CAPÍTULO 19

MOVIMIENTO ONDULATORIO

El movimiento ondulatorio se manifiesta en casi todas las ramas de la física. En los cuerpos acuosos se pueden observar, comúnmente, ondas superficiales. Las ondas sonoras y las ondas luminosas son esenciales para nuestra percepción del entorno, a causa de que hemos desarrollado receptores (los ojos y los oídos) capaces de detectarlas. En el siglo pasado el ser humano aprendió a producir y utilizar las ondas de radio. Podemos también entender la estructura de los átomos y de los sistemas subatómicos basados en las propiedades ondulatorias de las partículas que los constituyen. La similitud de las descripciones físicas y matemáticas de estas distintas clases de ondas indican que el movimiento ondulatorio es uno de los temas unificadores de la física.

En este capítulo y en el siguiente desarrollaremos las descripciones tanto verbales como matemáticas de las ondas. Utilizamos el ejemplo de las ondas mecánicas, *en parte porque ya hemos desarrollado las leyes de la mecánica en este texto. Más adelante, desarrollaremos las leyes que rigen para otros tipos de ondas (por ejemplo, las ondas de luz y otras ondas electromagnéticas). A efectos de simplificación, nos concentraremos en el estudio de las ondas armónicas (es decir, aquellas que pueden ser representadas por funciones del seno y del coseno), pero los principios que desarrollamos se aplican igualmente a formas ondulatorias más complejas.*

19-1 ONDAS MECÁNICAS

Las ondas marinas viajan miles de millas a través del océano, pero las partículas de agua no llevan a cabo ese viaje. Cuando usted le grita a un amigo, la onda de sonido recorre la sala, pero las moléculas de aire no recorren esa distancia. Estamos familiarizados con el hecho de que la energía y el ímpetu se transportan de un lugar a otro en virtud del movimiento de las partículas; el movimiento ondulatorio proporciona una manera alternativa de que la energía y el ímpetu se muevan de un lugar a otro sin que las partículas materiales hagan ese viaje.

Las ondas de agua y las ondas sonoras son ejemplos de *ondas mecánicas* que viajan a través de un medio deformable o elástico. Se originan cuando cierta parte del medio se desplaza de su posición normal y queda liberada. Debido a las propiedades elásticas del medio, la perturbación se propaga a través de éste. A nivel microscópico, propiedades mecánicas tales como las fuerzas entre los átomos son las causantes de la propagación de las ondas mecánicas.

En este capítulo nos concentraremos en el estudio de las ondas mecánicas. Para ilustrar algunas propiedades generales de las ondas hemos elegido como ejemplo a un tipo sencillo de onda mecánica, que implica la oscilación de una cuerda estirada como las que se utilizan en una guitarra.

Cuando una onda alcanza a una partícula situada en el medio pone a esa partícula en movimiento y la desplaza, transfiriéndole así energía tanto cinética como potencial. Mediante el movimiento ondulatorio, puede transmitirse a grandes distancias no solamente energía, sino además información sobre la naturaleza de la fuente de ondas. Podemos decir que las partículas del medio se mueven, al pasar la onda, únicamente distancias pequeñas con respecto a sus posiciones previas, sin experimentar un desplazamiento neto en la dirección del viaje de la onda. Por ejemplo, los objetos flotantes pequeños, como una hoja o un corcho muestran que el movimiento real del agua al paso de la onda es más bien hacia arriba y hacia abajo, y quizás ligeramente en vaivén; una vez que pasa la onda, el objeto está más o menos en el mismo lugar en que estaba antes de haber pasado ésta. Este hecho era ya conocido en el siglo XV por Leonardo da Vinci, quien escribió de las ondas de agua: "A menudo sucede que la onda escapa del sitio de su creación, mientras que el agua no; como las ondas que se forman en un campo de trigo por efecto del viento, donde las vemos correr a través del campo mientras las espigas permanecen en su lugar."

19-2 TIPOS DE ONDAS

Al enumerar a las ondas de agua, de luz, y de sonido como ejemplo de movimiento ondulatorio, estamos clasificando a las ondas de acuerdo a sus propiedades físicas más amplias. Las ondas pueden clasificarse también de otras maneras.

Podemos distinguir diferentes clases de ondas mecánicas si consideramos cómo se relacionan la dirección del movimiento de las partículas de materia con la dirección de propagación de la onda. Si el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda misma, hablamos de una onda *transversal*. Por ejemplo, cuando una cuerda en tensión se hace oscilar en vaivén desde un extremo, a lo largo de la cuerda viaja una onda transversal; la perturbación se mueve a lo largo de la cuerda pero las partículas de la cuerda vibran en ángulo recto a la dirección de propagación de la perturbación (Fig. 1*a*). Las ondas de luz, aunque no sean ondas mecánicas, son también ondas transversales.

Sin embargo, si el movimiento de las partículas de una onda mecánica es de vaivén a lo largo de la dirección de propagación, tenemos una onda *longitudinal*. Por ejemplo: cuando un resorte en tensión se pone a oscilar en vaivén desde uno de sus extremos, a lo largo del resorte viaja una onda longitudinal; los arrollamientos vibran en vaivén paralelos a la dirección en la que viaja la perturbación a lo largo del resorte (Fig. 1*b*). Las ondas de sonido que viajan en un gas son ondas longitudinales y las estudiaremos con mayor detalle en el capítulo 20.

Ciertas ondas no son ni puramente longitudinales ni puramente transversales. Por ejemplo, en las ondas que vemos sobre la superficie del agua las partículas de ésta se mueven tanto de arriba abajo como en vaivén, trazando trayectorias elípticas al moverse.

Las ondas pueden también clasificarse como uni, bi, o tridimensionales, de acuerdo con el número de dimensiones en que propaguen la energía. Las ondas que se mueven a lo largo de la cuerda o del resorte de la figura 1 son unidimensionales. Las ondas superficiales o rizos de agua, que se forman al arrojar una piedra a un estanque tranquilo, son bidimensionales. Las ondas de sonido y de luz que viajen radialmente partiendo de una pequeña fuente son tridimensionales.

Puede ampliarse la clasificación de las ondas según como se muevan las partículas del medio en el tiempo. Por ejemplo, podemos producir una *pulsación* que viaje por una cuerda estirada aplicándole un solo movimiento lateral en su extremo (Fig. 1*c*). Cada partícula permanece

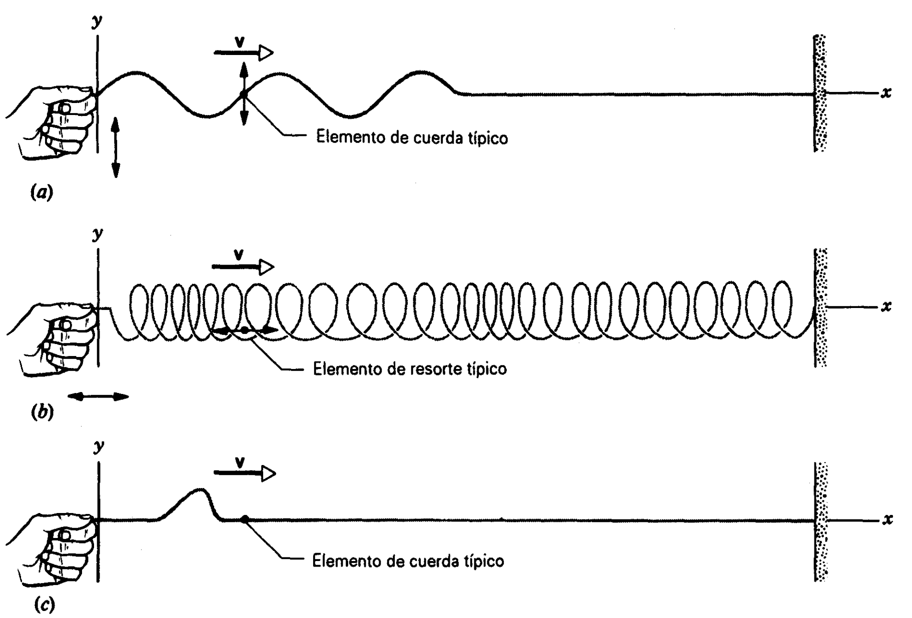

Figura 1 (*a*) Envío de una onda transversal a lo largo de una cuerda. Cada elemento de la cuerda vibra en ángulo recto a la dirección de propagación de la onda. (*b*) Envío de una onda longitudinal a lo largo de un resorte. Cada elemento del resorte vibra paralelo a la dirección de propagación de la onda. (*c*) Envío de una pulsación transversal única a lo largo de una cuerda.

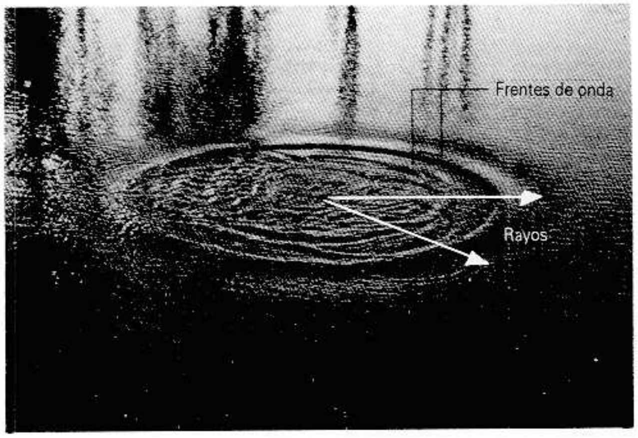

Figura 2 Ondas en la superficie de un lago. Los rizos circulares representan frentes de onda. Los rayos, que son perpendiculares a los frentes de onda, indican la dirección del movimiento de la onda.

en reposo hasta que la pulsación llega hasta ella, luego se mueve durante un tiempo corto y luego permanece nuevamente en reposo. Si continuamos moviendo el extremo de la cuerda en vaivén (Fig. 1*a*), produciremos un *tren de ondas* que viajará a lo largo de la cuerda. Si nuestro movimiento es periódico, produciremos un *tren de ondas periódico*, donde cada partícula de la cuerda tendrá un movimiento periódico. El caso especial más sencillo de una onda periódica es una *onda armónica*, donde cada partícula experimenta un movimiento armónico simple.

