Cap. 2 - Estática de Fluidos

Matías Fernández, Paulo Valente y Sandra Kahan
Instituto de Física, Facultad de Ingeniería.

1. Fluidos en Reposo

En este capítulo aplicaremos las definiciones estudiadas en el capítulo anterior al estudio de los fluidos en reposo respecto del recipiente que los contiene; por ejemplo, el agua en un vaso, en un tanque o en un embalse; las aguas tranquilas de un lago o el mar. Sin importar los órdenes de magnitud de los volúmenes de estos sistemas, la hipótesis hidrostática excluye las situaciones donde el fluido “fluye”; por ejemplo, el flujo de un río, agua circulando por una tubería, olas, corrientes submarinas, etc. La hipótesis estática también se aplica al aire en la atmósfera; no se aplica al viento y otros fenómenos atmosféricos.

En la hipótesis hidrostática el fluido está sujeto a fuerzas externas y podría estar acelerado respecto de La Tierra, considerada como sistema de referencia inercial; por ejemplo, no se contradice la hipótesis hidrostática al analizar el agua en un vaso que está en el interior de un ascensor.

Es usual que el agua (u otros líquidos) presenten una *superficie libre* a la atmósfera. En ese caso, a ambos lados de la interface aire-agua, actúa la presión atmosférica que supondremos normal $P_0 = 1{,}0\ Atm$.

1.1. Cambios de presión en una columna de fluido

La figura 1 muestra un contenedor que contiene un fluido de densidad ρ. Nos interesa conocer cómo varía la presión en el fluido con la profundidad y, medida desde una superficie que consideraremos a una profundidad $y = 0$.

Para determinar una ecuaciòn más general, suponderemos que el contenedor tiene una aceleración a_y conocida en la dirección de la coordenada y de interés.

Tomaremos como sistema un elemento de volumen cilíndrico (dibujado en azul). El área de sus bases es A. La base superior se encunetra a una profundidad y. La base inferior, se encuentra a una profundidad $y + \mathrm{d}y$. La masa del sistema es:

$$\mathrm{d}m = \rho\ \mathrm{d}V \qquad \text{con} \qquad \mathrm{d}V = A\ \mathrm{d}y$$

Aplicaremos la segunda Ley de Newton: la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema provoca la aceleración a_y. Para ello, consideraremos un versor $\hat{j}$ en el sentido de la coordenada.

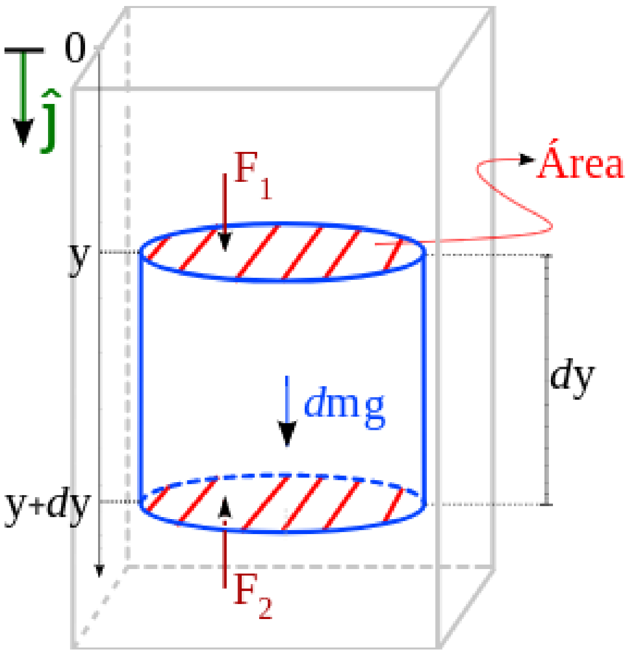


Figura 1:

Por un lado tenemos las fuerzas volumétricas; en este caso el peso $dm\vec{g}$. Además, tenemos la fuerza de presión $\vec{F_1}$ que el fluido de arriba ejerce sobre la cara (1) que se encuentra a una profundidad $y_1 = y$ y la fuerza de presión $\vec{F_2}$ que el fluido de abajo ejerce sobre la cara (2) que se encuentra a una profundidad $y_2 = y + \mathrm{d}y$. De acuerdo a la definición de presión, ambas fuerzas son entrantes al elemento de volumen. Proyectaremos las fuerzas según el versor $\hat{j}$: con signo positivo [+] las fuerzas en el sentido del versor y con signo negativo [-] las fuerzas en el sentido opuesto al versor:

$$\sum F_y = \mathrm{d}m\ a_y$$
$$dm\ g + P(y)A - P(y + \mathrm{d}y)A = \mathrm{d}m\ a_y$$

