

Cap. 3 - Dinámica de Fluidos

Matías Fernández, Paulo Valente y Sandra Kahan
Instituto de Física, Facultad de Ingeniería.



1. Fluidos en movimiento

En este capítulo aplicaremos las definiciones estudiadas en capítulos anteriores al estudio de los fluidos en movimiento; por ejemplo, agua que fluye por el lecho de un río o agua que se mueve en el interior de la tubería de una casa cuando se abre una canilla¹. La dinámica de fluidos también se aplica al movimiento del aire (viento) y al estudio de un chorro de agua que sale por el pico de una canilla hacia la atmósfera.

Las Leyes de Newton indican que los cambios de velocidad del fluido son consecuencia de las fuerzas externas que actúan sobre sus elementos de volumen. El Teorema del Trabajo y la Energía indica que los cambios de energía cinética son consecuencia del trabajo de las fuerzas que actúan sobre esos elementos del fluido. Las fuerzas de presión son fuerzas no conservativas; el trabajo que realizan no está asociado a una energía potencial. El peso está asociado a la energía potencial gravitatoria.

Flujo es fluido en movimiento. Imagina que quieres medir la velocidad del chorro de agua que sale por el pico de una canilla y cae a la pileta. Lo primero que notamos es que el sistema no es puntual; es extenso. Entonces, vale preguntarse: ¿Qué es la velocidad del chorro? ¿Es la velocidad de cada una de sus gotas; concebidas como partículas del fluido? ¿Es la velocidad del chorro en un punto particular? De esas dos preguntas surgen dos perspectivas diferentes: **Lagrange** mide la posición $\vec{r}_i(t)$ de cada gota, sometida a la aceleración \vec{g} y considerando su posición y velocidad inicial. **Euler** se interesa por conocer la velocidad del flujo en un punto particular de coordenadas (x, y, z) . A medida que el tiempo t transcurre, por ese punto pasan muchas gotas diferentes. La velocidad de esas gotas es la velocidad del flujo en ese punto $\vec{v}(x, y, z, t)$.

En este curso usaremos la perspectiva de Euler para determinar cuál es la energía asociada a los flujos. Analizar en detalle las fuerzas que aceleran un elemento de fluido implica el manejo de herramientas matemáticas más sofisticadas que reservaremos para secciones de lectura opcional.

¹Como se dijo en el capítulo anterior, cuando la canilla está cerrada, el agua contenida en el caño está en condiciones hidrostáticas.

1.1. Medida de la velocidad de un fluido

Explicararemos muy sucintamente dos métodos que se usan para medir la velocidad de un flujo: un sistema extenso, continuo, incoloro o de color homogéneo.

- Inyectando un colorante (“dye”, en inglés): La figura 1 muestra sucesivas fotos de agua coloreada que es inyectada en un tanque que contiene agua sin colorear. El chorro (en rojo) entra por un pequeño orificio circular que se ubica en el centro de la base del tanque. El tiempo entre foto y foto es $\Delta t = 0.5$ s. De una foto a la siguiente, es posible apreciar que el chorro “fluye” hacia arriba. Entre la segunda y tercer foto, el flujo rojo atraviesa la segunda línea celeste; se desplazó $\Delta h \approx 4$ cm. La velocidad media del chorro al pasar por la segunda línea celeste es $v = \frac{\Delta h}{\Delta t} \approx 8$ cm/s.

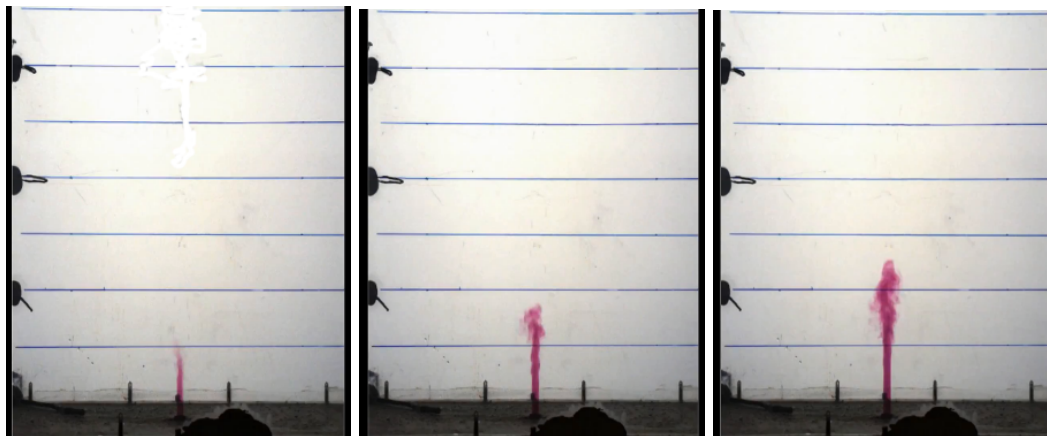


Figura 1: De izquierda a derecha: Agua colorada es inyectada en la parte inferior de un tanque que contiene agua sin colorear. Montaje, fotos y videos: Daniel Freire Cecilia Cabezas, IFFC-UdelaR.

- Sebrando partículas: La figura 2 muestra miles de partículas suspendidas en el agua del mismo tanque. Las partículas tienen (aprox.) la misma densidad que el agua y se mueven con el fluido. Un chorro de agua (sembrado de partículas) se inyecta por el orificio de la base. Las fotos capturan la luz reflejada por las partículas cuando son iluminadas por un laser verde que incide sobre el plano frontal que pasa por el orificio. Separando los 1920x1080 pixeles de las fotos en cuadros de 8x8 pixeles y comparando cada cuadro de una foto con el mismo cuadro de la siguiente, es posible medir la velocidad horizontal y vertical del fluido en todos los puntos del plano iluminado; no sólo en las zonas por donde pasa el chorro.

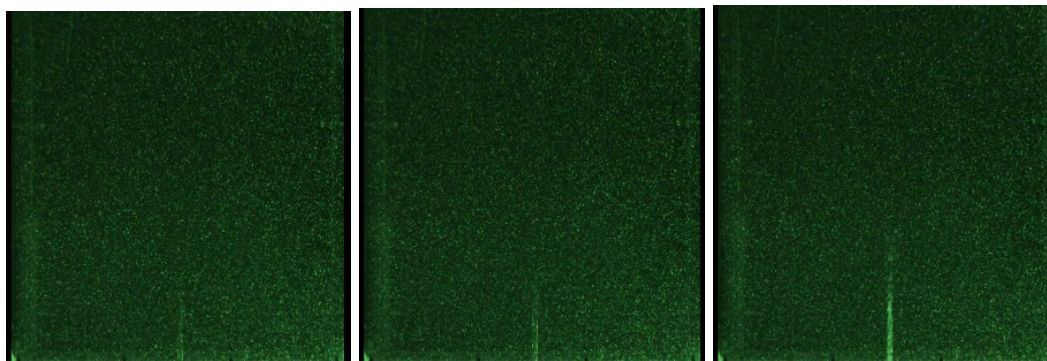


Figura 2: De izquierda a derecha: Agua sembrada con partículas es inyectada en la parte inferior de un tanque que contiene agua sembrada con partículas. Montaje, fotos y videos: Daniel Freire Cecilia Cabezas, IFFC-UdelaR.

1.2. Velocidad Instantánea del Flujo

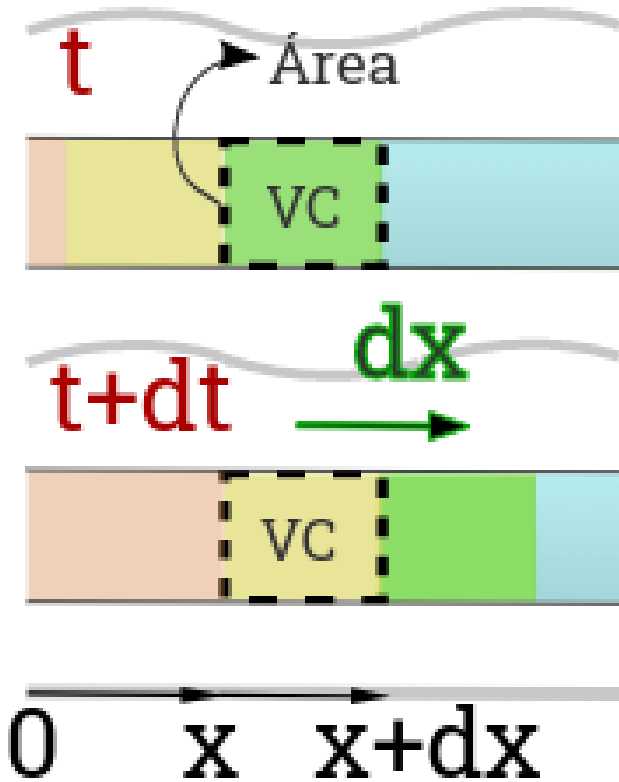


Figura 3: Velocidad de Euler.

Por lo tanto, en el intervalo dt , el fluido (verde) se ha desplazado una distancia dx , definiendo la velocidad instantánea del flujo en ese punto: $\vec{v}(x, t) = \frac{dx}{dt}(x, t) \hat{i}$. Es importante notar que la velocidad del flujo instantánea a un instante es la velocidad de elementos de fluido *diferentes*, pasando por un VC fijo en esa posición x .

1.3. Flujo Volumétrico y Flujo Másico

Considerando que el volumen de control tiene una sección transversal A , la figura 3 muestra que un elemento de volumen $dV = A dx$ atravesó esa superficie. Eso permite definir el **flujo volumétrico** (o caudal) como el volumen de agua que atraviesa la sección A por unidad de tiempo:

$$\dot{V}(x, t) = A \frac{dx}{dt}(x, t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{V}(x, t) = A v(x, t)} \quad (1)$$

Como el fluido es de densidad ρ , $dm = \rho dV$. Entonces, definimos el **flujo másico** como la masa de fluido que atraviesa la sección A por unidad de tiempo:

$$\dot{m}(x, t) = \rho(x, t) \dot{V}(x, t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{m}(x, t) = \rho(x, t) A v(x, t)} \quad (2)$$

donde se ha supuesto que la densidad ρ del fluido tiene un valor conocido en la posición x para el tiempo t .

Órdenes de Magnitud: Caudal

Órdenes de Magnitud: El caudal promedio del Río Uruguay es de $4500 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, mientras que el caudal del flujo de agua en un inmueble es del orden de 0.45 L s^{-1} ; diez millones de veces menor.