Imaginemos una piedra lanzada a un lago tranquilo. Los rizos circulares se esparcen hacia afuera desde el punto en que la piedra entró al agua (Fig. 2). A lo largo de un rizo circular dado, todos los puntos están en el mismo estado de movimiento. Esos puntos definen una superficie llamada *frente de onda*. Si el medio es de densidad uniforme, la dirección del movimiento de las ondas está en ángulo recto al frente de la onda. Una línea normal a los frentes de onda, que indique la dirección del movimiento de las ondas, se llama *rayo*.

Los frentes de onda pueden tener muchas formas. Una fuente central en la superficie del agua produce ondas bidimensionales con frentes de onda circulares y rayos que salen hacia afuera a partir del punto de la perturbación (como en la figura 2). En cambio, un palo muy largo arrojado horizontalmente al agua produciría (cerca de su centro) perturbaciones que viajan como líneas rectas, y cuyos rayos sería líneas paralelas. La analogía tridimensional, en la cual las perturbaciones viajan en una sola dirección, es la *onda plana*. En un instante dado, las condiciones son las mismas en todas partes de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Los frentes de onda son planos, y los rayos son líneas rectas paralelas (Fig. 3*a*). La analogía tridimensional de las ondas circulares son las ondas esféricas. Aquí, la perturbación se propaga hacia afuera en todas direcciones desde una fuente puntual de ondas. Los frentes de onda son esferas, y los rayos son líneas radiales que salen de la fuente puntual en todas direcciones (Fig. 3*b*). Lejos de esta fuente los frentes de onda esféricos tienen una curvatura muy pequeña, y dentro de una región limitada pueden considerarse a menudo como planos. Por supuesto, existen otras muchas formas de frentes de onda posibles.

19-3 ONDAS VIAJERAS

Como ejemplo del comportamiento de las ondas mecánicas consideraremos a una forma de onda transversal que viaje en una cuerda estirada larga. Suponemos una cuerda "ideal", en la cual la perturbación, ya sea una pulsación o un tren de ondas, mantiene su forma mientras viaja. Para que esto suceda, las pérdidas por fricción y otros medios de disipación de la energía deben ser despreciablemente pequeños. La perturbación está en el plano xy y viaja en dirección x.

La figura 4*a* muestra una forma de onda arbitraria en $t = 0$; podemos considerar que ésta es una instantánea de la pulsación que viaja a lo largo de la cuerda mostrada

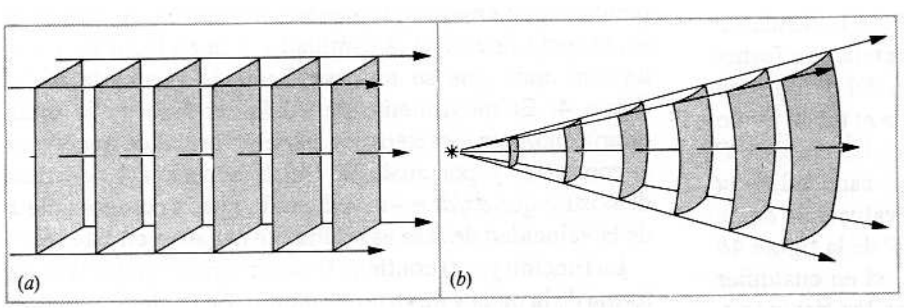

Figura 3 (*a*) Onda plana. Los planos representan frentes de onda espaciados en una longitud de onda, y las flechas representan rayos. (*b*) Onda esférica. Los frentes de onda, espaciados en una longitud de onda, son superficies esféricas y los rayos están en dirección radial.

en la figura 1*c*. Hagamos que la pulsación se mueva en dirección x positiva con una velocidad v. En un tiempo t más tarde, la pulsación se ha movido una distancia vt, como se muestra en la figura 4*b*. Nótese que la forma de onda es la misma en $t = 0$ que en tiempos posteriores.

La coordenada y indica el desplazamiento transversal de un punto en particular de la cuerda. Esta coordenada depende tanto de la posición x como del tiempo t. Indicamos esta dependencia de dos variables como $y(x,t)$.

Podemos representar a la forma de onda de la figura 4*a* como:

$$y(x,0) = f(x), \tag{1}$$

donde f es una función que describe la forma de la onda. En el tiempo t, la forma de onda debe todavía describirse por la misma función f, porque hemos supuesto que la forma no cambia al viajar la onda. Con relación al origen O' de un marco de referencia que viaje con la pulsación, la forma se describe por la funcion $f(x')$, como se indica en la figura 4*b*. La relación entre las coordenadas x de los dos marcos de referencia es $x' = x - vt$, como puede verse en la figura 4*b*. Entonces, en el tiempo t, la onda se describe por

$$y(x,t) = f(x') = f(x - vt). \tag{2}$$

Es decir, la función $f(x - vt)$ tiene la misma forma relativa al punto $x = vt$ en el tiempo t que la función $f(x)$ la tiene con relación al punto $x = 0$ en el tiempo $t = 0$.

Para describir por completo a la onda, debemos especificar a la función f. Más adelante, consideraremos a las ondas armónicas, en las cuales f es una función seno o coseno.

Las ecuaciones 1 y 2 juntas indican que podemos cambiar una función de cualquier forma en una onda que viaje en dirección x positiva simplemente sustituyendo a x por la cantidad $x - vt$ en todo lugar en que aparezca en la $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(x - vt) = (x - vt)^2$. Además, una onda que viaje en dirección x positiva debe depender de x y de t *únicamente* en la combinación $x - vt$; así pues, $x^2 - (vt)^2$ no representa a tal onda viajera.

Sigamos el movimiento de determinada parte (o *fase*) de la onda, tal como la de la posición P de la forma de onda de la figura 4. Si la onda ha de mantener su forma mientras viaja, entonces la coordenada y_P del punto P no debe cambiar. Vemos en la ecuación 2 que el único modo de que pueda suceder esto es que la coordenada x de P aumente mientras aumenta t, de modo que la cantidad $x - vt$ mantenga un valor fijo. Es decir, la evaluación de la cantidad $x - vt$ da el mismo resultado en P de la figura 4*b* que en P de la figura 4*a*. Esto continúa así en cualquier posición de la forma de onda y en todos los tiempos t. Entonces para el movimiento de cualquier fase particular de la onda debemos tener

$$x - vt = \text{constante}. \tag{3}$$

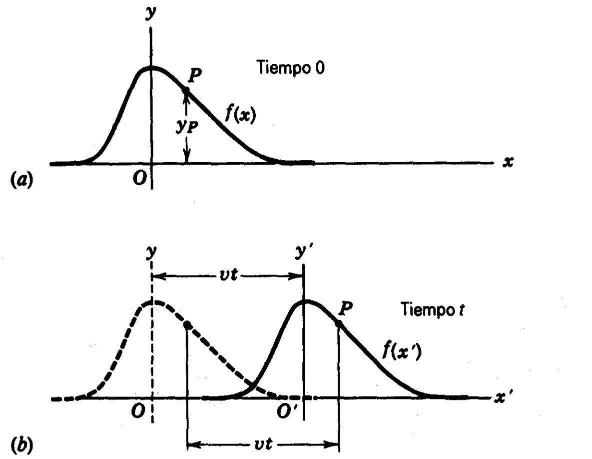

Figura 4 (*a*) Una pulsación transversal mostrada como una instantánea en el tiempo $t = 0$. El punto P representa una posición particular en la fase del pulso, *no* un punto particular del medio (la cuerda, por ejemplo). (*b*) En un tiempo t más tarde, la pulsación se ha movido una distancia vt en la dirección x positiva. El punto P de la fase se ha movido también una distancia vt. El máximo de la pulsación define el origen de la coordenada x'.

Podemos verificar que la ecuación 3 caracteriza al movimiento de la fase de la forma de onda al diferenciar respecto al tiempo, lo cual da

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dx}{dt} = v. \tag{4}$$

La velocidad dx/dt describe al movimiento de la fase de la onda, y por ello se conoce como *velocidad de fase*. Consideramos que v es una constante positiva, independiente de cualquier propiedad de la onda pero posiblemente (como lo veremos) dependiente de las propiedades del medio.

Si la onda se mueve en dirección x *negativa*, debemos reemplazar a v por $-v$. En este caso, obtendríamos

$$y(x,t) = f(x + vt), \tag{5}$$

donde una vez más $f(x)$ representa a la forma en $t = 0$. Esto es, al sustituir en $f(x)$ la cantidad $x + vt$ en lugar de x nos da una onda que se movería hacia la izquierda en la figura 4. El movimiento de cualquier fase de la onda estaría entonces caracterizado por el requisito de que $x + vt$ = constante, y por analogía con la ecuación 4 podemos demostrar que $dx/dt = -v$, indicando que la componente x de la velocidad de fase es realmente negativa en este caso.