Para simplificar la expresión, podemos dividir ambos lados de la ecuación por $\mathrm{d}V$, recordando que $\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ y que $\frac{A}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{\mathrm{d}y}$:

$$\rho\ g + \frac{P(y) - P(y + \mathrm{d}y)}{\mathrm{d}y} = \rho\ a_y$$

y obtenemos una expresión que no depende del área A. Podemos despejar los términos que contienen la presión y en el límite $\mathrm{d}y \to 0$, se obtiene la expresión deseada cuando se aplica la definición de derivada:

$$\frac{P(y + \mathrm{d}y) - P(y)}{\mathrm{d}y} = \rho\ (g - a_y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \rho\ (g - a_y) \tag{1}$$

El caso más común refiere a agua en un vaso, tanque o embalse, en reposo respecto de La Tierra ($a_y = 0$) considerada como sistema inercial:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \rho\ g} \tag{2}$$

Sin importar la forma del contenedor, la presión es función de la profundidad y y crece con ella; las superficies horizontales en el interior del sistema son isóbaras: tienen la misma presión.

Vale señalar que la ecuación (2) se puede aplicar a todos los fluidos incompresibles y también a los fluidos compresibles; por ejemplo, al aire en la atmósfera. Para fluidos incompresibles la densidad ρ será uniforme (una constante en la ecuación). Para fluidos compresibles, la densidad ρ dependerá de la presión P, de la profundidad y y, eventualmente, de otras variables.

Las variaciones de la presión respecto de una coordenada que señala cambios de posición se llama gradiente de presión. En esta sección determinamos (ecuación (2)) el gradiente de presión con la profundidad.

1.2. Columna de agua en reposo

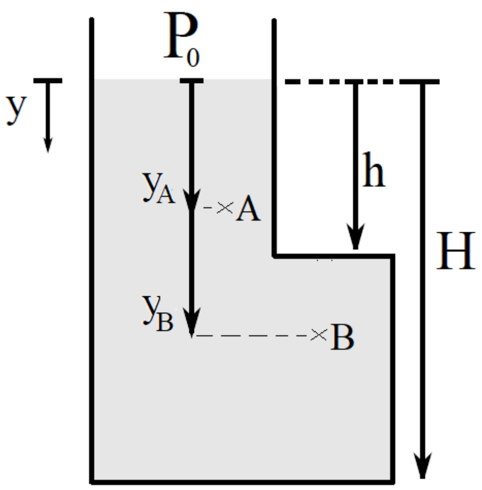


Figura 2:

En esta sección integraremos la ecuación diferencial (2) para determinar una expresión de la presión en función de la profundidad $P(y)$ en el caso de fluidos incompresibles; por ejemplo, agua. Entonces, la densidad ρ es una constante al igual que la aceleración g.

Considerando que en la superficie libre el agua se encuentra a presión atmosférica $P(y=0) = P_0$, integramos la ecuación (2) para obtener:

$$\int_{P_0}^{P(y)} \mathrm{d}P = \int_0^y \rho\ g\ \mathrm{d}y' \qquad \Rightarrow \qquad P(y) = P_0 + \rho\ g\ y$$

Así, podemos calcular la presión a una profundidad H (en el fondo del tanque de la figura 2) o relacionar las presiones de dos puntos elegidos arbitrariamente en la columna de líquido en reposo:

$$P(H) = P_0 + \rho\ g\ H \qquad , \qquad P_B = P_A + \rho\ g\ (y_B - y_A)$$

La pared horizontal que se encuentra a una profundidad h, está sometida a una presión interna $P(h) = P_0 + \rho\ g\ h$ ejercida por el fluido incompresible sobre la cara inferior. La atmósfera ejerce una presión externa P_0 sobre la cara superior.

Vale señalar que estas expresiones podrían usarse también para calcular la presión soportada por las canillas cerradas que se encuentran en los diferentes pisos de un edificio que tiene un tanque de suministro de agua en la azotea. Sin importar la forma de la columna de agua, la primer expresión nos dice cuál es la presión en la canilla cerrada que se encuentra a H metros por debajo de la superficie libre del tanque. La segunda expresión permite conocer la diferencia de presiones del agua en reposo en dos puntos cualesquiera en el interior de la cañería considerando solamente la altura que separa ambos puntos.

1.3. Atmósfera en reposo

El aire es una mezcla de gases que ejercen presión sobre los cuerpos que están inmersos en la atmósfera. Hasta ahora se lo modeló como un fluido de presión uniforme; por ejemplo, la presión normal P_0 que se mide en el aire a nivel del mar. En esas condiciones, no era necesario incluir las fuerzas de presión en las ecuaciones de movimiento (o equilibrio) de un cuerpo. Sin embargo, la presión decrece con la altitud z. En esta sección proponemos otros dos modelos para determinar dos expresiones diferentes para $P(z)$. La diferencia de altura a considerar es la que indica cuál de los tres modelos puede ser aplicado.