1.4. Hipótesis de Trabajo

En la perspectiva de Euler, nos interesa conocer las variables que caracterizan el flujo en un punto particular de coordenadas (x, y, z) y su evolución en el tiempo t . Densidad, velocidad, presión son algunas de esas variables. A continuación, describiremos las propiedades de los flujos y señalaremos las hipótesis de trabajo que simplifican el análisis.

Flujo Incompresible: La densidad del fluido $\rho(x, y, z, t)$ es una de las características del flujo. Para facilitar el estudio, pensaremos en el caso particular de un flujo cuya densidad sea constante en el tiempo y uniforme en el espacio: $\rho(x, y, z, t) = \rho$; por ejemplo, un flujo de agua.

Flujo Confinado: El fluido que se mueve en un contenedor de paredes rígidas está confinado; por ejemplo, agua que se mueve en el interior de una tubería, considerada como sistema inercial. En ese curso supondremos que la tubería está completamente llena de agua.

Por el contrario, el chorro de agua que sale de una canilla hacia la atmósfera no está confinado. Su velocidad puede medirse desde un referencial solidario a La Tierra (considerada, en este curso, como sistema inercial). La presión en todos los puntos del chorro de agua es la presión atmosférica $P(x, y, z, t) = P_0$; constante en el tiempo y uniforme en el espacio.

Flujo Estacionario: En términos generales, la velocidad de un flujo de agua en un punto de coordenadas (x, y, z) depende del tiempo t : $\vec{v}(x, y, z, t)$. Cuando esta variable (y otras) no varía en el tiempo, se está en presencia de un flujo estacionario o permanente: $\vec{v}(x, y, z)$.

Cuando una canilla se mantiene abierta, podemos suponer que el flujo es estacionario: la velocidad de Euler del chorro a una altura z particular es independiente del tiempo $\vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(z)$. Sin embargo, la velocidad de Lagrange depende del tiempo porque cada gota está cayendo, sometida a la aceleración de la gravedad \vec{g} .

En este curso será usual trabajar con un flujo de agua confinado y estacionario en el interior de un tubo muy largo, recto, de sección circular uniforme y radio interior R^2 . Las siguientes propiedades serán descritas para este caso particular.

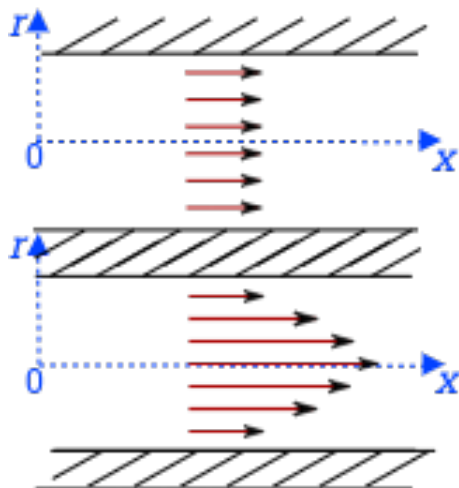


Figura 4: Dos perfiles de velocidad.

Flujo Laminar: Si la velocidad del flujo no es muy alta, el fluido se mueve en capas paralelas a la pared del tubo. Podemos definir la coordenada x sobre el eje de simetría del tubo, asociada a un versor \hat{i} que marque el sentido del flujo. En este caso, la velocidad del flujo tiene una sola componente $\vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z) \hat{i}$.

Si el flujo es laminar, existe simetría axial y es conveniente definir una coordenada radial: $r = \sqrt{y^2 + z^2}$: $0 \leq r \leq R$ que mida la distancia de un punto del flujo al eje de simetría: $\vec{v}(x, r) = v_x(x, r) \hat{i}$.

La figura 4 muestra los perfiles de velocidad de dos flujos diferentes. Ambos flujos están confinados en tubos de paredes rígidas (dibujadas en negro). Un perfil de velocidad consiste en señalar la velocidad del flujo en puntos que se encuentran a una distancia x particular del origen de coordenadas; una tarea sencilla cuando el fluido es laminar. El largo de los vectores (en rojo) indica la rapidez del flujo en puntos que se encuentran a diferentes distancias r del eje de simetría. Aunque se han dibujado sólo algunas flechas en cada perfil, vale señalar que todo el fluido está en movimiento.

²El diámetro de los caños de una vivienda se mide en pulgadas: $1 \text{ inch} = 2.54 \text{ cm}$; $A = \frac{\pi D^2}{4}$.

Flujo No Viscoso: El perfil de velocidad de un flujo no viscoso es uniforme en un tubo recto de sección uniforme: $v_x(x, r) = v_x$. Como se muestra en la figura 4(arriba), la velocidad no depende de la coordenada r . Además, para una coordenada $x' \neq x$ tendríamos el mismo perfil de velocidad. Se dice que el fluido es ideal porque conserva su energía cinética.

La figura 4(abajo) muestra el perfil de velocidad de un fluido real. Los fluidos reales son viscosos: el módulo de la velocidad disminuye desde un valor máximo (sobre el eje de simetría) hasta un valor nulo (sobre la pared del tubo). Se dice que los fluidos reales “se adhieren” a los sólidos; en este caso, a las paredes del tubo.

Flujo Irrotacional: Los fluidos ideales son irrotacionales: un elemento de fluido no rota sobre sí mismo. Los fluidos reales viscosos son rotacionales. Para poner de manifiesto esta propiedad en el flujo viscoso representado en la figura 4(abajo), podemos concebir una pequeña esfera que acompañe el movimiento del flujo laminar. Si el centro de la esfera está sobre el eje de simetría, sólo se trasladará. Colocada fuera del eje de simetría, la esfera también rotará alrededor de un eje perpendicular a la figura que pase por su centro de masa: en sentido antihorario cuando la coloquemos arriba del eje; en sentido horario cuando la coloquemos abajo del eje de simetría.

Viscosidad (opcional)

Cuando un fluido real está en movimiento, sus moléculas sufren choques inelásticos y pierden energía cinética. A nivel macroscópico, eso se traduce en fuerzas tangenciales viscosas que una capa del fluido ejerce sobre otra (y viceversa); un análogo de las fuerzas de rozamiento dinámico que se miden entre las superficies de contacto de dos sólidos en movimiento relativo. La viscosidad dinámica μ es la propiedad que caracteriza esta propiedad en diferentes fluidos (aire, agua, aceite, miel, etc.). La fuerza viscosa entre dos capas adyacentes (por unidad de área de contacto) depende de la viscosidad dinámica y del gradiente transversal de la velocidad; para el fluido laminar confinado en un tubo de sección circular:

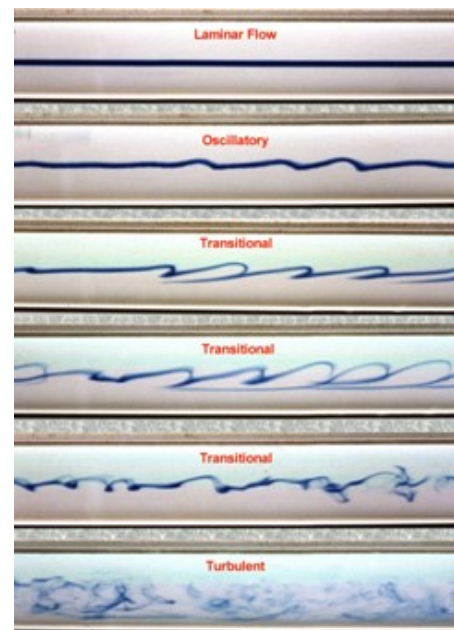
$$\frac{F}{A} = \mu \frac{dv}{dr}.$$

Turbulencia y Número de Reynolds (opcional)

Los fluidos reales desarrollan un comportamiento turbulento (no laminar). La turbulencia es un fenómeno no estacionario que involucra velocidades tridimensionales y flujos rotacionales. El número de Reynolds Re (adimensionado) se usa para predecir si el flujo va a presentar un comportamiento turbulento. En un tubo $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ y depende de las características del fluido (densidad y viscosidad dinámica), de la velocidad del flujo y del diámetro $D = 2R$ del tubo.

- Cuando $Re < 2300$ el comportamiento es laminar: el fluido se moverá en capas.
- Cuando $Re > 4000$ la turbulencia mezclará las diferentes capas del fluido.
- Para valores del Reynolds $2300 < Re < 4000$ se observarán regímenes de transición con mezcla parcial.

Dos sistemas que compartan un mismo número adimensionado tendrán el mismo comportamiento. Por eso, los sistemas reales (ríos, olas, viento y otros fenómenos atmosféricos) pueden ser ensayados en laboratorios y túneles de viento, a menor escala.



2. Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad es una ecuación de conservación de la masa. Las hipótesis descritas en la sección anterior no tienen que cumplirse para que se verifique la ecuación de continuidad pero simplifican la notación y los cálculos. Consideraremos que el flujo es no viscoso e irrotacional. Impondremos las hipótesis de flujo incompresible y estacionario, más adelante.

El concepto de *volumen de control VC* introducido en la sección 1.2 puede ampliarse para señalar zonas macroscópicas donde se observan cambios en las características del flujo; por ejemplo, zonas donde cambia la sección transversal A , zonas donde aumenta o disminuye la masa de fluido, etc.

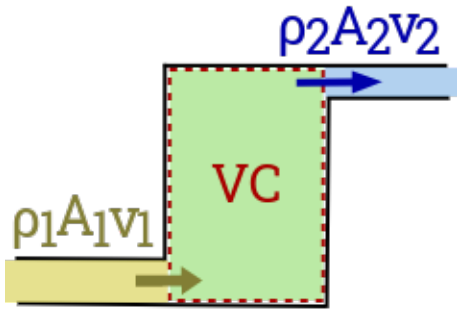


Figura 5:

La figura 5 muestra un *VC* de paredes rígidas excepto en aquellas secciones A que son atravesadas por flujos másicos de entrada (1) y de salida (2). Los subíndices (1) y (2) permiten simplificar la notación para prescindir de las coordenadas (x, y, z) . Para fijar ideas, podemos pensar en un tanque (zona verde) que recibe agua desde la línea de suministro (zona amarilla) y del que se extrae agua por un caño (zona azul) cuando se abre una canilla. Un flujo másico de entrada \dot{m}_1 atraviera la interfase amarillo-verde y un flujo másico de salida \dot{m}_2 atraviesa la interfase verde-azul. Si, además, los flujos (1) y (2) son estacionarios, podemos prescindir de la variable tiempo: $\dot{m}_1 = \rho_1 A_1 v_1$ y, de manera similar, $\dot{m}_2 = \rho_2 A_2 v_2$.