La función $y(x,t)$ contiene la descripción completa de la forma de la onda y de su movimiento. En cualquier tiempo determinado, digamos t_1, la función $y(x,t_1)$ da a y en función de x, lo cual define a una curva; esta curva representa la forma real de la cuerda en ese tiempo y puede considerarse como una "instantánea" de la onda. Por otra

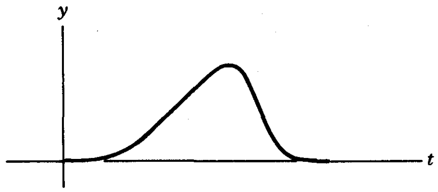

Figura 5 Un observador estacionado en un punto particular sobre el eje x registraría este desplazamiento y en función del tiempo en el transcurso de la pulsación de la figura 4. Nótese que la forma parece estar invertida, porque el borde delantero de la pulsación viajera llega al observador en los primeros momentos. Es decir, los desplazamientos registrados por el observador en los primeros momentos están aquí más cerca del origen.

parte, podemos tener en cuenta el movimiento de un punto particular sobre la cuerda, digamos en la coordenada fija x_1. La función $y(x_1,t)$ nos da entonces la coordenada y de ese punto en función del tiempo. La figura 5 muestra cómo podría moverse un punto sobre el eje x con el tiempo en el transcurso de la pulsación de la figura 4, moviéndose en dirección x positiva. En los tiempos cercanos a $t = 0$, el punto no se mueve en absoluto. Luego, comienza a moverse gradualmente a medida que llega al borde delantero de la pulsación de la figura 4. Después de pasar el máximo de la onda, el desplazamiento del punto cae rápidamente hasta regresar a cero al pasar el borde de salida.

Ondas sinusoidales

La descripción anterior es bastante general. Es válida para formas de onda arbitrarias, y se cumple tanto para ondas transversales como longitudinales. Por ejemplo, consideremos una forma de onda transversal que tenga una forma sinusoidal, lo cual tiene aplicaciones particularmente importantes. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ tenemos un tren de ondas a lo largo de la cuerda dado por

$$y(x,0) = y_m \ \text{sen} \ \frac{2\pi}{\lambda} x. \tag{6}$$

En la figura 6 se muestra la forma de onda. El desplazamiento máximo y_m se llama *amplitud* de la curva seno. El desplazamiento transversal y tiene el mismo valor en cualquier x, como también en $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. El símbolo λ representa la *longitud de onda* del tren de ondas e indica la distancia entre dos puntos adyacentes de la onda que tengan la misma fase. Si la onda viaja en dirección $+x$ con velocidad de fase v, entonces la ecuación de la onda es

$$y(x,t) = y_m \ \text{sen} \ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt). \tag{7}$$

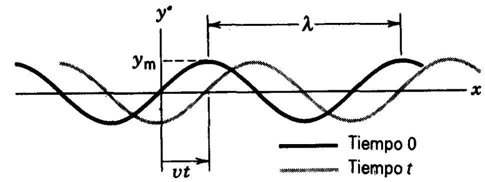

Figura 6 En $t = 0$ (en tono más intenso), la cuerda tiene la forma sinusoidal dada por $y = y_m$ sen $2\pi x/\lambda$. En un tiempo t más tarde (en tono más claro), la onda se ha movido hacia la derecha una distancia $x = vt$, y la cuerda tiene una forma dada por $y = y_m$ sen $2\pi(x - vt)/\lambda$.

Nótese que ésta tiene la forma $f(x - vt)$, necesaria para una onda viajera (Ec. 2).

El *periodo* T de la onda es el tiempo necesario para que un punto en cualquier coordenada x efectúe un ciclo completo de movimiento transversal. Durante este tiempo T, la onda viaja una distancia vT que debe corresponder a una longitud de onda λ, de modo que

$$\lambda = vT. \tag{8}$$

El inverso del periodo se llama *frecuencia* ν de la onda; $\nu = 1/T$. La frecuencia tiene unidades de ciclos por segundo, o hertz (Hz). El periodo y la frecuencia son dos temas tratados previamente en el capitulo 15.

Poniendo la ecuación 8 en la ecuación 7, obtenemos otra expresión para la onda:

$$y(x,t) = y_m \ \text{sen} \ 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{9}$$

Según esta forma es claro que y, en cualquier tiempo dado, tiene el mismo valor en x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente, y que y, en cualquier posición dada, tiene el mismo valor en los tiempos t, $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

Para reducir la ecuación 9 a una forma más compacta, introducimos dos cantidades, el *número de onda* k y la *frecuencia angular* ω. Éstas se definen por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{10}$$

El número de onda k es, al igual que ω, una cantidad angular, y las unidades de ambos implican radianes. Las unidades de k podrían ser, por ejemplo, rad/m, y de ω, rad/s. En términos de estas cantidades, la ecuación de una onda seno que viaje en dirección x positiva (hacia la derecha en la Fig. 6) es

$$y(x,t) = y_m \ \text{sen} \ (kx - \omega t). \tag{11}$$

La ecuación de una onda seno que viaje en dirección x negativa (hacia la izquierda en la Fig. 6) es

$$y(x,t) = y_m \ \text{sen} \ (kx + \omega t). \tag{12}$$

Al comparar las ecuaciones 8 y 10, vemos que la velocidad de fase v de la onda está dada por

$$v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \qquad (13)$$

Fase y constante de fase

En las ondas viajeras de las ecuaciones 11 y 12 hemos supuesto que el desplazamiento y es cero en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. Esto, por supuesto, no tiene que ser aquí así. La expresión general para una onda sinusoidal que viaje en dirección x positiva es

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi). \qquad (14)$$

La cantidad que aparece en el argumento del seno, es decir, $kx - \omega t - \phi$, se llama *fase* de la onda. Se dice que dos ondas con la misma fase (o con fases que difieran en cualquier múltiplo entero de 2π) están "en fase"; ejecutan el mismo movimiento en el mismo tiempo.

El ángulo ϕ se llama la *constante de fase*. La constante de fase no afecta a la forma de la onda; mueve a la onda hacia adelante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo. Para ver esto, reescribiremos la ecuación 14 en dos formas equivalentes:

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } \left[k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right] \qquad (15a)$$

o

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } \left[kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]. \qquad (15b)$$

La figura 7*a* muestra una "instantánea" en cualquier tiempo t de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 (donde $\phi = 0$) y 14. Nótese que cualquier punto en particular de la onda descrita por la ecuación 15*a* (digamos, cierta cresta de onda) está a una distancia ϕ/k *adelante del* punto correspondiente de la onda descrita por la ecuación 11.

En forma equivalente, si observáramos el desplazamiento en una posición fija x resultante de cada una de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 y 14, obtendríamos el resultado indicado por la figura 7*b*. La onda descrita por la ecuación 15*b* está similarmente *adelante de* la onda que tiene a $\phi = 0$, en este caso por una diferencia de tiempo ϕ/ω.

Cuando la constante de fase de la ecuación 14 es positiva, la onda correspondiente está adelante de una onda descrita por una ecuación similar que tiene a $\phi = 0$. Por esta razón, introdujimos a la constante de fase con signo negativo en la ecuación 14. Cuando una onda está adelante de otra en el tiempo o en el espacio, se dice que es la "guía". En cambio, al poner una constante de fase negativa en la ecuación 14, se mueve la onda correspondiente detrás de la otra que tenga $\phi = 0$; tal onda se dice que es la "rezagada".

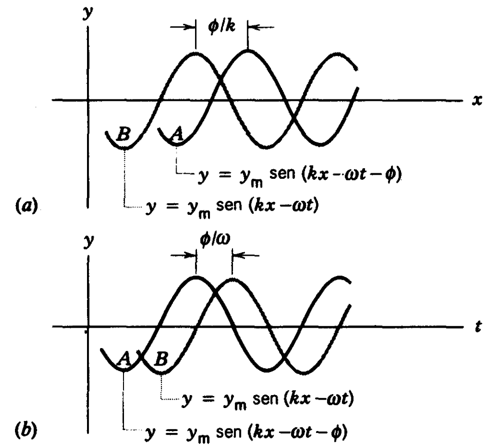

Figura 7 (*a*) Instantánea de dos ondas seno que viajan en dirección x positiva. La onda A tiene una constante de fase ϕ, y la onda B tiene a $\phi = 0$. La onda A está a una distancia ϕ/k adelante de la onda B. (*b*) Movimiento de un punto en el tiempo debido a las mismas dos ondas. La onda A está un tiempo ϕ/ω adelante de la onda B. Nótese que, en una gráfica de y contra t, "adelante de" significa "a la izquierda de", mientras que en una gráfica de y contra x, "adelante de" significa "a la derecha de", si las ondas viajan en dirección x positiva.

Si fijamos nuestra atención en un punto en particular de la cuerda, digamos x_1, el desplazamiento y en ese punto puede expresarse:

$$y(t) = -y_m \text{ sen } (\omega t + \phi'),$$

donde hemos sustituido una constante de fase nueva $\phi' = \phi - kx_1$. Esta expresión de $y(t)$ es similar a la ecuación 6 del capítulo 15 para el movimiento armónico simple. De aquí que cualquier elemento particular de la cuerda experimente un movimiento armónico simple con respecto a su posición de equilibrio al viajar este tren de ondas a lo largo de la cuerda.

Velocidad de grupo y dispersión

Las ondas sinusoidales puras son elementos matemáticos útiles para ayudarnos a entender el movimiento ondulatorio. En la práctica, usamos otras clases de ondas para transportar energía e información. Estas ondas pueden ser periódicas pero no sinusoidales, tales como las ondas cuadradas o las de "diente de sierra", o pueden ser pulsaciones no periódicas, como las de la figura 4.

Hemos usado la velocidad de fase para describir el movimiento de dos clases de ondas: la onda pulsátil, que conserva su forma al viajar (Fig. 4) y la onda seno pura

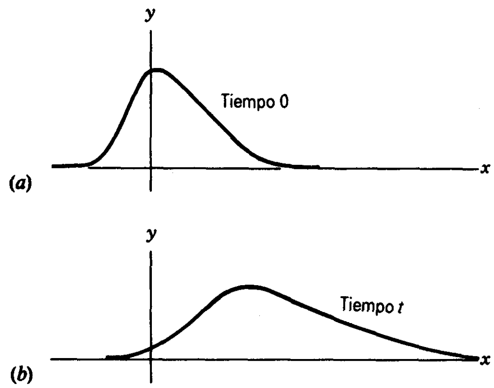

Figura 8 En un medio dispersivo, la forma de onda cambia al viajar la onda.