La ecuación diferencial (2) nos dice cómo varía la presión con la profundidad y. Ahora consideraremos una coordenada z que mide la altura hacia arriba, desde el nivel del mar donde $P(z=0) = P_0$. Para ello definimos un versor $\hat{k}$ opuesto al peso. Así, se obtiene que la presión disminuye con la altura; algo completamente equivalente a decir que aumenta con la profundidad:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(z) g \tag{3}$$

El primer modelo (más exacto) describe a la atmósfera como un fluido compresible. La densidad del aire depende de la temperatura y de la presión, como veremos más adelante en este curso. Si la presión depende de la altitud $P(z)$ y el volumen (a través del módulo volumétrico) depende de la presión $V(P)$, es de esperar que la densidad del fluido dependa de la altitud $\rho(z)$. La relación más sencilla de suponer es que existe proporcionalidad entre la presión y la densidad:

$$\frac{P}{\rho} = \mathbb{C} \qquad \text{Válida para un valor constante de temperatura}$$

Conocida la presión y la densidad del aire a nivel del mar $z = 0$ se verifica que:

$$\mathbb{C} = \frac{P(z)}{\rho(z)} = \frac{P_0}{\rho_0}.$$

Al sustituirlo en la ecuación (3) obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{\rho_0}{P_0} g\ P(z) = -\alpha P(z) \quad \text{tal que} \quad \alpha = \frac{\rho_0}{P_0} g$$

donde α es una constante conocida. Reordenamos los términos e integramos para determinar que la presión decrece exponencialmente con la altitud:

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P'}{P'} = -\alpha \int_{z=0}^{z} \mathrm{d}z' \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\alpha z \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(z) = P_0\ e^{-\alpha z}} \tag{4}$$

El segundo modelo consiste en suponer que, conocida la presión y la densidad a una altura dada z^*, la densidad del aire es uniforme en un entorno de z^*: $\rho(z) \approx \rho^*$. Entonces, integramos la ecuación (3) para obtener un resultado completamente equivalente al obtenido para la columna de agua de la sección anterior:

$$P(z) = P^* - \rho^* g\ (z - z^*)$$

Globo Aerostático. Dos Modelos.

Un globo aerostático tiene una altura de 23 m y flota a 2200 m de altitud. Calcularemos qué presión tiene el aire en la base (B) del globo. Luego, estimaremos la presión del aire arriba (A) del globo.

Debido a que el globo se encuentra a $z_B = 2.2$ km de altitud, y conocemos la presión y densidad del aire a nivel del mar ($z_0 = 0$), es más apropiado utilizar el primer modelo para estimar la presión y densidad a esa altitud, considerando que $\alpha = \frac{\rho_0}{P_0} g = 0.118 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$

$$P_B = P_0\ e^{-\alpha z_B} = 78.1\,\mathrm{kPa} \qquad , \qquad \rho_B = \rho_0 \frac{P_B}{P_0} = 0.944\,\mathrm{kg\,m^3}$$

Ahora que tenemos la presión y la densidad en la base del globo, podemos usar el segundo modelo lineal para calcular la presión 23 m más arriba:

$$P_A = P_B - \rho_B\ g\ (z_A - z_B) = 78{,}1 \times 10^3 - 0{,}944 \times 9{,}8 \times 23 = 77.9\,\mathrm{kPa}$$

de donde se observa que una pequeña diferencia de presiones (200 Pa) mantiene al globo aeroestático (aprox. 200 kg de tela, canastilla, cuerdas) flotando en el aire (ver sección Principio de Arquímedes). Alternativamente, podemos estimar la presión en $z_A = 2223$ m con el primer modelo más exacto para observar que no existe contradicción entre ambos modelos cuando la diferencia de alturas $\Delta z = 23$ m es pequeña.

Sólo para curiosos: La atmósfera estandart internacional (ISA), usada en aeronáutica, supone un modelo más exacto considerando que la temperatura en la tropósfera decrece a razón de $6.5\,\mathrm{K\,km^{-1}}$ hasta una altura $z = 11$ km y permanece constante en la tropopausa (a mayor altitud). Según el modelo ISA, la presión del aire a esa altura es $21\,\% P_0$ y sigue decreciendo en la tropopausa, al igual que la densidad del aire.

La ecuación (4) se llama ecuación hipsométrica y predice que la presión a $z = 11$ km es $27\,\% P_0$; un modelo que sobre-estima el valor de la presión.