Los flujos másicos de entrada y salida pueden ser diferentes porque dependen de la densidad del fluido, de la sección que atraviesan y de la velocidad del flujo en cada uno de los caños. Determinaremos la ecuación de continuidad apelando al siguiente experimento en el *VC*:

- Primero supongamos que ingresa agua $\dot{m}_1 \neq 0$ pero no sale agua $\dot{m}_2 = 0$. Entonces, la masa en el *VC* aumenta, en el tiempo, debido al flujo de entrada: $\frac{dm_{vc}}{dt} = +\dot{m}_1$.
- Ahora, supongamos que no ingresa agua $\dot{m}_1 = 0$ pero sale agua $\dot{m}_2 \neq 0$. Entonces, la masa en el *VC* disminuye, en el tiempo, debido al flujo de salida: $\frac{dm_{vc}}{dt} = -\dot{m}_2$.

Combinando ambos efectos, es posible determinar una ecuación general que indica que la variación temporal de la masa en el *VC* es consecuencia del flujo de entrada y del flujo de salida:

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad (3)$$

La variación temporal de la masa en el *VC* (término de la izquierda en la ecuación (3)) tiene un carácter diferente al de los flujos másicos (términos de la derecha en la ecuación (3)) aunque ambos se miden (en el SI) en kg/s. Por eso, su notación es diferente³. Por ejemplo, *flujos estacionarios* de entrada y salida pueden resultar en el llenado del tanque o en el vaciado del tanque y eso redundaría en un *régimen no estacionario* para el fluido en el interior del tanque.

En otras palabras, todo el sistema estará en régimen estacionario sólo cuando se verifique la igualdad de los flujos másicos. Si además, el flujo es incompresible, la densidad no dependerá de la posición y se verificará la igualdad de los flujos volumétricos:

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = 0 \rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad \boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2} \quad \text{si el flujo es incompresible} \quad (4)$$

En términos más generales, al *VC* podrían entrar muchos flujos y del *VC* podrían salir muchos flujos. En ese caso, el flujo incompresible y estacionario verificará: $\sum_e (A_e v_e) = \sum_s (A_s v_s)$. Para ilustrar esto, basta observar que el flujo volumétrico (y másico) del Río Uruguay aumenta a medida que nos movemos hacia el sur debido al aporte de sus afluentes; en particular, el Río Negro. El *VC* que tomaríamos en ese caso, incluiría la entrada del Río Uruguay que llega desde Fray Bentos, la entrada del Río Negro que llega desde Mercedes y la salida de un flujo volumétrico único: el Río Uruguay que pasa por Dolores.

³Para distinguirlos, algunos textos suelen usar diferentes letras: $\frac{dm_{vc}}{dt} = \frac{\delta m_1}{\delta t} - \frac{\delta m_2}{\delta t}$.

3. Descripción de un Flujo

3.1. Líneas de corriente

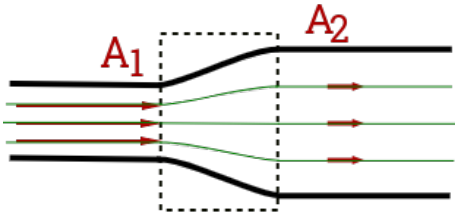


Figura 6:

$v_2 = \frac{v_1}{4}$. Para representar eso la figura 6 muestra (en rojo) perfiles de velocidad (a escala) en los tubos de entrada y salida.

Perfiles de velocidad en el interior del VC (no dibujados en la figura) permitirán trazar líneas de corriente (en verde) por donde se desplazan los elementos de fluido en la tubería. De esa forma, podemos prescindir de los perfiles de velocidad: la densidad de líneas de corriente nos dará una medida de cómo es el módulo de la velocidad del flujo unidimensional en los tubos de entrada y salida. Cuando las líneas estén más “apretadas”, mayor será la velocidad (o viceversa).

En el interior del VC , fuera del eje de simetría, la velocidad del flujo (siempre tangente a las líneas de corriente) es bidimensional: tiene una componente según x y una componente radial. En este curso identificaremos el VC de un sistema como la zona en la que se producen cambios y trabajaremos sólo con las propiedades de los flujos unidimensionales de entrada y salida; la presión es una de esas propiedades.

3.2. Presión Estática de un Flujo

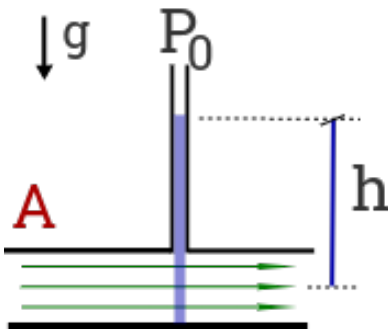


Figura 7:

La ecuación de continuidad predice que el flujo tendrá la misma velocidad a lo largo de un caño de sección A uniforme, cualquiera sea su orientación. La conclusión puede sorprender cuando el eje de simetría del caño está en la dirección vertical, marcando una gran diferencia entre los flujos confinados y los flujos no confinados.

En la sección 1.4 indicábamos que un chorro de agua no confinado está sometido a la presión atmosférica P_0 . ¿Cuál es la presión estática (o simplemente, presión) de un flujo confinado en el interior de un tubo recto?

Para medir la presión estática $P_{int} > P_0$ en el interior de un caño horizontal, se hace un orificio en la parte superior del caño y se adosa un tubo vertical (transparente) abierto en ambos extremos. Como muestra la figura 7, la columna de agua (dibujada en azul) verifica la hipótesis hidrostática porque la velocidad del flujo es horizontal. La presión del flujo en el eje de simetría está dada por: $P_{int} = P_0 + \rho g h$, con h medida desde ese eje. En este curso supondremos que la presión es uniforme en toda la sección A . Si $P_{int} < P_0$, se puede adosar un tubo vertical en la parte inferior del caño.

Para medir la presión $P_{int}(z)$ en el interior de un flujo vertical, a cierta altura z , se adosará un tubo abierto (transparente) en forma de L realizando un orificio en la pared del caño y orientando el brazo vertical hacia arriba si $P_{int}(z) > P_0$ o hacia abajo si $P_{int}(z) < P_0$.

⁴La relación entre diámetros y radios es $D_2 = 2D_1$ y $R_2 = 2R_1$

3.3. Energía Mecánica de un Flujo

El flujo másico $\dot{m} = \rho A v$ es la cantidad de masa que atraviesa una sección A por unidad de tiempo. Esa masa tiene velocidad v ; por lo tanto tiene energía cinética. Además, esa masa tiene energía potencial porque se encuentra a una altura y respecto de una referencia $y = 0$ donde la energía potencial gravitatoria es nula. El flujo energético (o energía mecánica del flujo) es la energía que transporta el flujo másico al atravesar, con velocidad v , una sección A que se encuentra a una altura y :

$$\dot{E}_M = \dot{m} \left(\frac{v^2}{2} + g y \right) \quad (6)$$

Puesto que el flujo másico se mide (en el SI) en kg/s, la energía mecánica del flujo es *potencia* y se mide en J/s; esta unidad se llama Watt (W).

4. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una ecuación de conservación de la energía que conecta la presión estática de un flujo confinado con su energía mecánica. Se verifica a lo largo de una línea de corriente en flujos incompresibles, estacionarios, laminares y no viscosos, como el mostrado en la figura 8: dos dibujos del mismo sistema para señalar diferentes características del flujo a la entrada y a la salida del VC.

El principio de conservación de la energía establece que la variación de energía mecánica de un sistema de masa constante se debe al trabajo que ejercen las fuerzas no conservativas. En términos de potencia (energía o trabajo por unidad de tiempo):

$$\Delta \dot{E}_M = \dot{W}_{NC} \quad (7)$$

Variación de la Energía/Potencia Mecánica

Cuando el flujo es estacionario, la masa del VC es constante y el flujo másico es uniforme: $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$. Una masa dm entra con velocidad v_1 y a una altura y_1 , se mueve por VC y, al cabo de un tiempo, sale con una energía mecánica diferente debido a que tiene una velocidad v_2 y la salida está a una altura y_2 . La variación de la energía mecánica del flujo está dada por:

$$\Delta \dot{E}_M = \dot{m} \left[\left(\frac{v_2^2}{2} + g y_2 \right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + g y_1 \right) \right] \quad (8)$$

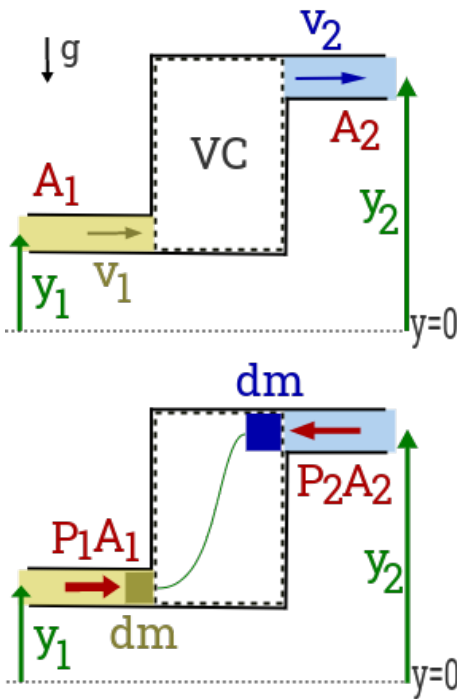


Figura 8:

Trabajo/Potencia No Conservativo de Frontera

En el sistema de la figura 8, las fuerzas asociadas a las presiones del flujo de entrada P_1 y del flujo de salida P_2 realizan trabajo de frontera (F) en la sección A_1 (interfase amarilla-blanca) y en la sección A_2 (interfase blanca-azul), respectivamente. El trabajo de las presiones es no conservativo. Antes de calcular ese trabajo, observamos que entre P_1 y P_2 no se verifica la condición hidrostática porque hay un flujo que atraviesa el VC, como señala la línea de corriente (dibujada en verde).

La figura 8(abajo) muestra una foto de un elemento de fluido que está a punto de entrar al VC, mientras que otro elemento de fluido está a punto de salir. La presión del flujo de entrada ejerce una fuerza de módulo $F_1 = P_1 A_1$ para que la masa dm entre con velocidad v_1 . A su vez, la presión del flujo de salida ejerce una fuerza de módulo $F_2 = P_2 A_2$ en contra de que la masa dm salga con velocidad v_2 . El trabajo es el producto

escalar de la fuerza y el desplazamiento. La potencia asociada a ese trabajo es el producto escalar de la fuerza y la velocidad. La potencia ejercida en forma de trabajo sobre el VC verifica:

$$\dot{W}_F^{VC} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{W}_F^{VC} = P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2 \quad \rightarrow \quad \dot{W}_F^{VC} = [P_1 - P_2] \dot{V} \quad (9)$$

donde consideramos que la fuerza \vec{F}_1 es colineal y en mismo sentido que \vec{v}_1 , mientras que \vec{F}_2 es colineal y opuesta a la velocidad \vec{v}_2 . Además, como el flujo es incompresible y estacionario, el flujo volumétrico se conserva $\dot{V} = A_1 v_1 = A_2 v_2$ y puede sacarse de factor común.