(Fig. 6). En otros casos, debemos usar una velocidad diferente, llamada la *velocidad de grupo*, que es la velocidad a la cual viaja la energía o la información en una onda real.

La figura 8 muestra una pulsación que viaja a través de un medio. La forma de la pulsación cambia al viajar; la pulsación se esparce, o *dispersa*. (Dispersión no es lo mismo que disipación de energía. El contenido de energía de la pulsación de la figura 8 puede permanecer constante mientras viaja, aunque la pulsación se disperse. Suponemos que el medio es *dispersivo*, pero no necesariamente *disipativo*.) Como veremos en la sección 19-7, cualquier onda periódica puede ser considerada como la suma o superposición de una serie de ondas sinusoidales de frecuencias diferentes o de longitudes de onda diferentes. Las frecuencias, amplitudes, y fases de las ondas sinusoidales componentes deben elegirse con cuidado de acuerdo con un procedimiento matemático, conocido como *análisis de Fourier*, de modo que las ondas se sumen para dar la forma de onda deseada. En muchos medios reales, la velocidad de propagación de estas ondas componentes (es decir, la velocidad de fase) depende de la frecuencia o de la longitud de onda de la componente en particular. Cada onda componente puede viajar con su velocidad propia. Entonces, al viajar la onda, las relaciones de fase de las componentes pueden cambiar, y la forma de onda de la suma de las componentes cambiaría de manera correpondiente al viajar la onda. Éste es el origen de la dispersión: las ondas componentes viajan a velocidades de fase diferentes. No existe una relación sencilla entre las velocidades de fase de las componentes y la velocidad de grupo de la onda; la relación depende de la dispersión del medio.

Ciertos medios reales son no dispersivos aproximadamente, en cuyo caso la onda mantiene su forma, y todas las ondas componentes viajan con la misma velocidad. Un ejemplo son las ondas sonoras en el aire. Si el aire fuese fuertemente dispersivo de las ondas sonoras, la conversación sería imposible, porque la forma de onda producida por las cuerdas vocales de quien habla confundiría siendo irreconocible al momento en que llegase a nuestros oídos. Además, el esmero que ponen los miembros de una orquesta por tocar precisamente al mismo tiempo no tendría ningún valor, porque (si el aire fuese dispersivo del sonido) las notas de alta frecuencia viajarían hasta el oído del oyente a una velocidad diferente de la de las notas de baja frecuencia, y el oyente escucharía los sonidos en tiempos diferentes. Por fortuna, esto no ocurre con las ondas sonoras. Las ondas de la luz en el vacío son perfectamente no dispersivas; la dispersión de las ondas de luz en medios reales es la causa de efectos tales como el espectro de colores del arcoiris.

En un medio no dispersivo, todas las ondas componentes de una forma de onda compleja viajan a la misma velocidad de fase, y la velocidad de grupo de la forma de onda es igual a ese valor común de la velocidad de fase. Únicamente en este caso podemos hablar de la velocidad de fase de la forma de onda entera. En este capítulo tratamos de las ondas mecánicas que se propagan en medios no dispersivos.

19-4 VELOCIDAD DE ONDA

La velocidad de onda, lo que aquí significa la velocidad de fase de una onda sinusoidal o la velocidad de grupo de una pulsación en un medio no dispersivo, no depende de la frecuencia o de la longitud de onda. Es posible calcular la velocidad de una onda mecánica a partir de las propiedades del medio aplicando los principios básicos de la mecánica newtoniana. En esta sección continuaremos centrando nuestra atención en las ondas transversales de una cuerda en tensión, y en la sección siguiente mostraremos cómo calcular la velocidad de tales ondas de la manera más general. Los cálculos de la velocidad de otras ondas, por ejemplo las ondas sonoras en el aire, siguen métodos similares.

Aquí consideraremos dos enfoques: un tratamiento basado en el análisis dimensional y un análisis mecánico un poco menos general por medio del cual calcularemos la velocidad de una pulsación transversal a lo largo de una cuerda tensa.

Análisis dimensional

La velocidad de las ondas de una cuerda musical depende de la masa de un elemento de la cuerda y de la fuerza entre elementos vecinos, la cual es la tensión F con la que se estira la cuerda. Si aumentamos la tensión (como al ajustar las clavijas de una cuerda de guitarra), la fuerza entre elementos vecinos aumentará, y podemos esperar que la velocidad de la onda aumente también. Caracterizaremos a la masa de un elemento de la cuerda en términos de la *densidad de masa lineal* μ, la masa por unidad de longitud de la cuerda. Suponiendo que la velocidad de onda v dependa únicamente de F y de μ, podemos usar el método del análisis dimensional (véase la sección 1-7) y escribir

$$v \propto F^a \mu^b,$$

donde a y b son exponentes por determinarse a partir del análisis dimensional. En términos de las dimensiones de masa M, longitud L, y tiempo T, esto puede expresarse como:

$$[v] = [F^a][\mu^b]$$
$$\mathrm{LT}^{-1} = (\mathrm{MLT}^{-2})^a(\mathrm{ML}^{-1})^b,$$

y resolviendo por igualación de las potencias correspondientes de M, L, y T se obtiene $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$. Así, $v \propto \sqrt{F/\mu}$, o, introduciendo una constante de proporcionalidad C,

$$v = C\sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{16}$$

Lo más que podemos decir de este análisis es que la velocidad de la onda es igual a una constante sin dimensiones multiplicada por $\sqrt{F/\mu}$. El valor de la constante puede obtenerse de un análisis mecánico del problema o por medio de la experimentación. Estos métodos demuestran que la constante es igual a la unidad.

Análisis mecánico

Derivemos ahora por medio de un análisis mecánico una expresion para la velocidad de una pulsación en una cuerda tensa. En la figura 9 se muestra una "instantánea" de una pulsación de onda que se mueve de izquierda a derecha en la cuerda con una velocidad v. Podemos imaginar en su lugar que toda la cuerda se mueve de derecha a izquierda con esta misma velocidad, de modo que la pulsación de la onda permanece fija en el espacio (quizás metiendo a la cuerda en un tubo carente de fricción que tenga la forma deseada de la pulsación). Esto significa simplemente que, en lugar de considerar que nuestro marco de referencia sean las paredes entre las que se estira la cuerda, escogemos un marco de referencia que esté en movimiento uniforme con respecto a aquél. En efecto, observamos a la pulsación mientras corremos a lo largo de la cuerda con la misma velocidad que la pulsación. Puesto que las leyes de Newton implican sólo aceleraciones, las cuales son iguales en ambos marcos, podemos emplearlas en cualquiera de los marcos. Nos inclinamos, entonces, por el marco que para nosotros resulta más conveniente.

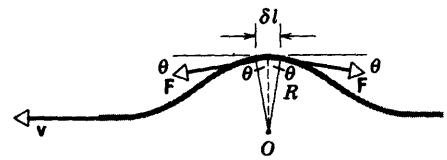

Figura 9 Una pulsación que se mueva hacia la derecha en una cuerda estacionaria es equivalente a una pulsación en posición fija en una cuerda que se mueva hacia la izquierda. Consideramos las fuerzas en una sección de cuerda de longitud δl en la pulsación "fija".

Consideremos a una pequeña sección de la pulsación de longitud δl, como se muestra en la figura 9. Esta sección forma aproximadamente un arco de círculo de radio R. La masa δm de este elemento es $\mu\ \delta l$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. La tensión F en la cuerda es un tirón tangencial en cada extremo de este pequeño segmento de la cuerda. Las componentes horizontales de F se cancelan, y las componentes verticales son cada una igual a F sen θ. De aquí que la fuerza vertical total $F_\perp$ sea $2F$ sen θ. Debido a que θ es pequeño, podemos considerar que sen $\theta \approx \theta$. Partiendo de la figura 9, vemos que $2\theta = \delta l/R$, y así obtenemos

$$F_\perp = 2F \operatorname{sen} \theta \approx 2F\theta = F\frac{\delta l}{R}. \tag{17}$$

Esto da la fuerza que suministra la aceleración centrípeta de las partículas de cuerda dirigidas hacia O. La fuerza centrípeta que actúa sobre una masa δm ($= \mu\ \delta l$) que se mueve en círculo de radio R a velocidad v es $\delta m\ v^2/R$. Nótese que la velocidad tangencial v de este elemento de masa a lo largo de la parte superior del arco es horizontal y de magnitud igual a la velocidad de la onda. Igualando la fuerza vertical neta sobre el elemento, ecuación 17, con la fuerza centrípeta necesaria, obtenemos

$$F_\perp = \frac{\delta m\ v^2}{R}$$

o bien

$$F\frac{\delta l}{R} = \frac{\mu\ \delta l\ v^2}{R}$$

por lo que

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{18}$$

La ecuación 18 muestra, a partir de un análisis mecánico, que la constante C en la ecuación 16 tiene el valor 1.

Si la amplitud de la pulsación fuese muy grande en comparación con la longitud de la cuerda, no habríamos tenido la posibilidad de usar la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Además, la tensión F de la cuerda cambiaría por la presencia de la pulsación, mientras que hemos supuesto que

F no cambia a partir de la tensión original de la cuerda estirada. Por lo tanto, nuestro resultado cumple únicamente para desplazamientos transversales de la cuerda relativamente pequeños, un caso que es ampliamente aplicable en la práctica.