1.4. Generalización a 3D (opcional)

El objetivo de esta sección es generalizar el resultado de la sección 1.1 a un sistema de coordenadas de tres dimensiones (3D). En los cursos de mecánica de los fluidos es habitual definir la coordenada z contraria al peso. Como la ecuación (2) fue determinada considerando la coordenada y en el sentido del peso, podemos escribir la misma ecuación con un cambio de signo. Además, como estamos analizando el caso más general $P(x, y, z)$, las variaciones de la presión respecto de la coordenada z se expresa como una derivada parcial:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho\ g \tag{5}$$

El peso es una fuerza volumétrica, su densidad de fuerza es: $\vec{f}_g = \frac{dm\vec{g}}{dV} = \rho\vec{g}$. De manera general, es posible concebir la existencia de fuerzas volumétricas actuando en las tres direcciones: $\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}_V}{dV}$, incluyendo en ellas fuerzas reales como el peso y fuerzas ficticias como las que devienen de pensar que el sistema está acelerado respecto de un sistema inercial.

Con esta definición, no es difícil generalizar la ecuación (5) a tres dimensiones:

$$\vec{\nabla} P = -\vec{f}$$

El operador ∇ "nabla" es definido como un vector $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ en coordenadas cartesianas. Este operador mide la variación de una función escalar en el sentido definido por los versores característicos del sistema de coordenadas. A su vez, $\vec{\nabla} P$ se lee como el "gradiente de la presión" y se opone a la densidad de fuerzas volumétricas.

2. Principio de Arquímedes

El Principio de Arquímedes establece: "Un cuerpo que está total o parcialmente sumergido en un fluido recibe de éste un empuje igual y contrario al peso del fluido desplazado por el cuerpo.".

Actualmente, sabemos que lo que Arquímedes llamó "empuje" es una fuerza: la *fuerza de flotación* $\vec{F}_B$ (del inglés, buoyancy force). Nos interesa conocer cuál es el origen de esa fuerza y deducir la conclusión a la que Arquímedes arribó empíricamente en el siglo III (AC). El resultado se aplica a un cuerpo completamente sumergido en un sólo fluido; por ejemplo, un globo aerostático en el aire, un submarino sumergido en el agua. También se aplica a un cuerpo sumergido en dos o más fluidos. El principio dice "un cuerpo parcialmente sumergido"; sin embargo, vale señalar que un barco está sumergido en dos fluidos: el agua en la parte inferior y el aire en la parte superior.

2.1. Cuerpo sumergido en un solo fluido

Deduciremos relaciones que se aplican a cuerpos con cualquier geometría, aplicando las leyes de Newton a un cuerpo de geometría sencilla inmerso en un único fluido de densidad ρ_f. La figura 3 muestra un cilindro real, de masa M_c y volumen V_c conocidos. Con esos datos podemos calcular la densidad media $\rho_c = \frac{M_c}{V_c}$ del cuerpo[1].

Origen de la fuerza de flotación: Debido a la simetría axial de un cilindro, la presión que se ejerce en la cara lateral no resulta en fuerza neta. La fuerza neta $\vec{F_N}$ sobre el cilindro actúa sólo en la direccióon vertical. Según un versor $\hat{j}$ (vertical hacia abajo), proyectamos la fuerza peso y la fuerza de presión en la cara superior (A) con signo positivo [+]; proyectamos la fuerza de presión en la cara inferior (B) con signo negativo [-]:

$$F_N = M_c\ g - (P_B - P_A)\ A \quad \text{(válida para cilindros)}$$

[1] La figura 3 es muy similar a la figura 1. El elemento de volumen fue remplazado por un cilindro real de altura H y área A.

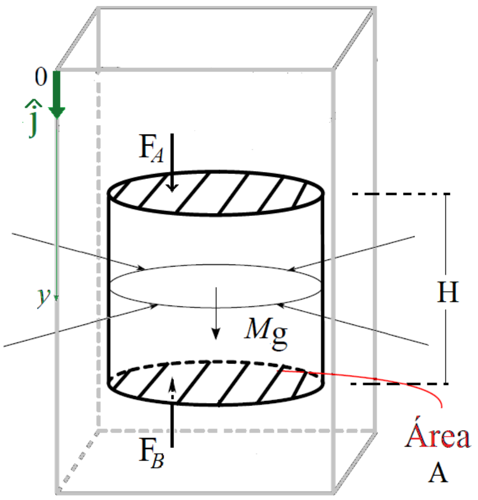


Figura 3:

Estas son las únicas fuerzas que actúan sobre el cilindro de masa M_c. Como el primer término es el peso del objeto, identificamos el segundo término con la *fuerza de flotación*. En este caso de geometría sencilla:

$$\vec{F}_B = -(P_B - P_A)\ A\ \hat{j} \quad \text{(válida para cuerpos rectos)}$$