En resumen, los términos a igualar según el principio de conservación de la energía (ecuación (7)) son los siguientes, teniendo en cuenta que $\dot{m} = \rho \dot{V}$:

$$\Delta \dot{E}_M = \rho \dot{V} \left[\left(\frac{v_2^2}{2} + g y_2 \right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + g y_1 \right) \right] \quad \dot{W}_F^{VC} = [P_1 - P_2] \dot{V} \quad (10)$$

Dividiendo ambos términos entre \dot{V} , se cumple la igualdad entre la variación de la energía del flujo y la potencia de frontera (ambos por unidad de flujo volumétrico):

$$\frac{\Delta \dot{E}_M}{\dot{V}} = \frac{\dot{W}_F^{VC}}{\dot{V}} \quad (11)$$

Igualando y reacomodando los términos, obtenemos la Ecuación de Bernoulli:

$$P_2 + \rho \left(\frac{v_2^2}{2} + g y_2 \right) = P_1 + \rho \left(\frac{v_1^2}{2} + g y_1 \right) \quad (12)$$

que nos habla de la conservación de la potencia total por unidad de flujo volumétrico en un flujo incompresible, estacionario, laminar y no viscoso. Usaremos la ecuación de Bernoulli para relacionar la presión, altura y la velocidad en el sentido del flujo a lo largo de una línea de corriente.

4.1. Otros tipos de Trabajo

Antes de ver aplicaciones de la ecuación de Bernoulli, ampliaremos el alcance de esta ecuación a flujos que producen trabajo (por ejemplo, agua que mueve una turbina o aire que mueve un molino de viento) o consumen trabajo (por ejemplo, una bomba que extrae agua de un pozo); incluiremos también pérdidas de energía debido a la viscosidad o la turbulencia del flujo. Para ello, basta considerar que sobre el VC actúan (además de las fuerzas asociadas a las presiones de los flujos en las fronteras) otras fuerzas no conservativas asociadas a estos otros tipos de trabajo no conservativo:

$$\Delta \dot{E}_M = \dot{W}_F^{VC} + \dot{W}_{otro}^{VC} \quad (13)$$

Entonces, la diferencia de potencia total (por unidad de flujo volumétrico) entre la salida y la entrada, redonda en el trabajo mecánico que se obtiene, se agrega o se pierde en el VC ⁵:

$$\frac{\dot{W}_{otro}^{VC}}{\dot{V}} = \left[P_2 + \rho \left(\frac{v_2^2}{2} + g y_2 \right) \right] - \left[P_1 + \rho \left(\frac{v_1^2}{2} + g y_1 \right) \right] \quad (14)$$

- Potencia eléctrica que se obtiene de una represa hidroeléctrica o de un molino de viento: $\dot{W}_{elec}^{VC} < 0$.
- Potencia mecánica que consume una bomba que aumente la presión del flujo: $\dot{W}_{bomb}^{VC} > 0$.
- Potencia perdida por viscosidad y turbulencia: $\dot{W}_{perd}^{VC} < 0$

⁵La ecuación (14) es coherente con la convención de signos que usaremos en este curso. En ingeniería se usa otra convención.

5. Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli

5.1. Ecuación de Torricelli

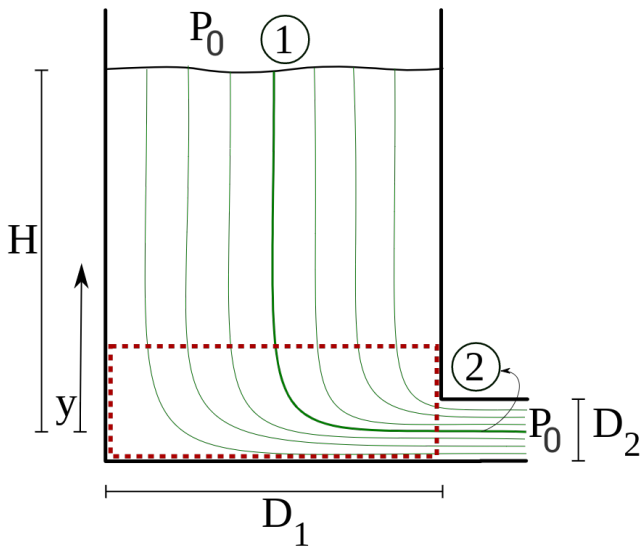


Figura 9: Ecuación de Torricelli.

Vamos a aplicar la ecuación de Bernoulli a un problema sencillo y cotidiano: un tanque abierto a la atmósfera que tiene un caño de salida (en la base del tanque) también abierto a la atmósfera. La ecuación de Bernoulli debe ser aplicada entre dos puntos de *una misma línea de corriente*. Considerando la línea de corriente central mostrada en la figura 9, tomamos el punto (1) en la superficie libre del tanque y el punto (2) en el caño de salida:

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (15)$$

Hemos cancelado la presión a ambos lados de la ecuación porque $P_1 = P_2 = P_0$. Además, considerando que $y_2 = 0$, el punto (1) se encuentra a una altura $y_1 = H$; la altura del agua en el tanque. Sustituyendo y ordenando los términos, se obtiene la Ecuación de Torricelli:

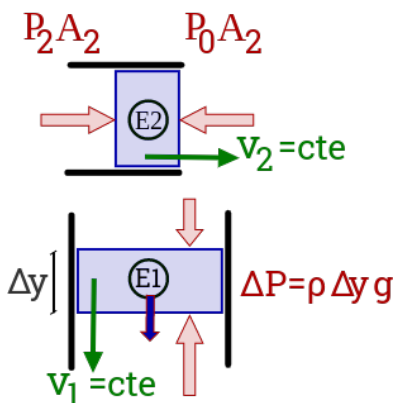
$$v_2^2 - v_1^2 = 2gH. \quad (16)$$

En estado estacionario, el caudal se conserva: $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ó $v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$. Como el diámetro del tanque suele ser muy grande en relación al diámetro del caño de salida, $A_1 \gg A_2$ y $v_2 \gg v_1$, es usual tomar la aproximación $v_2^2 - v_1^2 \approx v_2^2$:

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

Este resultado puede usarse cuando una línea de suministro (no mostrada en la figura) mantiene constante la altura H del agua en el tanque. No puede usarse para calcular el tiempo de vaciado total de un tanque; un problema que será abordado más adelante.

Fuerzas sobre un Elemento de Fluido:



En ausencia de viscosidad y en presencia de un flujo laminar, la velocidad de salida del agua (ecuación (16)) es análoga a la velocidad de una partícula en el campo gravitatorio \vec{g} . Sin embargo, como se trata de un *flujo confinado y estacionario*, la situación es muy diferente. Fuera del *VC* (señalado con líneas punteadas rojas en la figura 9) la ecuación de continuidad predice que las velocidades v_1 y v_2 son uniformes; la velocidad de elementos de fluido (E1) y (E2) permanecen constantes en el tiempo, a medida que los elementos cambian de posición.

La figura superior muestra un elemento (E2) que está por salir del caño. Como el elemento no acelera, la fuerza neta (en la dirección del flujo) es nula. Entonces, la presión hidrostática en el caño es la presión atmosférica $P_2 = P_0$ en todo el caño⁶.

La figura inferior muestra un elemento (E1) en el interior del tanque que se mueve con velocidad v_1 constante e independiente de la altura y .

Para que eso sea posible, la fuerza neta (en la dirección del flujo) es nula y el caso es análogo al de un fluido en reposo: el peso del elemento (en azul) se compensa con las fuerzas asociadas a la presión hidrostática que va aumentando con la profundidad.

⁶Al salir a la atmósfera, el flujo deja de estar confinado y las partículas realizarán un movimiento parabólico, sometidas a la aceleración gravitatoria \vec{g} .

5.2. Efecto Venturi. Flujo horizontal.

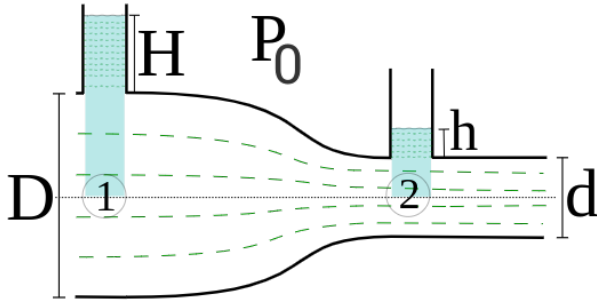


Figura 10: Efecto Venturi.

Una consecuencia interesante de la ecuación de Bernoulli es la reducción de presión debido a un incremento de velocidad, también conocido como efecto Venturi y utilizado para hacer medidas de presión y velocidad. El sistema de la figura 10 representa un corte lateral en una cañería larga por donde circula un flujo estacionario, laminar y no viscoso.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, ubicados justo abajo de las columnas verticales, pertenecientes a una línea de corriente que pasa por el centro de la tubería, tenemos:

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (17)$$

donde hemos usado que $y_1 = y_2$. A su vez, aplicando ecuación de continuidad,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{D_1^2}{D_2^2} v_1$$

por lo que la diferencia de presiones está dada por:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \quad (18)$$

e indica que un elemento de fluido experimenta una fuerza neta en el sentido de movimiento del flujo: $P_1 > P_2$ y, por esa razón, el elemento de fluido acelera: $v_2 > v_1$; un comportamiento que es confirmado por la ecuación de continuidad cuando se considera que la tubería se estrecha⁷.

A su vez, las presiones P_1 y P_2 (mayores a P_0) pueden ser medidas aplicando hidrostática en los tubos verticales, ya que en esa dirección el fluido no se mueve.

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \rho g(H + D/2) \\ P_2 &= P_0 + \rho g(h + d/2) \end{aligned} \quad (19)$$

Aunque no fue posible representarlo en la figura 10, típicamente, los diámetros D y d son mucho menores que las alturas H y h y suelen ser despreciados, resultando en:

$$\frac{1}{2}(D - d) \ll (H - h) \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho g(H - h) \quad (20)$$

Es importante observar que las dos ecuaciones (18) y (20) no son contradictorias: la relación de Bernoulli resulta de las fuerzas actuantes *en la dirección del flujo*, mientras que la relación hidrostática resulta del gradiente de presiones *en la dirección transversal al flujo*.