Una onda periódica que entra en un medio suele ser consecuencia de una influencia externa que perturba al medio a una cierta frecuencia. La onda que viaja a través de ese medio tendrá la misma frecuencia que la fuente de la onda. La velocidad de la onda está determinada por las propiedades del medio. Dadas la frecuencia ν de la onda y su velocidad v en el medio, la longitud de onda de la onda periódica *en ese medio* se determina por la ecuación 13, $\lambda = v/\nu$. Cuando una onda pasa de un medio a otro de velocidad de onda diferente (por ejemplo, dos cuerdas con densidades de masa lineal diferentes), la frecuencia en un medio debe ser la misma que la frecuencia en el otro. (De otro modo existiría una discontinuidad en el punto en que se junten las dos cuerdas.) Sin embargo, las longitudes de onda diferirán una de otra. La relación entre las longitudes de onda se deduce de la igualdad de las frecuencias ν_1 y ν_2 en los dos medios; es decir, $\nu_1 = \nu_2$ da

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}. \tag{19}$$

Velocidad transversal de una partícula

El movimiento de una partícula en una onda transversal como la de la figura 6 es en dirección y. La velocidad de la onda describe el movimiento de la onda a lo largo de la dirección de viaje (la dirección x). La velocidad de la onda *no* caracteriza el movimiento transversal de las partículas de la cuerda.

Para hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda necesitamos el cambio en la coordenada y con el tiempo. Así, centramos nuestra atención en una partícula aislada de la cuerda, es decir, en cierta coordenada x. Por lo tanto, necesitaremos la derivada de y con respecto a t siendo x constante. Esto se representa por el símbolo $\partial y/\partial t$, el cual indica la *derivada parcial* de y con respecto a t, manteniendo constantes a todas las demás variables de las que pueda depender y. Representamos a la velocidad de la partícula, la cual varía tanto con x (la posición de la partícula) como con t, con la expresión $u(x,t)$. Suponiendo que tenemos una onda sinusoidal de la forma de la ecuación 14, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi)] \\ &= -y_m\omega \cos(kx - \omega t - \phi). \end{aligned} \tag{20}$$

Continuando de esta manera, podemos hallar la aceleración transversal de la partícula en esta posición de x de acuerdo con

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = -y_m\omega^2 \sin(kx - \omega t - \phi) \\ &= -\omega^2 y. \end{aligned} \tag{21}$$

La ecuación 21 tiene la misma forma que la ecuación 5 del capítulo 15; la aceleración transversal de cualquier punto es proporcional a su desplazamiento transversal, pero dirigida en sentido opuesto. Esto demuestra que cada partícula de la cuerda experimenta un movimiento armónico simple transversal al pasar la onda sinusoidal.

Problema muestra 1 En un extremo de una cuerda horizontal larga se genera una onda sinusoidal transversal por medio de una barra que mueve al extremo de arriba a abajo en una distancia de 1.30 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 125 veces por segundo. (*a*) Si la cuerda tiene una densidad lineal de 0.251 kg/m y se mantiene sometida a una tensión de 96 N, halle la amplitud, la frecuencia, la velocidad, y la longitud de onda del movimiento de la onda. (*b*) Suponiendo que la onda se mueva en dirección $+x$ y que, en $t = 0$, el elemento de la cuerda en $x = 0$ esté en su posición de equilibrio $y = 0$ y moviéndose hacia abajo, halle la ecuación de la onda.

Solución (*a*) Al moverse la barra un total de 1.30 cm, el extremo de la cuerda se mueve $\frac{1}{2}$(1.30 cm) = 0.65 cm fuera de su posición de equilibrio, primero sobre ella, luego bajo ella; por lo tanto, la amplitud y_m es 0.65 cm.

El movimiento íntegro se repite 125 veces cada segundo, y entonces la frecuencia es de 125 vibraciones por segundo, o $\nu = 125$ Hz.

La velocidad de la onda está dada por la ecuación 18,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{96\ \text{N}}{0.251\ \text{kg/m}}} = 19.6\ \text{m/s}.$$

La longitud de onda está dada por $\lambda = v/\nu$, de modo que

$$\lambda = \frac{19.6\ \text{m/s}}{125\ \text{Hz}} = 0.156\ \text{m} = 15.6\ \text{cm}.$$

(*b*) La expresión general para una onda sinusoidal transversal que se mueve en la dirección $+x$ está dada por la ecuación 14,

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi).$$

Imponiendo las condiciones iniciales dadas ($y = 0$ y $\partial y/\partial t < 0$ para $x = 0$ y $t = 0$) tenemos

$$y_m \operatorname{sen}(-\phi) = 0 \quad \text{y} \quad -y_m\omega\cos(-\phi) < 0,$$

lo cual significa que puede considerarse que la constante de fase ϕ es cero (o cualquier entero múltiplo de 2π). De aquí que, para esta onda,

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

y con los valores que acabamos de hallar,

$$y_m = 0.65\ \text{cm},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.156\ \text{m}} = 40.3\ \text{rad/m} = 0.403\ \text{rad/cm},$$

$$\omega = vk = (19.6\ \text{m/s})(40.3\ \text{rad/m}) = 789\ \text{rad/s},$$

obtenemos como ecuación de la onda

$$y(x,t) = 0.65 \text{ sen } (0.403x - 789t),$$

donde x y y están en centímetros y t está en segundos.

Problema muestra 2 Cuando la onda del problema muestra 1 pasa a lo largo de la cuerda, cada partícula de la cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo en ángulo recto con la dirección del movimiento de la onda. (*a*) Halle espresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula P situada en x_p = 0.245 m. (*b*) Evalúe el desplazamiento transversal, la velocidad, y la aceleración de esta partícula en t = 1.5 s.

Solución (*a*) Para una partícula en x_p = 0.245 m = 24.5 cm en la onda del problema muestra 1, obtenemos, usando la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$u(x_P,t) = -(0.65)(789) \cos [(0.403)(24.5) - 789t]$$
$$= -513 \cos (9.87 - 789t),$$

donde u está en cm/s y t está en segundos. De modo similar, usando la ecuación 21, hallamos que la aceleración es

$$a(x_P,t) = -(0.65)(789)^2 \text{ sen } (9.87 - 789t)$$
$$= -(4.05 \times 10^5) \text{ sen } (9.87 - 789t),$$

donde a está en cm/s^2.

(*b*) En t = 1.5 s, evaluamos las expresiones para y, u, y a para dar

$$y = +0.63 \text{ cm}, \quad u = -125 \text{ cm/s}, \quad a = -3.93 \times 10^5 \text{ cm/s}^2.$$

Es decir, la partícula está cerca de su desplazamiento positivo máximo, se mueve en dirección y negativa (alejándose de ese máximo), y está acelerando en dirección y negativa (su velocidad está creciendo en magnitud al moverse la partícula hacia su posición de equilibrio).

19-5 LA ECUACIÓN DE LA ONDA *(Opcional)*

En el capítulo 15 hemos tratado el fenómeno de la oscilación que comúnmente encontramos. Una razón de que este fenómeno sea tan común es que la ecuación básica que describe a un sistema oscilatorio [$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, ecuación 6 del capítulo 15] es una solución de la ecuación 5 del capítulo 15,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x,$$

que es una ecuación de una forma general que puede derivarse a partir de un análisis mecánico de una variedad de situaciones físicas, alguna de las cuales se trataron en la sección 15-5.

La situación es similar en el caso del movimiento ondulatorio. Como lo demostramos en esta sección, el análisis mecánico da una ecuación de otra forma encontrada comúnmente, cuya solución es una onda de la forma dada por la ecuación 2 o por la ecuación 5.

La figura 10 muestra un elemento de una cuerda larga que sometido a una tensión F. El tránsito de una onda ha provocado que el elemento sea desplazado de su posición de equilibrio en y = 0. Consideramos al elemento de la cuerda de longitud δx, y

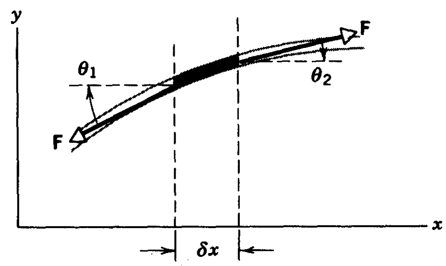

Figura 10 Un pequeño elemento de longitud δx de una cuerda larga en tensión F. La figura representa una instantánea del elemento en un tiempo en particular durante el tránsito de una onda.

aplicamos la segunda ley de Newton para analizar *cómo* se mueve este elemento.

Sobre el elemento actúan dos fuerzas ejercidas por las partes de la cuerda a cada lado del elemento. Estas fuerzas tienen magnitudes iguales, porque la tensión está distribuida uniformemente a lo largo de la cuerda, pero tienen direcciones ligeramente distintas, porque actúan tangentes a la cuerda en los puntos extremos del elemento. La fuerza neta en la dirección y es

$$F_y = F \text{ sen } \theta_2 - F \text{ sen } \theta_1.$$

Consideramos únicamente desplazamientos pequeños a partir del equilibrio, de modo que los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños, y podemos escribir que sen $\theta \approx$ tan θ, lo cual da

$$F_y \approx F \tan \theta_2 - F \tan \theta_1 = F\,\delta(\tan \theta), \tag{22}$$

donde $\delta(\tan\theta) = \tan\theta_2 - \tan\theta_1$. Esta fuerza resultante debe ser igual a la masa del elemento, $\delta m = \mu\,\delta x$, multiplicada por la componente y de la aceleración. Despreciando la fuerza de fricción y otras fuerzas disipativas, hallamos que la segunda ley de Newton da

$$F_y = \delta m\, a_y$$
$$F\,\delta(\tan\theta) = \mu\,\delta x\, a_y$$
$$\frac{\delta(\tan\theta)}{\delta x} = \frac{\mu}{F}a_y.$$

Para la componente y de la aceleración a_y, usamos la aceleracion transversal de una partícula, $\partial^2 y/\partial t^2$. También, reemplazamos a tan θ, que es la pendiente de la cuerda, por la derivada parcial equivalente $\partial y/\partial x$. Haciendo estas sustituciones, obtenemos

$$\frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{23}$$

Consideremos ahora el límite de la ecuación 23 cuando el elemento de masa se vuelve muy pequeño. El lado izquierdo está en la forma normal para expresar la derivada respecto a x como un límite:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

y el resultado final es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{24}$$

Reemplazando a μ/F por $1/v^2$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{25}$$

La ecuación 25 es la forma general de la ecuación que describe a las ondas: la segunda derivada del desplazamiento de onda y respecto a la coordenada x en dirección de la propagación es igual a $1/v^2$ multiplicado por la segunda derivada respecto al tiempo. Esta forma general de ecuación se llama *ecuación de onda*. Surge no solamente en la mecánica sino también en otras situaciones. Por ejemplo, como veremos en el capítulo 41, si usamos las ecuaciones del electromagnetismo en lugar de las ecuaciones de la mecánica (las leyes de Newton), obtenemos una ecuación de exactamente la misma forma que la ecuación 25, excepto que el desplazamiento y se sustituye por la intensidad de un campo magnético o eléctrico. La velocidad de propagación v de las ondas electromagnéticas que viajan en un vacío se convierten en la velocidad de la luz c.