En términos generales, la *fuerza de flotación* es la resultante de las fuerzas de presión que el fluido ejerce sobre toda la superficie del cuerpo sumergido. Como la presión aumenta con la profundidad ($P_B > P_A$), cualquiera sea la geometría, **la fuerza de empuje siempre se opone al peso del cuerpo**:

$$\text{vectorialmente: } \vec{F}_N = M_c\vec{g} + \vec{F}_B$$
$$\text{según el versor } \hat{j}\text{: } F_N = M_c\ g - |\vec{F}_B|$$

El peso del fluido deplazado: El fluido de inmersión puede ser incompresibles o compresibles. En ambos casos, supondremos que la densidad del fluido ρ_f es uniforme y verifica: $\Delta P = \rho_f\ g\ \Delta y$. Recordando que el volumen del cuerpo cilíndrico está dado por $V_c = H\ A = (y_B - y_A)\ A$:

$$F_N = M_c\ g - (P_B - P_A)\ A \quad \Rightarrow \quad F_N = M_c\ g - \rho_f\ g\ (y_B - y_A)\ A \quad \Rightarrow \quad F_N = M_c\ g - \rho_f\ V_c\ g$$

El ultimo término corresponde a la fuerza de flotación $|\vec{F}_B| = \rho_f\ V_c\ g$. Antes de colocar el cuerpo en la posición señalada en la figura 3, el fluido ocupaba un volumen V_c; el mismo volumen que ahora ocupa el cuerpo. Por lo tanto, $M_f = \rho_f\ V_c$ es la masa del fluido desplazado. Multiplicada por g, la fuerza de empuje coincide (en módulo) con el peso del fluido desplazado.

La última ecuación ya no depende de la geometría del cuerpo. Es una relación general que permite afirmar que la fuerza neta sobre el cuerpo está dada por la resta de dos pesos: el peso del cuerpo y el peso del fluido desplazado por el cuerpo.

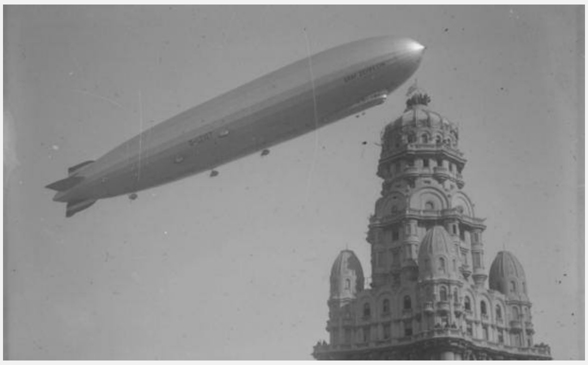
$$\vec{F}_N = (\rho_c - \rho_f)\ V_c\ \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_N = M_c\vec{g} - M_f\vec{g}} \tag{6}$$

La primer ecuación plantea la fuerza neta en términos de la densidad media del cuerpo y la densidad del fluido para observar que un cuerpo completamente sumergido en un solo fluido:

- Flota cuando su densidad media es igual a la del fluido.
- Cae cuando su densidad media es mayor que la del fluido.
- Sube cuando su densidad media es menor que la del fluido.

Graf Zeppelin LZ 127.

La fuerza de sustentación de los aviones está dada por su velocidad, como veremos más adelante en este curso. La fuerza de sustentación de los dirigibles está dada por su flotabilidad en una atmósfera con presión decreciente en altura.



El 29 de junio de 1934 un dirigible alemán sobrevoló Montevideo a una altura de 200 m. Para flotar, el dirigible contaba con $75 \times 10^3\,\mathrm{m}^3$ de gas hidrógeno ($\rho_{H_2} = 0.09\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$) distribuido en 17 celdas de flotación. Supondremos que el dirigible estaba en equilibrio en una atmósfera de densidad $\rho_0 = 1.225\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Estimaremos la carga bruta M_L (del inglés, load gross) del dirigible. La carga bruta es la masa de la estructura, maquinaria, personas, correo, etc.