Igualando las ecuaciones (18) y (20) obtenemos:

$$v_1 = \left(\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \right) \sqrt{2g(H - h)}$$

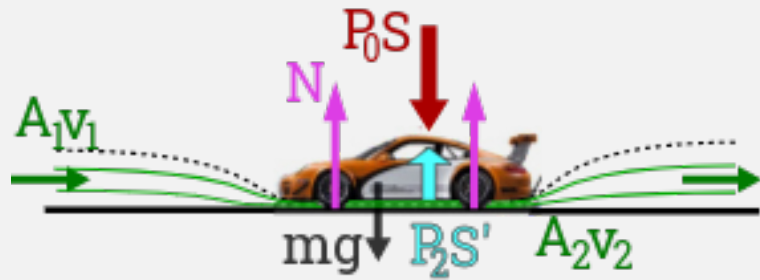
que representa una forma de medir la velocidad v_1 , a partir de la lectura de la diferencia de alturas $(H - h)$ y datos geométricos de la tubería.

⁷Recordamos al lector que una mayor densidad de líneas de corriente significa mayor velocidad del flujo; en este caso, una menor presión estática.

Efecto Suelo.

Cuando un auto está en reposo sobre una carretera es posible despreciar la fuerza de flotación ejercida por el aire dado que la presión atmosférica P_0 es (aprox.) uniforme. Entonces, la presión atmosférica actúa en toda la superficie del auto y la fuerza normal (distribuida en las cuatro ruedas) coincide con el peso del auto: $N = mg$.

Cuando el auto está en movimiento rectilíneo uniforme, el motor debe ejercer fuerza para vencer la fuerza de arrastre que ejerce el aire y la fuerza de rozamiento estático que ejerce la carretera para que las ruedas giren sin deslizarse: $F_s \leq \mu_s N$. Cuando la fuerza de rozamiento no cumple esa condición, el auto desliza. Para garantizar un mejor “agarre” entre los neumáticos y la carretera, es conveniente aumentar la fuerza normal N , sin aumentar el peso del auto. El efecto suelo, una aplicación del efecto Venturi estudiado en la sección anterior, cumple ese cometido.



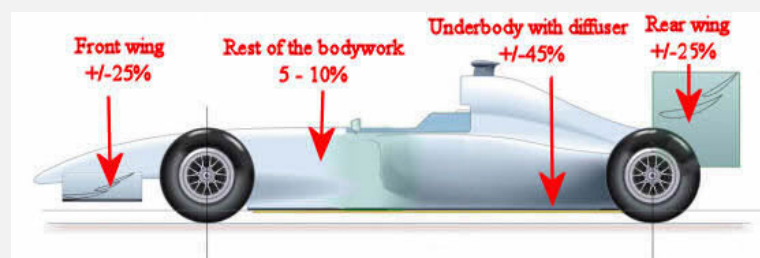
El auto de la figura está en reposo en un túnel de viento donde actúa un flujo de velocidad v_1 , hacia la derecha, como muestran las líneas de corriente (en verde). La línea punteada negra es imaginaria; se dibuja sólo para remarcar la analogía entre el efecto suelo y un tubo de Venturi. Un túnel de viento simula el movimiento de un auto que se mueve hacia la izquierda con velocidad v_1 . Para facilitar la explicación, supongamos que (lejos del auto) el flujo atraviesa una sección A_1 con velocidad de módulo v_1 y se encuentra a presión P_0 , al igual que el resto del aire que rodea al auto. Cuando el aire pasa por debajo del coche (entre el chasis y el suelo), la sección se estrecha $A_2 < A_1$, la velocidad del flujo aumenta $v_2 > v_1$ y la presión del flujo disminuye $P_2 < P_0$. La presión ejerce una fuerza normal sobre las superficies S y S' del coche.

En definitiva, en la parte superior del auto actúa una fuerza neta $P_0 S$ (en rojo) debido a la atmósfera que rodea al auto, mientras en la parte inferior del auto actúa una fuerza $P_2 S'$ (en celeste) debido al efecto Venturi. El equilibrio de fuerzas en la dirección vertical indica que la fuerza normal total está dada por: $N = mg + P_0 S - P_2 S' = mg + F_D$, siendo F_D (del inglés, downforce; en español, carga aerodinámica) la fuerza que hace que el auto en movimiento sea más estable; una característica que los corredores profesionales saben usar a su favor^a.

El auto de la figura está en reposo en un túnel de viento donde actúa un flujo de velocidad v_1 , hacia la derecha, como muestran las líneas de corriente (en verde). La línea punteada negra es imaginaria; se dibuja sólo para remarcar la analogía entre el efecto suelo y un tubo de Venturi. Un túnel de viento simula el movimiento de un auto que se mueve hacia la izquierda con velocidad v_1 . Para facilitar la explicación, supongamos que (lejos del auto) el flujo atraviesa una sección A_1 con velocidad de módulo v_1 y se encuentra a presión P_0 , al igual que el resto del aire que rodea al auto. Cuando el aire pasa por debajo del coche (entre el chasis y el suelo), la sección se estrecha $A_2 < A_1$, la velocidad del flujo aumenta $v_2 > v_1$ y la presión del flujo disminuye $P_2 < P_0$. La presión ejerce una fuerza normal sobre las superficies S y S' del coche.

En definitiva, en la parte superior del auto actúa una fuerza neta $P_0 S$ (en rojo) debido a la atmósfera que rodea al auto, mientras en la parte inferior del auto actúa una fuerza $P_2 S'$ (en celeste) debido al efecto Venturi. El equilibrio de fuerzas en la dirección vertical indica que la fuerza normal total está dada por: $N = mg + P_0 S - P_2 S' = mg + F_D$, siendo F_D (del inglés, downforce; en español, carga aerodinámica) la fuerza que hace que el auto en movimiento sea más estable; una característica que los corredores profesionales saben usar a su favor^a.

Sólo para curiosos: Los autos de Fórmula 1 se diseñan para que, al aumentar la velocidad, aumente la carga aerodinámica F_D que puede llegar a ser de hasta 5 veces el peso del auto. Los autos convencionales se diseñan para disminuir la fuerza de arrastre; o sea, el consumo. En un auto F1, el efecto suelo es el responsable del 45 % (aprox.)



de la carga aerodinámica cuando se agregan difusores que ordenan el flujo que pasa por abajo.

El flujo de aire alrededor de un auto tiene diferentes velocidades. La fuerza neta hacia abajo sería menor que $P_0 S$. A ese fenómeno se le llama “lift”. Para compensar, se colocan alerones delantero y trasero que producen casi el 50 % F_D y lo distribuyen en las ruedas delanteras y traseras. Otras características de diseño se encargan de producir el resto de la carga aerodinámica: 5 – 10 % F_D .

^a**Importante:** El modelo es incompleto. El estudiante no debe intentar corroborarlo fuera de un laboratorio o túnel de viento.

5.3. Medidor de Pitot. Presión de Estancamiento

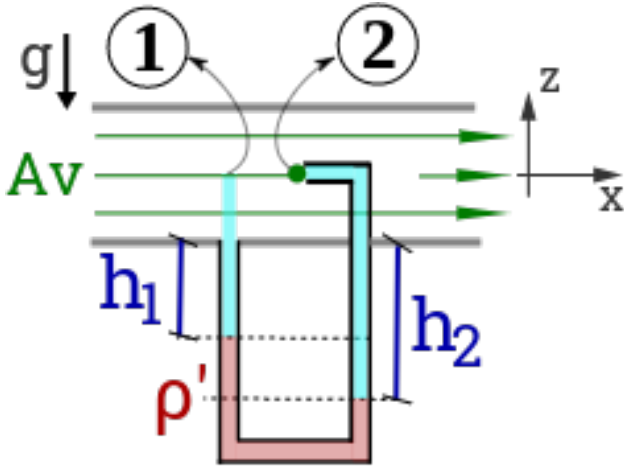


Figura 11: Medidor de Pitot.

de estancamiento: el flujo no puede avanzar en el sentido de la coordenada x y la línea de corriente que une ambos puntos es diferente a las estamos acostumbrados a trazar. Un elemento de fluido que siga esa línea de corriente se va frenando, mientras otras líneas de corriente cambian de dirección, como se muestra en la figura 12. Como en el punto (2) no hay un flujo en la dirección x , la columna de la derecha se mantiene en equilibrio debido a la presión P_2 .

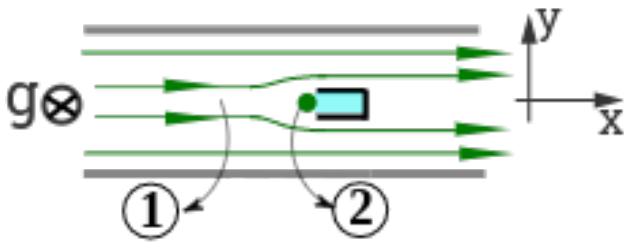


Figura 12: Vista superior.

Pitot ideó el sistema de la figura 11 para medir la velocidad v del flujo horizontal que se mueve en el sentido de la coordenada x por un caño de sección uniforme A . La coordenada z se opone a la aceleración \vec{g} . La densidad del fluido es ρ ; agua o aire.

El sistema consiste en dos tubos verticales transparentes adheridos a las paredes del caño. La abertura del tubo de la izquierda está en la pared del caño; es transversal a x . El tubo de la derecha es más largo; llega hasta el eje de simetría y presenta una pequeña abertura (boquilla) en contra del flujo. Fuera del caño, los tubos se unen formando una U simétrica que contiene un fluido (rojo) de densidad conocida $\rho' > \rho$; mercurio.