Veamos ahora cómo la solución de la ecuación 25 es nuestra fórmula general para una onda viajera, $y(x,t) = f(x \pm vt)$. Hagamos un simple cambio de variable y que z represente a $x \pm vt$, de modo que $y = f(z)$. Entonces, usando repetidamente la regla de la cadena del cálculo,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm v\frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d}{dz}\left(\pm v\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = (\pm v)^2\frac{d^2 f}{dz^2} = v^2\frac{d^2 f}{dz^2}.$$

Así,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

y se satisface la ecuación 25. Puede demostrarse que *únicamente* las combinaciones $x \pm vt$ en f satisfacen a la ecuación de onda, de modo que todas las ondas viajeras deben tener la forma de la ecuación 2 o de la ecuación 5.

Para expresar estos resultados de otra manera, la ecuación 24, la cual se derivó de las leyes de Newton, representa a una onda viajera únicamente cuando $\mu/F = 1/v^2$. Esta discusión proporciona así una derivación independiente de la ecuación 18 para la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de una cuerda tensada. ■

19-6 POTENCIA E INTENSIDAD EN EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Si, como lo sugiere la figura 1, estuviese usted sacudiendo (y por tanto efectuando un trabajo en) el extremo de una cuerda, un compañero que estuviese en el otro extremo podría extraer la energía resultante (la cual se transporta a lo largo de la cuerda en la forma de la energía potencial y la energía cinética de sus elementos) y usarla para efectuar un trabajo en otro sistema. Tal transporte de energía (y de ímpetu) es, de hecho, uno de los objetivos de producir ondas. En esta sección consideraremos la cantidad de energía que transporta la cuerda.

La figura 11 muestra una instantánea de la onda en los tiempos t y $t + dt$. Un punto de la cuerda con coordenada x tiene en un tiempo t una velocidad transversal **u**, la cual tiene una componente y únicamente. Esta velocidad, como hemos ya visto en la sección 19-4, *no* se relaciona con la velocidad de fase de la onda, sino que más bien tiene la magnitud dada por la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

para una onda sinusoidal de la forma dada por la ecuación 11.

En la figura 11 se muestra también la fuerza ejercida sobre un elemento de la cuerda por el elemento de su izquierda. La fuerza transmite energía en una cantidad dada por la ecuación 23 del capítulo 7, $P = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = uF_y$.

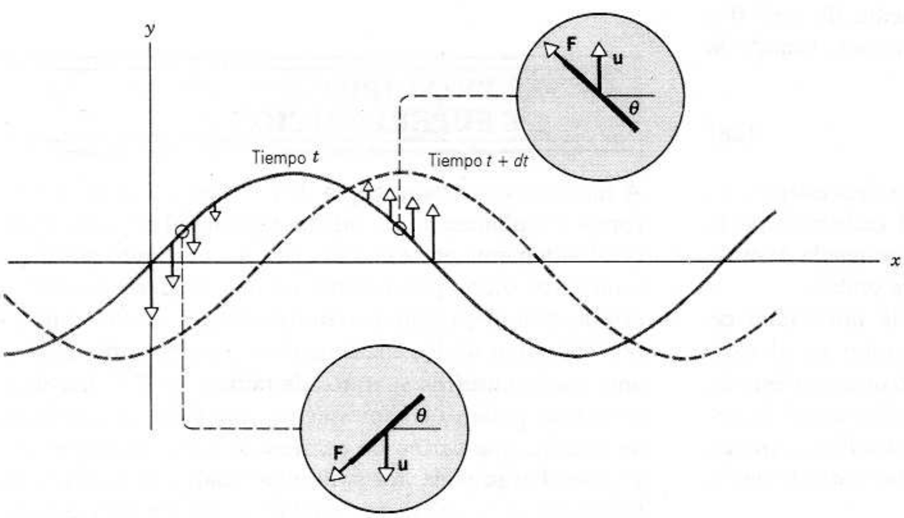

Figura 11 Los vectores en la dirección y muestran el valor de la velocidad instantánea **u** de diferentes puntos de la cuerda al viajar la onda seno. La línea punteada muestra la onda en un tiempo posterior, cuando las partículas se han movido en la dirección dada por sus vectores de velocidad. Las intercalaciones muestran la fuerza sobre dos elementos diferentes de la cuerda, ejercida por el elemento de su izquierda. Nótese que la potencia instantánea $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$ es positiva, sin importar dónde estemos dentro de la fase de la onda.

Únicamente la componente F_y de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{u}$ contribuye a la potencia; esta componente es F sen θ, la cual, para pequeños desplazamientos, puede ser aproximada como $F \tan \theta = F\partial y/\partial x$, donde $\partial y/\partial x$ es la pendiente de la cuerda en la coordenada x.

Nótese que la componente y de $\mathbf{F}$ es paralela a $\mathbf{u}$, sin importar si el elemento de la cuerda se está moviendo hacia arriba o hacia abajo. Así, $uF_y \geq 0$, y por lo tanto la potencia transmitida nunca es negativa durante el ciclo de oscilación. *Existe un flujo neto continuo de energía en dirección x positiva (la dirección de propagación de la onda).*

Sustituyendo a la componente y de la fuerza, obtenemos

$$P = uF_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(F\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$
$$= F[-\omega y_m \cos(kx - \omega t)][-ky_m \cos(kx - \omega t)]$$
$$= y_m^2 k\omega F \cos^2(kx - \omega t)$$

o sea

$$P = y_m^2 \mu v\omega^2 \cos^2(kx - \omega t), \tag{26}$$

donde hemos usado $v = F/\mu$ y $v = \omega/k$.

Nótese que la potencia o cantidad de flujo de energía no es constante. Esto se debe a que la potencia de entrada oscila: el trabajo efectuado por la mano que está moviendo el extremo de la cuerda varía con el desplazamiento transversal de ese punto. Cuando se transporta energía a lo largo de la cuerda, la energía se almacena en cada elemento de la cuerda como una combianción de energía cinética y de energía potencial de deformación. Esto es similar al caso del oscilador armónico simple.

A menudo se considera que esta entrada de potencia a la cuerda es el promedio en un periodo del movimiento. La potencia promedio abastecida es de

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P\, dt, \tag{27}$$

donde T es el periodo. El valor promedio de sen^2 θ o de $\cos^2 \theta$ en un ciclo de $\frac{1}{2}$, y así obtenemos, usando la ecuación 26,

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} y_m^2 \mu v\omega^2, \tag{28}$$

resultado que no depende de x ni de t. La dependencia de la tasa de transferencia de energía del *cuadrado* de la amplitud de onda y del *cuadrado* de la frecuencia de onda es así, en general, para todos los tipos de ondas.

A menudo es más útil especificar la *intensidad* de la onda en una onda tridimensional, como en el caso de una onda de luz o una onda de sonido que proviene de una fuente puntual. La intensidad I se define como *la potencia promedio por unidad de área transmitida a través de un área A normal a la dirección en que viaja la onda*, es decir,

$$I = \frac{\overline{P}}{A}. \tag{29}$$

Al igual que con la potencia en la onda que viaja a lo largo de la cuerda, la intensidad de cualquier onda es siempre proporcional al cuadrado de la amplitud. (Sin embargo, en ondas circulares o esféricas, la amplitud no es constante al viajar el frente de la onda; véase el problema muestra 3.)

La energía puede disiparse mientras la onda se propaga a través del espacio. La energía mecánica de la onda puede convertirse en energía interna de la cuerda o en energía calorífica transmitida al entorno mediante la fricción interna u otros efectos viscosos. En este capítulo despreciamos tales transformaciones de la energía y suponemos que no se pierde energía mecánica.

Problema muestra 3 Las ondas esféricas viajan a partir de una fuente de ondas cuya potencia de salida, supuesta constante, es P; véase la figura 12. ¿Cómo depende la intensidad de la onda de la distancia a partir de la fuente?

Solución Suponemos que el medio es isotrópico y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones, es decir, su emisión es simétricamente esférica.

La intensidad de una onda está dada por la ecuación 29. La potencia se distribuye uniformemente sobre cualquier superficie esférica de área $A = 4\pi r^2$, y entonces

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

La intensidad de la onda varía inversamente con el cuadrado de su distancia desde la fuente. Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la amplitud de la onda debe variar inversamente con la distancia desde la fuente. Así, por ejemplo, al duplicar la distancia desde una fuente, la amplitud de una onda esférica disminuye a la mitad, y la intensidad es de únicamente la cuarta parte.