El diagrama de cuerpo libre para el dirigible indica que existen dos fuerzas: el peso total del dirigible y el empuje del aire sobre todo el volumen:

$$\vec{F}_N = M_T\vec{g} + \vec{F}_B = 0 \qquad \Rightarrow \quad M_T = \rho_0\, V_T$$

que establece, como ya vimos, que la densidad media del dirigible es igual a la densidad del aire. La masa total M_T incluye el hidrógeno M_{H_2}, la carga bruta M_L y, también, masa de aire M_0: por razones de operación y vitales el aire ocupa espacios de volumen V_0 y debe mantenerse a presión atmosférica. Despreciando el volumen ocupado por la carga bruta y considerando que $M_0 = \rho_0\, V_0$ y $M_{H_2} = \rho_{H_2}\, V_{H_2}$:

$$M_T = \rho_0\, V_T \quad \Rightarrow \quad M_L + M_0 + M_{H_2} = \rho_0\, (V_{H_2} + V_0)$$
$$M_L = (\rho_0 - \rho_{H_2})\, V_{H_2} = (1{,}225 - 0{,}09)\; 75 \times 10^3 = 85 \times 10^3\,\mathrm{kg}$$

En conclusión, además de cargar hidrógeno y aire, el dirigible tenía una capacidad de carga de 85 toneladas dada por la diferencia de la fuerza de empuje del aire y el peso del hidrógeno sobre las 17 celdas de flotación.

Sólo para curiosos: El LZ 127 tenía un largo de 236.6 m, un diámetro (máximo) de 30.5 m[a]. En verdad, buena parte del volumen V_0 que supusimos con aire a presión atmosférica estaba ocupado por $30 \times 10^3\,\mathrm{m}^3$ de "gas azul" (Blau gas); un combustible gaseoso de densidad muy similar a la del aire que se utilizaba como principal combustible. De esa forma, a medida que el combustible se iba consumiendo, los tanques se podían llenar con aire y mantener estable la masa total.
El peso de la nave vacía, excluyendo los gases (hidrógeno, gas azul) era de 67 toneladas. Las otras 18 toneladas de carga bruta se empleaban para transportar correo, 36 tripulantes y 24 pasajeros (equipaje, bebida, comida). La nave ascendía por la acción aerodinámica de sus motores y descendía expulsando hidrógeno y agua de lastre. Trescientas personas tiraban de cuerdas para amarrar la nave a un mástil o llevarla a un hangar[b].

[a] Eso permite estimar $\Delta P \approx \rho_0\; D\; g = 366\,\mathrm{Pa}$
[b] Ref: $https://en.wikipedia.org/wiki/LZ_127_Graf_Zeppelin$

2.2. Cuerpo sumergido en dos fluidos.

Modificaremos la ecuación (6) de la sección anterior para calcular la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo sumergido en dos fluidos. M_f se puede separar en dos partes dado que el fluido desplazó dos fluidos de diferente densidad. Considerando los volúmenes ocupados por el cuerpo en cada uno de los fluidos ($V_c = V_{c_1} + V_{c_2}$) la masa total de los fluidos desplazados puede expresarse como:

$$M_f = M_{f_1} + M_{f_2} = \rho_{f_1} V_{c_1} + \rho_{f_2} V_{c_2}$$

Entonces, ambas fuerzas de flotación se oponen al peso del cuerpo:

$$\vec{F}_N = M_c \vec{g} - \rho_{f_1} V_{c_1} \vec{g} - \rho_{f_2} V_{c_2} \vec{g}$$

Un cuerpo que está "parcialmente sumergido" es un cuerpo que está sumergido en dos fluidos de densidad muy diferente $\rho_{f_2} << \rho_{f_1}$; por ejemplo, aire (2) y agua (1). En ese caso, la masa de aire desplazado puede despreciarse frente a la masa de agua desplazada.

$$\vec{F}_N = M_c \vec{g} - \rho_{f_1} V_{c_1} \vec{g}$$

lo cual es equivalente a decir que la presión en el aire es uniforme; por ejemplo, para todas las alturas su valor es P_0.

La punta del iceberg.

El iceberg de la figura está en equilibrio, semi-sumergido en agua de mar. Considerando que la densidad del hielo es $\rho_H = 917\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ y la del agua salada $\rho_A = 1026\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, determinaremos qué porción de hielo está sumergida en el agua.
Como la fuerza neta es nula, $\vec{F}_B = -M_H \vec{g}$. Podemos suponer que la fuerza de flotación del aire es despreciable y plantear la ecuación con $F_B = M_A^S\, g$, donde el supraíndice "S" refiere sólo a la porción de agua que el hielo desplazó por estar sumergido en el agua. En términos de las densidades $M_A^S = \rho_A\, V_A^S$ y $M_H = \rho_H\, V_H$:

$$M_A^S = M_H \;\Rightarrow\; \rho_A\, V_A^S = \rho_H\, V_H \;\Rightarrow\; \frac{V_A^S}{V_H} = \frac{\rho_H}{\rho_A} = \frac{917}{1020} = 0{,}894$$

Entonces, casi el 90 % del volumen de hielo está sumergido en agua y el resultado no depende de la forma del objeto. La expresión *la punta del iceberg* se usa para sugerir que un problema aparentemente chico puede ser, en verdad, un problema grande.