Como vimos anteriormente, la columna de agua (celestes) en el tubo de la izquierda está en equilibrio debido a la presión P_1 ; la presión estática del flujo cuando su velocidad v es horizontal. El punto (2) es un *punto*

Aunque la línea de corriente que conecta el punto (1) con el punto (2) es muy particular, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli considerando las velocidades en el sentido de la coordenada x porque la energía cinética (por unidad de volumen) que tiene el flujo en el punto (1) se suma a otro tipo de energía por unidad de volumen: la *presión de estancamiento*⁸:

$$\frac{\rho v^2}{2} + P_2 \equiv P_1 + \rho \frac{v^2}{2} \quad (21)$$

Para calcular cómo el sistema de Pitot permite medir la velocidad del flujo v , observamos que el fluido de densidad ρ' (rojo) está en condiciones hidrostáticas. Igualando la presión a ambos lados del tubo en U, se cumple:

$$P_2 + \overline{\rho g D/2} + \rho g h_2 = P_1 + \overline{\rho g D/2} + \rho g h_1 + \rho' g (h_2 - h_1) \quad (22)$$

Igualando la diferencia de presiones dada por la ecuación (21) y la ecuación (22), se puede medir la velocidad v del flujo midiendo la diferencia de alturas ($h_2 - h_1$):

$$P_2 - P_1 = \rho \frac{v^2}{2} \quad \text{y} \quad P_2 - P_1 = (\rho' - \rho) g (h_2 - h_1) \quad (23)$$

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{\rho' - \rho}{\rho} \right) g (h_2 - h_1)} \quad (24)$$

Un tubo cerrado en U permite medir la diferencia de presiones en el tubo de Venturi discutido en la sección anterior. De esa forma, no es necesario prever qué orientación vertical debemos darle a tubos transparentes que midan las presiones estáticas de un flujo con cambios de sección.

⁸El término $\rho v^2/2$ se llama presión dinámica. Cuando “sale poca agua” de una canilla, nos referimos a ella al exclamar “¡qué baja está la presión!”, dado que la presión estática a la salida de la canilla siempre es P_0 .

5.4. Vaciado de un Tanque: Régimen no estacionario

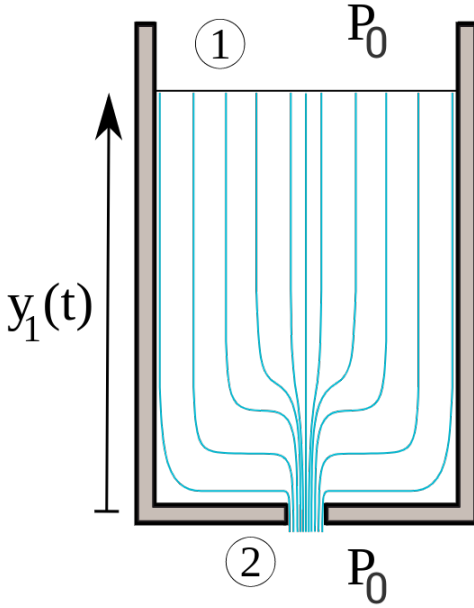


Figura 13: Vaciado de un tanque.

Un tanque que se vacía no está en régimen estacionario. Sin embargo, como demostraremos en una sección de lectura opcional, como $A_1 \gg A_2$ es posible aplicar la Ecuación de Bernoulli considerando que la altura del agua en el tanque $y_1(t)$ y las velocidades $v_1(t)$ y $v_2(t)$ dependen del tiempo para determinar cuánto tiempo demora en vaciarse totalmente.

$$\mathcal{R}_1 + \rho g y_1(t) + \frac{1}{2} \rho v_1^2(t) = \mathcal{R}_2 + \rho g y_2(t) + \frac{1}{2} \rho v_2^2(t)$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g y_1 \quad (25)$$

donde hemos cancelado $P_1 = P_2 = P_0$, sustituido $y_2 = 0$ y reacomodado los términos.

Combinamos la ecuación de continuidad y Bernoulli (25), establecer una relación entre $v_1(t)$ y la altura $y_1(t)$ de la superficie libre.

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) = 2g y_1 \quad (26)$$

En esta ecuación podemos suponer que $A_1 \gg A_2$ para obtener un expresión sencilla del módulo de la velocidad de un elemento de fluido que se encuentra en la superficie libre en términos de su posición:

$$v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} \right) = 2g y_1 \Rightarrow |v_1| = \left(\sqrt{2g} \frac{A_2}{A_1} \right) \sqrt{y_1} \quad (27)$$

Como la superficie libre que se encuentra en una posición $y_1(t)$ se desplazará hacia abajo, el módulo de la velocidad de un elemento fluido que se encuentre en esa superficie verifica:

$$|v_1| = -\frac{dy_1}{dt} \quad \text{porque } |v_1| = -\frac{dy_1}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{y_1(t) - y_1(t + dt)}{dt} > 0, \text{ debido a que } y_1(t) > y_1(t + dt) \quad (28)$$

donde el signo negativo [-] da cuenta de que el módulo de la velocidad v_1 es opuesto a las variaciones temporales de la altura.

Igualando las ecuaciones (27) y (28) obtenemos una ecuación diferencial en el tiempo para la altura de la superficie libre $y_1(t)$ que podemos expresar en variables separadas:

$$\frac{dy_1}{dt} = - \left(\sqrt{2g} \frac{A_2}{A_1} \right) \sqrt{y_1} \Rightarrow \frac{dy_1}{\sqrt{y_1}} = - \left(\sqrt{2g} \frac{A_2}{A_1} \right) dt$$

para integrar el término de la izquierda desde cierta altura inicial $y_1(t = 0) = H_0$ conocida y el término de la derecha en el tiempo:

$$\int_{H_0}^y \frac{dy'}{\sqrt{y'}} = - \left(\sqrt{2g} \frac{A_2}{A_1} \right) \int_0^t dt' \Rightarrow 2 \left(\sqrt{y_1(t)} - \sqrt{H_0} \right) = - \left(\sqrt{2g} \frac{A_2}{A_1} \right) t$$

de donde podemos despejar una expresión para $y_1(t)$ y calcular el tiempo que demora en vaciarse, considerando que $y_1(t_{total}) = 0$:

$$y_1(t) = \left[\sqrt{H_0} - \left(\sqrt{\frac{g}{2}} \frac{A_2}{A_1} \right) t \right]^2 \Rightarrow t_{total} = \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \frac{A_1}{A_2} \quad (29)$$

6. Ecuaciones de Movimiento (opcional)

La figura 14 (izquierda) muestra un elemento de fluido (EF , azul) que se mueve por una línea de corriente curva (verde). El EF se encuentra en la posición \vec{r} respecto del origen de coordenadas (punto 0) desde donde se mide la altura y . En esta sección nos proponemos determinar las ecuaciones de movimiento de este caso más general. Para facilitar la explicación, el radio de curvatura de la línea de corriente del dibujo coincide con la distancia al origen O : $r_c = r$; podrían ser diferentes.

Como se trata de un movimiento circular, definimos dos versores: \hat{e}_s (verde) tangente a la línea de corriente y en el sentido del flujo $\vec{v} = v\hat{e}_s$ y \hat{e}_r (rojo) en el sentido del vector posición $\vec{r} = r\hat{e}_r$. Adicionalmente, el versor \hat{e}_z (azul), saleinte al plano, permiten definir un sistema de coordenadas cilíndricas (3D). El versor \hat{e}_s forma un ángulo θ con la horizontal. El versor \hat{e}_r forma un ángulo θ con la vertical. La figura 14 (izquierda-abajo) muestra una ampliación del EF ; su volumen es $dV = dr ds dz$, siendo el espesor dz saliente a la figura.

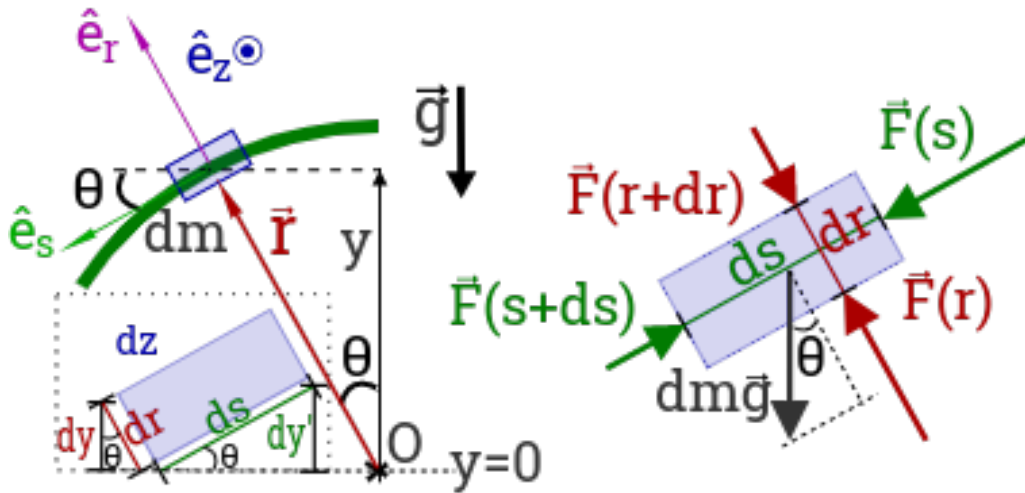


Figura 14:

El principal objetivo de esta sección es aplicar las leyes de Newton en la dirección *radial* (según el versor \hat{e}_r) para explicar por qué la presión es muy baja en el “ojo de un tornado”, por qué vuelan los aviones y cómo los alerones (inclinados como las alas de un avión que está aterrizando) aumentan la carga aerodinámica F_D que estabiliza un auto Fórmula 1.

Adicionalmente, aplicando las leyes de Newton en la dirección *tangencial* (según el versor \hat{e}_s) determinaremos la Ecuación la Bernoulli para un flujo estacionario, laminar y no viscoso; un resultado que ya dedujimos del principio de conservación de la energía mecánica.

6.1. Fuerzas Radiales

La figura 14 (derecha) muestra las fuerzas que actúan sobre el EF . Supondremos que la velocidad del flujo es de módulo constante. El EF está acelerado siendo $a_r = \frac{v^2}{r_c}$ entrante. La ecuación de movimiento, proyectando los vectores según el versor \hat{e}_r indica:

$$-dm a_r = F(r) - F(r + dr) - dm g \cos \theta \quad \Rightarrow \quad [P(r + dr) - P(r)] ds dz = -dm g \cos \theta + dm \frac{v^2}{r_c}$$

donde las fuerzas $\vec{F}(r)$ y $\vec{F}(r + dr)$ están dadas por presiones actuando sobre superficies de módulo $dA_r = ds dz$; los vectores normales a esas superficies son colineales a \hat{e}_r .

Para obtener una expresión más sencilla, podemos calcular la densidad de fuerzas dividiendo entre el volumen

dV que ocupa el EF y considerar $\rho = \frac{dm}{dV}$:

$$\frac{[P(r+dr) - P(r)] \cancel{ds} \cancel{dz}}{dr \cancel{ds} \cancel{dz}} = -\rho \left(g \cos \theta - \frac{v^2}{r_c} \right)$$

El término de la izquierda indica cómo varía la presión con la distancia r al origen de coordenadas. En el primer término de la derecha podemos considerar que $y = r \cos \theta$ y sustituir $dy = dr \cos \theta$, como se muestra en la figura 14(izquierda-abajo), para obtener:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \left(g \frac{dy}{dr} - \frac{v^2}{r_c} \right) \quad (30)$$

una expresión general para el gradiente de presión transversal a la línea de corriente.

