístico**.

Ejercicios fundamentales

Ejercicio 1

Para cada uno de los siguientes problemas construya una máquina de **Moore** y una máquina de **Mealy** que lo resuelva. Debajo de cada problema se muestran ejemplos de **Entrada** y **Salida** particulares al problema.

1. Dada la entrada w, la salida debe ser a^n donde n es la cantidad de veces que ocurre la subtira ab en w.
   - **Entrada**: $bbbaa \longrightarrow$ **Salida**: ϵ
   - **Entrada**: $baaba \longrightarrow$ **Salida**: a
   - **Entrada**: $baababab \longrightarrow$ **Salida**: aaa
2. Dada la entrada w, la salida debe ser a^n donde n es la cantidad de veces que ocurre la subtira aba en w.
   - **Entrada**: $bbbaa \longrightarrow$ **Salida**: ϵ
   - **Entrada**: $baaba \longrightarrow$ **Salida**: a
   - **Entrada**: $baababab \longrightarrow$ **Salida**: aa
3. Dada la entrada w, la salida debe ser una tira w' de largo $|w|$ tal que $w'_i = a$ ya sea si $i = 1$ o si $i > 1$ y además $w_i = w_{i-1}$. Por último $w'_i = b$ en cualquier otro caso[1].
   - **Entrada**: $\epsilon \longrightarrow$ **Salida:** ϵ
   - **Entrada**: $bbbaa \longrightarrow$ **Salida**: $aaaba$
   - **Entrada**: $baababab \longrightarrow$ **Salida**: $ababbbbb$
4. Dada la entrada w sobre $\Sigma = \{a, b\}$, la salida[2] debe ser una tira w' sobre $\Sigma' = \{c, d\}$ que verifique $|w'|_c = \lfloor |w|_a/2 \rfloor$ y $|w'|_d = 2|w|_b$.
   - **Entrada**: $aab \longrightarrow$ **Salida:** cdd
   - **Entrada**: $abaa \longrightarrow$ **Salida**: ddc
   - **Entrada**: $bbb \longrightarrow$ **Salida**: $dddddd$

---

[1] $w_i \in \Sigma$ denota al símbolo ubicado en la posición i-ésima de la tira w.

[2] Para una misma entrada podrían existir varias salidas. La máquina que construya debe dar solamente una de ellas.

Ejercicio 2

Para cada uno de los siguientes lenguajes construya un **autómata finito determinista de dos cintas** que lo reconozca:

1. $L_1 = \{(x, y) : |x| = |y| \wedge x_i = a \iff y_i = b \wedge x \in \{a, b\}^* \wedge y \in \{a, b\}^*\}$
2. $L_2 = \{(a^n b, a^n b^m) : n \geq 0 \wedge m \geq 0\}$
3. $L_3 = \{(a^n b, a^m b^n) : n \geq 0 \wedge m \geq 0\}$
4. $L_4 = \{(x, y) : |y| = 2|x|_a + 3|x|_b \wedge x \in \{a, b\}^* \wedge y \in \{a, b\}^*\}$
5. $L_5 = \{a^{2k} b^p, b^t a^{2p+k} : k > 0 \wedge p > 0 \wedge t > 0\}$

Ejercicios complementarios

Ejercicio 3

Parte A

Sea la máquina de Mealy $M = (\{0, 1\}, \{+, *\}, \{q_0, q_1\}, \delta, \lambda)$, donde las funciones δ y λ están dadas por:

δ	**0**	**1**
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_0

λ	**0**	**1**
q_0	$*$	$+$
q_1	$+$	$*$

Utilizando el algoritmo visto en el teórico construya la **máquina de Moore equivalente**.

Parte B

Sea la máquina de Mealy $M = (\{0, 1\}, \{a, b, *\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \}, \delta, \lambda)$, donde las funciones δ y λ están dadas por:

δ	**0**	**1**
q_0	q_1	q_3
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2
q_3	q_4	q_2
q_4	q_1	q_5
q_5	q_1	q_5

λ	**0**	**1**
q_0	$*$	$*$
q_1	a	b
q_2	a	b
q_3	a	b
q_4	b	a
q_5	b	a

Utilizando el algoritmo visto en el teórico construya **la máquina de Mealy mínima**.

Ejercicio 4

Autómata probabilístico

Los **Autómatas Probabilísticos** se pueden definir de la siguiente manera:

- $AFP = (\Sigma, Q, M, P(0), F$ donde
  - Σ es el alfabeto de los símbolos de entrada.
  - Q es el conjunto de estados.
  - $M = \{M(a) : a \in \Sigma\}$ es el conjunto de matrices de probabilidad de transición entre estados.
  - $P(0)$ el vector de estado inicial.
  - $F \subseteq Q$ el conjunto de estados finales.

Para cada símbolo a del alfabeto de entrada existe una matriz de probabilidad de transición ($M(a)$) que define la probabilidad de que el autómata vaya de un estado a otro cuando recibe el símbolo a. Son matrices nxn, siendo n la cantidad de estados.

Por tratarse de probabilidades, una propiedad que cumplen estas matrices es que la suma de los elementos de una fila es igual a uno. El vector de estados en un instante de tiempo t ($P(t)$) tiene una componente por cada estado del autómata, y el contenido de cada posición i del vector ($P_i(t)$) corresponde a la probabilidad de que en ese instante t el autómata se encuentre en el estado i. Nuevamente, la suma de los elementos del vector es igual a uno.

Problema

Un robot se encuentra en una casa con tres habitaciones interconectadas entre sí. Dispone de dos operaciones: moverse a la habitación de la izquierda (I), y moverse a la habitación de la derecha (D). Estas dos operaciones no son exactas, con lo que al estar en una habitación h_i y realizar la misma operación, no siempre llega a la misma habitación h_k. El robot termina su recorrido con éxito si termina en la habitación h_3 al recibir una secuencia de órdenes, que pueden ser I o D. El recorrido aleatorio que ha efectuado hasta el momento ha sido el siguiente:

$$h_1 \xrightarrow{I} h_2 \xrightarrow{D} h_1 \xrightarrow{D} h_3 \xrightarrow{I} h_2 \xrightarrow{D} h_1 \xrightarrow{I} h_3 \xrightarrow{D} h_3 \xrightarrow{D} h_1 \xrightarrow{I} h_1 \xrightarrow{D} h_3 \xrightarrow{I} h_2 \xrightarrow{I} h_1$$

1. Describa el autómata probabilístico que modela el comportamiento de dicho entorno.
2. Si empieza en la habitación h_2 y efectúa dos movimientos a la derecha ¿tendrá éxito?
3. Si empieza en la habitación h_1 o en la h_3 de forma equiprobable y efectúa un movimiento a la derecha seguido de otro a la izquierda ¿dónde terminaría?