Podemos preguntarnos ¿aumentará el nivel del mar cuando se derrita un iceberg? La densidad del hielo indica que 0.917 kg de hielo ocupa un volumen de $V_H = \frac{M_H}{\rho_H} = 1.000\,\ell$. Sumergidos en agua: $0.894\,\ell$. Sumergidos en el aire $0.106\,\ell$. Al derretirse el hielo, los mismos 0.917 kg de agua ocuparán un volumen $V_A = \frac{M_A}{\rho_A} = 0.894\,\ell$. Al derretirse el hielo, no aumentará el nivel del agua.

Sólo para curiosos: La conclusión anterior no es exacta para un iceberg (agua dulce sólida) que flota en el agua salada. Cuando el iceberg se derrite, disminuye la densidad del agua de mar. Volveremos a hacer el cálculo anterior suponiendo que, al derretirse un iceberg, la densidad del agua de mar pasa a ser $\rho'_A = 1020\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Entonces, los mismos 917 kg de agua derretida ocuparían $0.899\,\ell$. El calentamiento global produce un aumento anual del nivel del mar de 3.1 mm. Los icebergs contribuyen en un 1,6 % a ese aumento. El derritimiento del hielo continental es la principal causa del aumento del nivel del mar.

3. Principio de Pascal

El Prinicipio de Pascal (1623-1662) establece: “La sobrepresión que se aplica en una parte de un fluido confinado se transmite con igual intensidad al resto del fluido.”

Para un fluido incompresible confinado, el principio de Pascal es consecuencia directa de que la presión dependa de la profundidad: $P(y) = P(y = 0) + \rho\ g\ y$; con $P(y = 0) = P_0$ en el caso particular en que la superficie libre esté en contacto con el aire. Cualquier sobrepresión que se ejerza en esa superficie ($P(y = 0) = P_0 + \Delta P$) redunda en una sobrepresión que afecta de igual forma el resto del fluido:

$$P(y) = P_0 + \Delta P + \rho\ g\ y$$

Para un fluido compresible confinado podemos suponer que la presión es uniforme en el tanque. Entonces, la sobrepresión ejercida en la superficie libre afectará uniformemente la presión del fluido. Por lo tanto, se cumple el Principio de Pascal. Sin embargo, como el volumen (la densidad) depende de la presión, un fluido compresible no puede cumplir la función que cumplen los fluidos incompresibles en las máquinas hidráulicas y otras aplicaciones.

3.1. Máquinas Hidráulicas

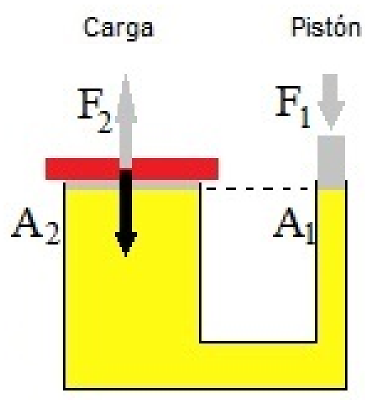


Figura 4: Máquina hidráulica (Esquema)

Una máquina hidraúlica se usa para levantar una carga pesada de peso P_L (del inglés, Load) ejerciendo una fuerza externa (mucho menor) sobre un pistón (ver figura 4. Para ello, se usa un fluido incompresible (por ejemplo, aceite) confinado en un recipiente con forma de “U” asimétrica: la sección del tubo a la derecha (donde se encuentra el pistón) es menor que la sección del tubo a la izquierda (donde se encuentra la carga): $A_1 \ll A_2$. Si la carga no estuviera, las superficies libres del aceite estarían a la misma altura y a presión atmosférica P_0. Al colocar la carga, actúa el peso y una fuerza $F_2 = M_L\ g$ debe mantener la carga en equilibrio. Cuando la carga está apoyada en el tubo de la izquierda, la normal ejerce la fuerza F_2. Al levantar la carga, desaparecerá esa normal.

Entonces, ¿quién ejerce la fuerza F_2? Un agente externo ejerce una fuerza F_1 sobre el pistón. La sobrepresión $\Delta P = \frac{F_1}{A_1}$ se transmite al resto del fluido. En particular, al fluido que está en contacto con la carga. Como consecuencia, sobre la carga actúa la fuerza $F_2 = \Delta P\ A_2$.