19-7 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

A menudo observamos que dos o más ondas viajan en forma simultánea por la misma región del espacio, independientemente entre sí. Por ejemplo, el sonido que llega a nuestros oídos proveniente de una orquesta sinfónica es muy complejo, pero podemos captar el sonido emitido por cada uno de los instrumentos por separado. En las antenas de nuestros aparatos de radio y de TV, los electrones se ponen en movimiento por todo un conjunto de señales que parten de centros de emisión diferentes, y sin embargo podemos sintonizar cualquier estación en particular, y la señal que recibimos de esa estación es,

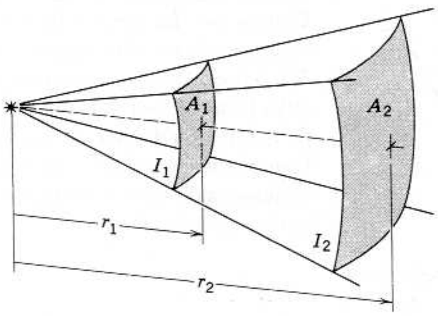

Figura 12 Problema muestra 3.

en principio, la misma que la que recibiríamos si todas las demás estaciones cesaran de emitir.

Los ejemplos anteriores ilustran el *principio de superposición*, que postula que, cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier partícula en un tiempo dado es simplemente la suma vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual que actúe por sí sola. Por ejemplo, supongamos que dos ondas viajen simultáneamente a lo largo de la misma cuerda tensada. Sean $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ los desplazamientos que la cuerda experimentaría si cada onda actuase por separado. El desplazamiento de la cuerda al actuar ambas ondas es, entonces,

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t), \tag{30}$$

siendo algebraica la suma en este caso.

Para las ondas mecánicas en medios elásticos, el principio de superposición es válido cuando la fuerza de restitución varía linealmente con el desplazamiento. Para las ondas electromagnéticas, el principio de superposición es válido porque los campos eléctricos y magnéticos se relacionan linealmente.

La figura 13 muestra una secuencia de tiempo de "instantáneas" de dos pulsaciones que viajan en direcciones opuestas en la misma cuerda tensada. Cuando las pulsaciones se superponen, el desplazamiento de la cuerda es la suma algebraica de los desplazamientos individuales de la cuerda provocados por cada una de las dos pulsaciones por separado, como lo exige la ecuación 30. Las pulsaciones se mueven simplemente entrecruzándose viajando cada una de ellas a lo largo como si la otra no existiera.

El principio de superposición puede parecer un resultado obvio, pero hay casos en los que éste no se cumple. Supongamos, por ejemplo, que una de las ondas tiene una amplitud tan grande que supera el límite elástico del medio. La fuerza de restitución ya no es directamente proporcional al desplazamiento de una partícula en el medio. Entonces, sin importar cuál sea la amplitud de la segunda onda (incluso si es muy pequeña), su efecto en un punto no es una función lineal de su amplitud. Además,

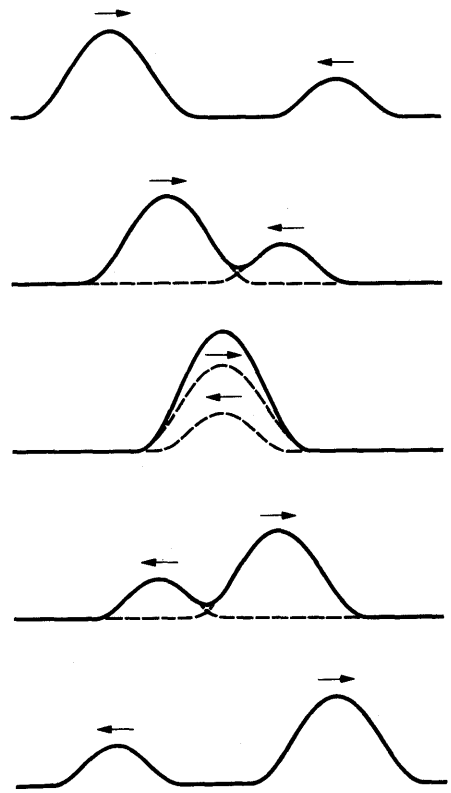

Figura 13 Dos pulsaciones viajan en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensada. Se aplica el principio de superposición al entrecurzarse una y otra.

la segunda onda cambiará al pasar a través de la región no lineal, y su comportamiento posterior se alterará. Esta situación surge sólo muy raramente, y en la mayoría de los casos es válido el principio de superposición (como lo suponemos a lo largo de este texto).

Ondas complejas

Cuando dos o más ondas diferentes, que puedan tener diferentes amplitudes y longitudes de onda, se hallan presentes de manera simultánea en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda $y(x,t)$ complejo que no se parezca en absoluto a las ondas que lo componen. Sin embargo, es una forma de onda viajera aceptable.

La figura 14*a* muestra un ejemplo del caso de dos ondas seno de igual amplitud cuya longitud de onda está en la razón de 3:1. Las ondas viajan en la misma dirección y con la misma velocidad de fase. Están en fase en $x = 0$. La curva más oscura muestra la forma de onda resultante que puede calcularse empleando la ecuación 30. Nótese que no es una onda seno. En la figura 14*b*, las dos ondas combinadas son idénticas a las de la figura 14*a*, excepto

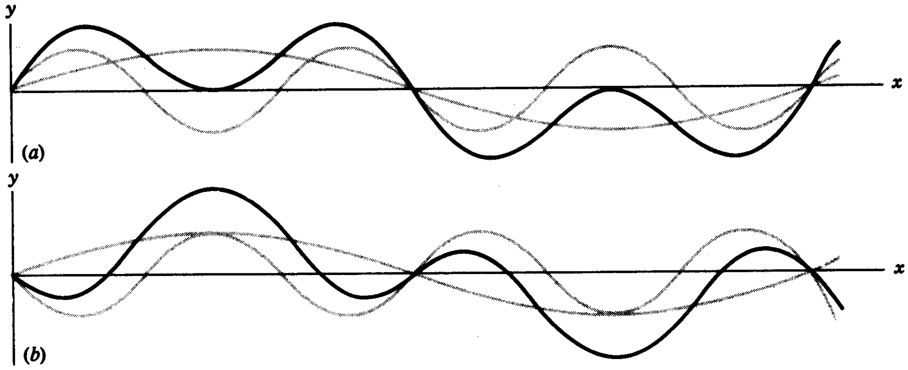

Figura 14 La adición de dos ondas con una razón de longitud de onda de 3:1 (línea más clara) produce una onda cuya forma (línea más intensa) depende de la relación de fase de las dos ondas. Compárense (*a*) y (*b*), que muestran relaciones de fase diferentes de las ondas sumadas.

que están 180° fuera de fase en $x = 0$. La forma de onda resultante es bastante diferente de la de la figura 14*a*.

Al cambiar la designación del eje horizontal en la figura 14 de x a t, tendríamos una representación de la superposición de dos ondas en función del tiempo en un punto en particular. Tal gráfica podría representar, por ejemplo, el movimiento en el tiempo de un punto en particular de una cuerda en respuesta a la combinación de dos ondas.

Análisis de Fourier *(Opcional)*

Físicamente, la importancia del principio de superposición es que, cuando es válido, permite analizar un movimiento ondulatorio complicado como una combinación de ondas sencillas. De hecho, como el matemático francés J. Fourier (1768-1830) pudo demostrar que, para construir la forma más general de una onda periódica sólo necesitamos ondas armónicas simples. Fourier demostró que cualquier movimiento periódico de una partícula puede ser representado como una combinación de movimientos armónicos simples. Por ejemplo, si $y(x)$ representa la forma de onda (en un tiempo en particular) de una fuente de ondas que tengan una longitud de onda λ, podemos analizar a $y(x)$ como sigue:

$$y(x) = A_0 + A_1 \operatorname{sen} kx + A_2 \operatorname{sen} 2kx + A_3 \operatorname{sen} 3kx + \cdots + B_1 \cos kx + B_2 \cos 2kx + B_3 \cos 3kx + \cdots, \quad (31)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$. Esta expresión se conoce como serie de Fourier. Los coeficientes A_i y B_i tienen valores definidos para cualquier movimiento periódico $y(x)$ en particular. Por ejemplo, la llamada onda de diente de sierra de la figura 15 puede escribirse

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} kx - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2kx - \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen} 3kx - \cdots.$$

Si el movimiento no es periódico, como en el caso de una pulsación, la suma se sustituye por una integral: la integral de Fourier. De aquí que cualquier movimiento (pulsado o continuo) de una fuente de ondas pueda ser representado en términos de una superposición de movimientos armónicos simples, y que cualquier forma de onda así generada pueda ser analizada como una combinación de componentes que son, por separado, ondas armónicas simples. Esto ilustra una vez más la importancia del movimiento armónico y de las ondas armónicas.

La forma de onda mantendrá su forma únicamente al viajar en un medio no dispersivo. En un medio dispersivo, las formas de onda de las ondas sinusoidales componentes no cambian, pero cada una de ellas puede viajar con una velocidad diferente. En este caso, la forma de la onda combinada cambia al alterarse la relación de fase entre las componentes. La onda puede también cambiar de forma si cede energía mecánica al medio, tal como por la resistencia del aire, la viscosidad, o la fricción interna. Tales fuerzas disipativas dependen a menudo de la velocidad, y así las componentes de Fourier más fuertemente afectadas son aquellas con velocidades más elevadas de la partícula (es decir, aquellas con frecuencias altas, de acuerdo con la ecuación 20, donde se ve que u depende de ω). Aquí, una vez más, la forma de onda puede cambiar, al perder amplitud más rápidamente las componentes con frecuencias más altas. Un ejemplo de este fenómeno es el debilitamiento con el tiempo del sonido de las cuerdas del piano. El movimiento vibratorio de una cuerda de piano, inmediatamente después de haber sido percutida por el martillo, incluye una amplia gama de frecuencias, las cuales le dan su tono característico. Las componentes de más alta frecuencia de este movimiento complejo disipan su energía más rápidamente que las componentes de frecuencia más baja, por lo que el carácter de duración de un tono puede cambiar con el tiempo. ■

19-8 INTERFERENCIA DE ONDAS

Cuando dos o más ondas se combinan en un punto determinado, se dice que *interfieren*, y el fenómeno se conoce como *interferencia*. Como veremos, la forma de onda resultante depende fuertemente de las fases relativas de las ondas que interfieren. La figura 16 muestra un ejemplo de interferencia de ondas.