En particular, podemos aplicar la ecuación 30 cuando el flujo está dado por líneas de corriente planas y paralelas que forman un ángulo $\theta < \frac{\pi}{2}$ con la horizontal. El radio de curvatura de líneas de corriente planas verifica: $r_c \rightarrow 0$ y el resultado es conocido; la presión decrece con la altura:

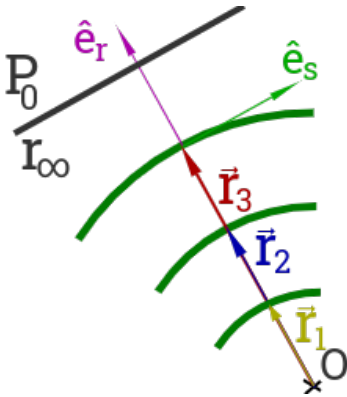
$$\frac{dP}{dr} = -\rho \left(g \frac{dy}{dr} - \frac{v^2}{r_c} \right) \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -\rho g \frac{dy}{dx} \Rightarrow \Delta P = -\rho g \Delta y$$

Por otro lado, cuando se pueden despreciar los cambios de presión debido al campo gravitatorio \vec{g} , el gradiente radial de presiones depende de la velocidad del flujo y del radio de curvatura de las líneas de corriente cuyas presiones queremos comparar:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{v^2(r_c)}{r_c} \quad (31)$$

Para obtener una expresión de $P(r)$ debemos integrar la ecuación 31, considerando que la velocidad del flujo, en general, depende del radio de curvatura $v(r_c)$.

6.1.1. Tornado



Un tornado es un vórtice cuyas líneas de corriente forman una hélice alrededor de un eje de simetría (aprox.) vertical. Cerca del eje de simetría se encuentra la zona llamada “ojo del tornado”. Observado desde arriba (o desde abajo) las líneas de corriente se disponen concéntricamente alrededor del punto O : $r_c = r$. La figura 15 muestra solo una parte del tornado. Fuera del vórtice, el radio de curvatura $r_c \rightarrow \infty$, el aire no rota y la presión es P_0 .

La ecuación 31 indica que, al pasar de una línea de corriente a la siguiente, en el sentido del vector \hat{e}_r , la presión aumenta. Por lo tanto, al movernos desde afuera (donde la presión es P_0) hacia adentro, la presión disminuye hasta que $P(r_1) \ll P_0$.

Para completar el modelo, podemos suponer que la velocidad (a cierta altura z conocida) es inversamente proporcional a r ⁹:

Figura 15: Vista parcial.

$$v(r) = \frac{v_o r_o}{r} \Rightarrow v(r \rightarrow \infty) = 0$$

una expresión que verifica que el aire (lejos del vórtice) está en reposo. Integrando la ecuación 31 resulta:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{v_o^2 r_o^2}{r^3} \Rightarrow P(r) - P_0 = \int_{\infty}^r \rho \frac{v_o^2 r_o^2}{r^3} dr \Rightarrow P(r > r_1) = P_0 - \frac{\rho v_o^2 r_o^2}{2 r^2} \quad (32)$$

⁹Siendo v_o y r_o parámetros necesarios para ajustar las dimensiones de $v(r)$. El modelo es válido para $r > r_1$; no es válido en el “ojo del tornado”.

6.1.2. ¿Por qué vuelan los aviones?

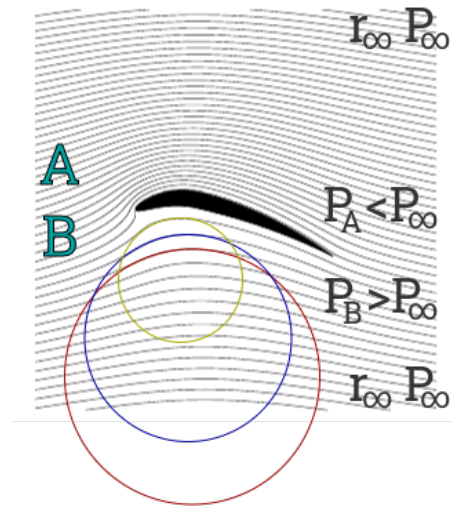


Figura 16: Flujo alrededor de Ala.

Supongamos que un avión se mueve con velocidad v constante hacia la izquierda cuando se lo observa desde La Tierra. La figura 16 muestra el ala de ese avión en reposo; el sistema de referencia de la figura está en el avión. Desde ese referencial inercial, el flujo de aire (representado por líneas de corriente casi paralelas) se mueve hacia la derecha.

La viscosidad del aire es imprescindible para el vuelo de los aviones. Debido a ella, el flujo de aire sigue la forma de las alas (efecto Coanda), ejerciendo la fuerza necesaria para sustentar al avión. Cerca de las alas, el flujo acompaña el movimiento del sólido y zonas de pequeñas turbulencias que aportan a la sustentabilidad. Fuera de esa capa límite, se puede suponer que el flujo es laminar¹⁰.

Estudiaremos el caso de un avión volando a una altura y fija, medida desde el nivel del mar. La fuerza vertical neta nula que permite sustentar al avión en el aire está dada por la diferencia de presión entre la parte de arriba (A) y la parte de abajo (B) de las alas y el peso del avión: $F_N = (P_B - P_A)S - mg = 0$, donde la diferencia de presiones se debe al gradiente de presiones entre líneas de corriente (casi) paralelas con diferentes radios de curvatura. Analizaremos conceptualmente por

qué $P_B \gg P_A$

Lejos del avión hacia arriba y lejos del avión hacia abajo, el aire se mueve en líneas de corriente planas ($r_c \rightarrow \infty$) y actúa una presión P_∞ conocida. Como un avión no se sustenta por flotación, podemos suponer que P_∞ es la misma arriba y abajo; la presión de la atmosfera en reposo a la altura y .

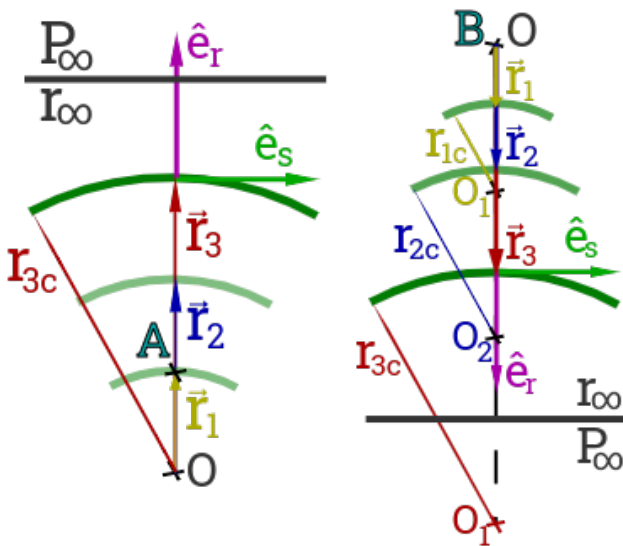


Figura 17: Líneas de Corriente.

Las líneas de corriente de la parte superior se vuelven a representar esquemáticamente en la figura 17(izq.). El punto (A) está un poco por encima del punto O desde donde se miden las posiciones r y los radios de curvatura $r_c \approx r$. Para ese caso, la ecuación 31 indica que, al alejarnos del avión hacia arriba, aumenta la presión hasta que $P(r_\infty = P_\infty)$. Por lo tanto, yendo en sentido contrario, a medida que los radios de curvatura decrecen, la presión disminuye de forma tal que $P_A < P_\infty$.

Las líneas de corriente de la parte inferior se vuelven a representar esquemáticamente en la figura 17(der.). La orientación de las líneas de corriente respecto del punto (B), considerado ahora como origen de coordenadas O, es opuesta a la que permitió deducir la ecuación 31 (comparar con figura 17(izq.)). Podemos volver a deducir la ecuación de movimiento respecto del nuevo versor \hat{e}_r hacia abajo o (de manera equivalente) suponer que los radios de curvatura ahora verifican $r_{cn} \approx -r_n$:

$$\frac{dP}{dr} = +\frac{v^2(r_c)}{r_c} \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{v^2(r)}{r} \quad (33)$$

y el signo negativo [-] indica que la presión disminuye a medida que nos alejamos el origen O. De manera

¹⁰Ref: <http://www3.eng.cam.ac.uk/outreach/Project-resources/Wind-turbine/howwingswork.pdf>

equivalente, desde abajo (donde la presión es P_∞) hacia el avión, la presión va aumentando de forma tal que $P_B > P_\infty$.

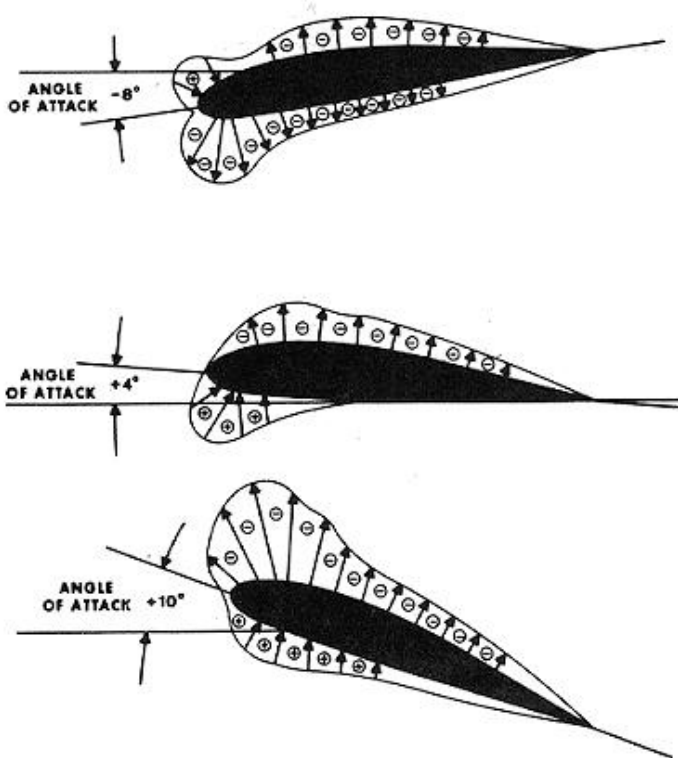


Figura 18: Ángulo de ataque

además, las alas se usan para almacenar combustible.