Supondremos que la masa del pistón es depreciable y que las superficies de contacto aceite-pistón y aceite-carga están a la misma altura[2]. Entonces, se verifica:

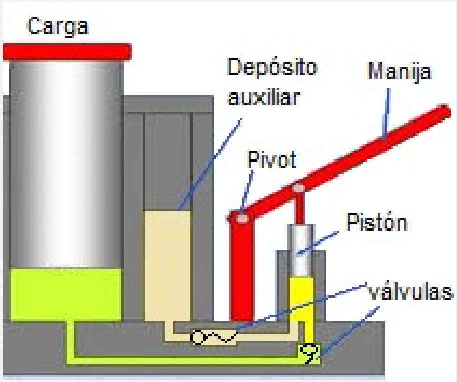
$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1} \qquad \text{y} \qquad \Delta P = \frac{F_2}{A_2} \qquad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

Para fijar ideas, si la relación entre secciones es $A_2 = 20\ A_1$ y la carga se levanta con una fuerza F_2 apenas mayor al peso por lo que se requiere una fuerza externa F_1 veinte veces menor $F_1 = \frac{M_L g}{20}$.

[2]Estas condiciones no son necesaria para que se verifique el Principio de Pascal; las impondremos sólo a efectos de facilitar el análisis.

Gato Hidráulico.

El gato hidraúlico de la figura presenta dos sistemas para reducir la fuerza externa necesaria para levantar la carga (por ejemplo, un auto cuando se desea cambiar una rueda). El primer sistema es mecánico: una palanca de segunda especie. El segundo sistema es hidraúlico.
Sabemos que el sistema de palanca reduce la fuerza 10 veces (ver explicación en el siguiente párrafo). Calcularemos cuántas veces es necesario accionar la manija (bombear) para levantar $H_2 = 30\,\mathrm{cm}$ un auto de $M_L = 2000\,\mathrm{kg}$, sabiendo que el pistón puede bajar $H_1 = 10\,\mathrm{cm}$ en cada bombazo y que una persona de $M_P = 50\,\mathrm{kg}$ puede aplicar una fuerza máxima equivalente a su propio peso.



Sistema mecánico: Una fuerza F_1' vertical hacia abajo aplicada en el extremo de la manija produce un torque respecto del pivot. Ese mismo torque se traduce en una fuerza F_1 vertical hacia abajo sobre la barra vertical (y sobre el pistón) que se encuentra más cerca del pivot. Considerando las distancias horizonales d_1' y d_1 al pivot, el torque verifica: $\tau = F_1'\ d_1' = F_1\ d_1$. La fuerza sobre el pistón se multiplica $F_1 = 10\ F_1'$ cuando $d_1' = 10\ d_1$.
Sistema hidraúlico: La fuerza mínima necesaria para subir la carga está dada por el peso de ésta. La relación entre fuerzas es $F_2 = \alpha F_1$ y la relación entre áreas es $A_2 = \alpha A_1$. Además, para subir la carga una altura H_2 es necesario desplazar un volumen de fluido $V_2 = A_2\ H_2$ y cada bombazo desplaza solo un volumen $V_1 = A_1\ H_1$. El cociente entre estos volúmenes es el número N de bombazos necesarios para subir la carga.
Con los datos del problema y las relaciones explicitadas anterioremente podemos calcular:

$$F_1' = M_P\ g = 490\,\mathrm{N} \quad F_1 = 10\ M_P\ g = 4900\,\mathrm{N} \quad \text{y} \quad F_2 = M_L\ g = 19\,600\,\mathrm{N}$$
$$\alpha = \frac{F_2}{F_1} = 4 \qquad N = \frac{V_2}{V_1} = \frac{A_2}{A_1}\frac{H_2}{H_1} = \alpha\frac{H_2}{H_1} = 4\frac{30}{10} \qquad \boxed{N = 12}$$

En definitiva, el sistema mecánico y el sistema hidrúalico actuando conjuntamente reducen la carga 40 veces. La subida H_2 de la carga implicó una ganancia de energía potencial gravitaria como consecuencia del trabajo realizado por el agente externo que bombeó 12 veces.

Sólo para curiosos: Ahora describiremos otras características del gato hidrúalico. Las zonas claras del dibujo están rellenas con el mismo aceite. Se han pintado de diferentes colores sólo a efectos de facilitar la descripción. El sistema cuenta con dos válvulas de bola: una bolita unida a un resorte. Cuando un agente externo bombea, una fuerza F_1 actúa sobre el pistón. La sobrepresión sobre el fluido amarillo abre la vávula verde: el fluido pasa a la cámara verde y sube la carga. La misma sobrepresión cierra la válvula color crema e impide que el fluido amarillo pase al depósito auxiliar. Cuando la fuerza F_1 cesa, el pistón sube. Se cierra la válvula verde, se abre la válvula crema y el fluido crema rellena la zona amarilla. El sistema está preparado para dar el siguiente bombazo. La fuerza F_1 tiene que hacerse para comprimir el fluido y, también, en contra de un resorte no mostrado en la figura. Ese resorte es el responsable de que, al final del ciclo, el pistón regrese a su posición inicial.