El punto de estancamiento (en inglés, stagnation point) que se observa en la figura 16 adelante y abajo del avión es donde la presión P_B es máxima. Toda la energía del flujo en forma de presión de estancamiento $P_t = P_s + \rho \frac{v^2}{2}$ se emplea como fuerza de elevación. La figura 19(izq.) muestra el tubo de Pitot que se coloca bajo el ala para medir la velocidad v del avión. La figura 19(der.) simula el ejemplo estudiado en la sección 5.3. En realidad, en el tablero del avión se colocan medidores independientes de la presión estática P_s y de la presión de estancamiento P_t . Un tercer medidor se calibra para medir la velocidad v .



Figura 19: Tubo de Pitot bajo el ala de un avión.

Al igual que un avión que desea aterrizar, los alerones de un auto Fórmula 1 presentan ángulos de ataque negativos para lograr mayor carga aerodinámica F_D y “pegarse” al piso.

De esta forma, la curvatura de las líneas de corriente garantiza la diferencia de presión $P_B - P_A$ necesaria para que el avión aterrice, se sustente o despegue.

¿Cuál es la diferencia entre estas tres acciones? El ángulo de ataque de las alas provoca diferentes radios de curvatura que imprimen diferentes fuerzas verticales netas sobre las superficies del avión, como muestra la figura 18. Los signos $[+]$ y $[-]$ dan cuenta de cómo es la presión alrededor del ala respecto de la presión P_∞ . Las flechas señalan hacia dónde apuntan las fuerzas de elevación \vec{F}_L (del inglés, lift forces).

Para moverse a alta velocidad y provocar esas fuerzas de elevación el motor del avión ejerce fuerza que se opone a la fuerza horizontal viscosa del aire (en inglés, drag). La componente horizontal neta de \vec{F}_L da cuenta de si la fuerza de elevación ayuda a impulsar o se opone al movimiento del avión; en ese caso, hay mayor consumo.

Un ángulo de ataque de $+4^\circ$ es necesario para que las alas levemente asimétricas lo sustenten en vuelo a una altura y conocida. En realidad, la figura 16 muestra el ala de un ave; su forma permite apreciar con claridad los radios de curvatura. La forma de “gota” de las alas de un avión es más estable ante cambios bruscos de presión;

6.2. Fuerzas tangenciales

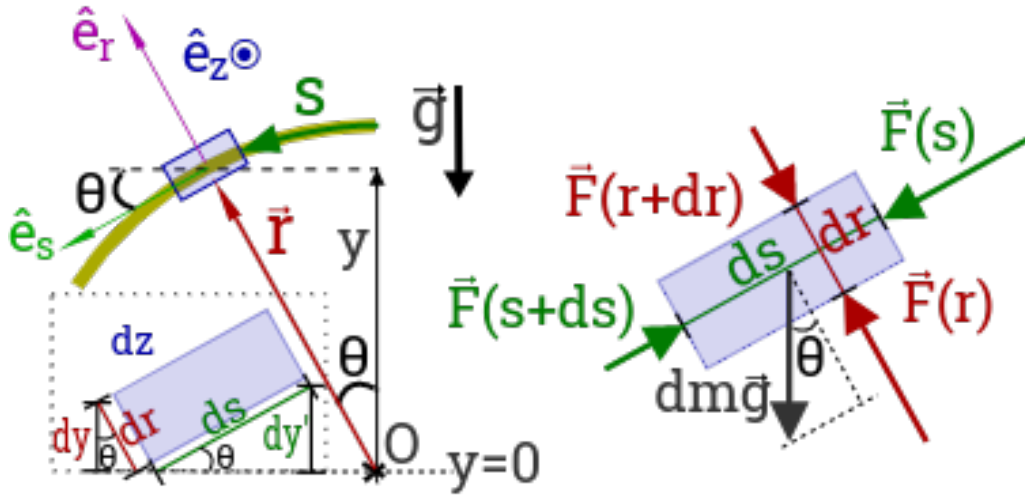


Figura 20:

En esta sección determinaremos la Ecuación la Bernoulli para un flujo estacionario, laminar y no viscoso, aplicando las leyes de Newton en la dirección *tangencial* (según el vector \hat{e}_s) (ver figura 20).

Supondremos que la velocidad del EF, azul por la línea de corriente (amarilla) no es de módulo constante. El EF está acelerado tangencialmente $\vec{a}_s = a_s \hat{e}_s$. La figura 20(der.) muestra las fuerzas que actúan sobre el EF. La ecuación de movimiento, proyectando los vectores según el vector \hat{e}_s indica:

$$dm a_s = F(s) - F(s + ds) + dm g \sin \theta \quad \Rightarrow \quad [P(s + ds) - P(s)] dr dz = dm g \sin \theta - dm a_s$$

donde las fuerzas $\vec{F}(s)$ y $\vec{F}(s+ds)$ están dadas por presiones actuando sobre superficies de módulo $dA_s = ds dz$; los vectores normales a esas superficies son colineales a \hat{e}_s .

Para obtener una expresión más sencilla, podemos calcular la densidad de fuerzas dividiendo entre el volumen dV que ocupa el EF y considerar $\rho = \frac{dm}{dV}$:

$$\frac{[P(s + ds) - P(s)] \cancel{dx} \cancel{dz}}{ds \cancel{dx} \cancel{dz}} = \rho (g \sin \theta - a_s)$$

El término de la izquierda indica cómo varía la presión con la distancia recorrida $s = r\theta$, medida sobre la línea, desde $\theta = 0$. En el primer término de la derecha podemos sustituir $dy = -ds \sin \theta$, como se muestra en la figura 20(izquierda-abajo), para obtener¹¹:

$$\frac{dP}{ds} = -\rho \left(g \frac{dy}{ds} + a_s \right) \quad (34)$$

una expresión general para el gradiente de presión a lo largo de la línea de corriente.

En particular, cuando la velocidad del flujo es constante, el EF no acelera tangencialmente y la presión estática decrece con la altura:

$$\frac{dP}{ds} = -\rho \left(g \frac{dy}{ds} + a_s \right) \Rightarrow \frac{dP}{ds} = -\rho g \frac{dy}{ds} \Rightarrow \Delta P = -\rho g \Delta y$$

En un caso más general, vale preguntarse ¿cómo se relaciona la aceleración tangencial a_s del EF con la velocidad $v(s, t)$ del flujo? Al menos, en el caso estacionario $v(s)$. O sea, cuando la velocidad del flujo en

¹¹Observar que cuando el arco recorrido s crece, la altura y decrece.

un punto particular de la línea de corriente no varía en el tiempo pero la velocidad del EF que recorre esa línea de corriente no se mantiene constante; depende del ángulo recorrido en el tiempo t de forma tal que $s(t) = r \theta(t)$.

La aceleración tangencial es la derivada de la velocidad tangencial. En el caso estacionario aplicamos la regla de la cadena:

$$a_s = \frac{dv(s(t))}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} \Rightarrow a_s = v \frac{dv}{ds} \quad (35)$$

donde se ha considerado que $v \equiv \frac{ds}{dt}$.

Sustituyendo en la ecuación 34, obtenemos una expresión donde todas las variables están devidas respecto de la distancia recorrida por el EF sobre la línea de corriente dado que la densidad ρ es uniforme y la aceleración g actúa en todo el recorrido:

$$\frac{dP}{ds} = -\rho \left(g \frac{dy}{ds} + v \frac{dv}{ds} \right) \Rightarrow \frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dy}{ds} + \rho \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} = 0 \quad (36)$$

Por último, integramos para obtener la Ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de corriente:

$$\frac{d(P + \rho g y + \rho \frac{v^2}{2})}{ds} = 0 \Rightarrow P + \rho g y + \rho \frac{v^2}{2} = C \quad (37)$$

Para considerar un caso más general hemos supuesto que la línea tenía un radio de curvatura $r_c = r < \infty$. Sin embargo el resultado también puede aplicarse a líneas de corriente rectas o cuando la curvatura de la línea de corriente varía de un punto a otro del recorrido $r_c(s)$ porque la velocidad siempre es tangente a las líneas de corriente. La condición estacionaria impide que el radio de curvatura en un punto particular de la línea de corriente cambie en el tiempo.

6.2.1. Líneas de corriente en un tanque que se vacía

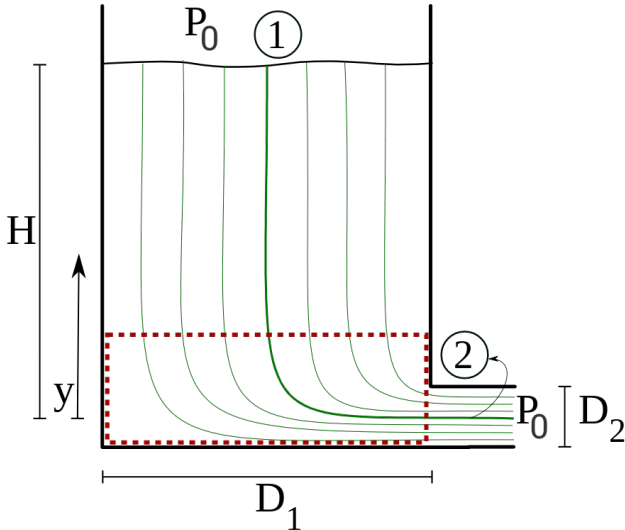


Figura 21: Vaciado de un tanque.

La ecuación de Torricelli permite calcular la velocidad de salida del agua desde un tanque que se vacía mientras una fuente de agua (no mostrada en la figura 21) lo está llenando. También analizamos las fuerzas que actúan sobre elementos de fluido EF que se mueven verticalmente por el tanque y horizontalmente por el caño de salida. Quedó pendiente el análisis de las fuerzas que actúan sobre los EF que pasan por el volumen de control VC .

Las líneas de corriente tienen diferentes radios de curvatura r_c que se pueden medir en el mismo sentido que la posición r . La ecuación 31 indica que la presión aumenta al aumentar el radio de curvatura de las líneas de corriente en el interior del VC . La presión en la base del tanque no es uniforme: el agua que pasa por el extremo más alejado del caño de salida está a mayor presión que la que se mueve cerca del caño de salida.

De la ecuación de Torricelli, conocemos la velocidad de salida. La ecuación de Bernoulli confirma que cuanto mayor es el radio de curvatura, menor será la velocidad del flujo en el interior del VC .