Consideremos en primer lugar dos ondas sinusoidales transversales de igual amplitud y longitud de onda, que viajan en dirección x con la misma velocidad. Hagamos que la constante de fase de una onda sea ϕ, mientras que la de la otra es $\phi = 0$. La figura 17 muestra la forma de onda combinada en un tiempo para los dos casos de ϕ cercano a 0° (las ondas están prácticamente en fase) y de ϕ cercano a 180° (las ondas están prácticamente fuera de fase). Simplemente sumando los desplazamientos individuales en cada x puede verse que en el primer caso existe un refuerzo casi completo de las dos ondas y la resultante tiene casi el doble de la amplitud de sus componentes individuales, mientras que en el segundo caso existe una cancelación casi completa en cada punto y la

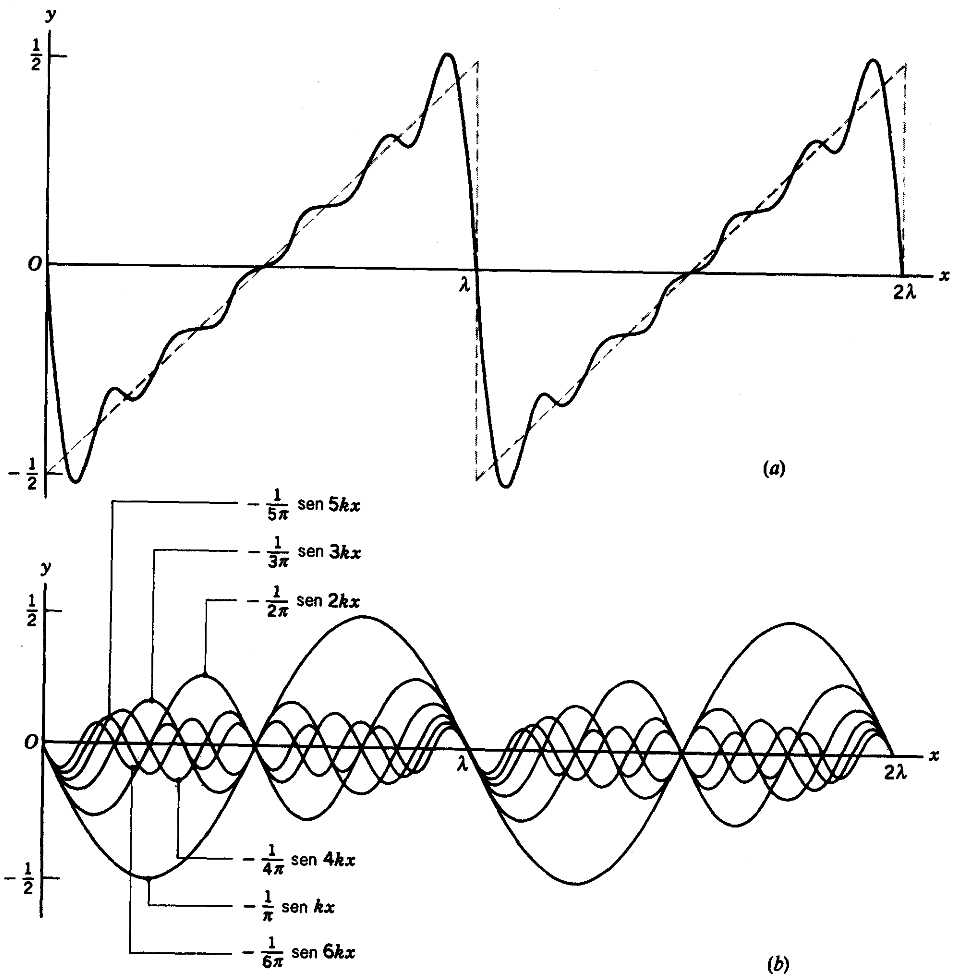

Figura 15 (*a*) La línea punteada es una onda de diente de sierra muy común en electrónica. Puede representarse por medio de una serie de Fourier de ondas seno. (*b*) Se muestran las primeras seis ondas seno de la serie de Fourier que representan a la onda de diente de sierra, y su suma se muestra en la parte (*a*) por medio de una curva de línea continua. Al incluir más términos, la serie de Fourier resulta una mejor aproximación de la onda.

amplitud resultante está cerca de cero. Estos casos se conocen, respectivamente, como interferencia *constructiva* e interferencia *destructiva*.

Veamos cómo surge la interferencia de las ecuaciones de las ondas. Consideremos un caso general en el que las dos ondas tengan constantes de fase ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente. Las ecuaciones de las dos ondas son

$$y_1(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi_1) \qquad (32)$$

y

$$y_2(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi_2). \qquad (33)$$

Hallemos ahora la onda resultante. Usando el principio de superposición, tomamos la suma de las ecuaciones 32 y 33, lo cual da

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m[\text{sen } (kx - \omega t - \phi_1) \\ &\quad + \text{sen } (kx - \omega t - \phi_2)]. \end{aligned} \qquad (34)$$

Partiendo de la identidad trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos,

$$\text{sen } B + \text{sen } C = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2}(B - C), \qquad (35)$$

obtenemos, después de cierto manejo,

$$y(x,t) = [2y_m \cos (\Delta\phi/2)] \text{ sen } (kx - \omega t - \phi'), \qquad (36)$$

donde $\phi' = (\phi_1 + \phi_2)/2$. La cantidad= $\Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1)$ se llama *diferencia de fase* entre las dos ondas.

Esta onda resultante corresponde a una nueva onda que tiene la misma frecuencia pero una amplitud $2y_m|\cos(\Delta\phi/2)|$. Si $\Delta\phi$ es muy pequeño (comparado con 180°), la amplitud resultante es casi $2y_m$ (como se muestra en la Fig. 17*a*). Cuando $\Delta\phi$ es cero, las dos ondas tienen la misma fase en cualquier parte. La cresta de una cae sobre la cresta de la otra y de igual modo los valles, lo cual da una interferencia constructiva total. La amplitud resultante es precisamente del doble de la de cualquier onda aislada. Si, en cambio, $\Delta\phi$ está cerca de 180°, la amplitud resultante es de casi cero (como se muestra en la figura 17*b*). Cuando $\Delta\phi$ es exactamente 180°, la cresta de una onda cae exactamente sobre el valle de la otra. La amplitud resultante es cero, correpondiente a la interferencia destructiva total.

Obsérvese que la ecuación 36 tiene siempre la forma de una onda sinusoidal. Así, al sumar dos ondas seno de la misma longitud de onda y amplitud se obtiene siempre una onda seno de longitud de onda idéntica. Podemos

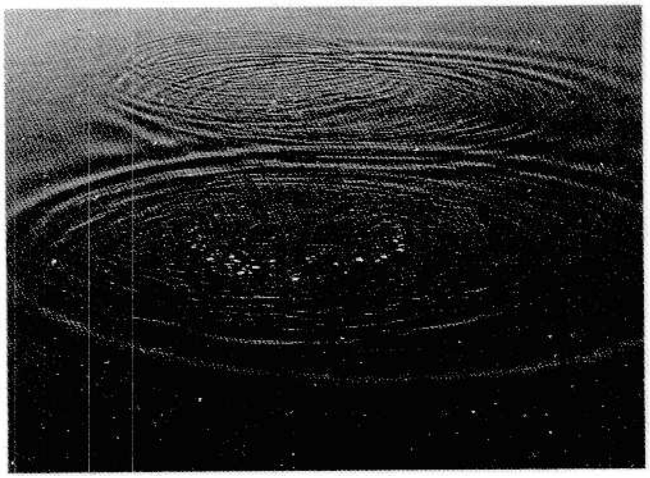

Figura 16 Dos trenes de ondas, en este caso rizos circulares de dos perturbaciones diferentes, interfieren al superponerse en puntos particulares. El desplazamiento en cualquier punto es la superposición de los desplazamientos por separado debidos a cada una de las dos ondas.

también sumar componentes que tengan la misma longitud de onda pero amplitudes diferentes. En este caso, la resultante es nuevamente una onda seno con idéntica longitud de onda, pero la amplitud resultante no tiene la forma simple dada por la ecuación 36. Si las amplitudes individuales son y_{1m} y y_{2m}, y, por lo tanto, las ondas están en fase ($\Delta\phi = 0$) la amplitud resultante es $y_{1m} + y_{2m}$ (Fig. 18), mientras que si están fuera de fase ($\phi = 180°$), la amplitud resultante es $|y_{1m} - y_{2m}|$. En este caso, no puede existir una interferencia destructiva completa, aunque exista una interferencia destructiva parcial.

La figura 19 muestra un ejemplo de la presencia de los efectos de interferencia. Los altoparlantes funcionan por una misma fuente. En puntos equidistantes de las bocinas (sobre la línea *AB*, la cual representa a todo el plano medio), existe interferencia constructiva completa si las bocinas se accionan en fase ($\Delta\phi = 0$). Existen también otros puntos *P* a donde las ondas llegan en fase e interfieren constructivamente. Es decir, se puede desplazar una de las ondas de la figura 18 en una constante de fase de cualquier múltiplo entero de 2π (o en una distancia de cualquier número entero de longitudes de onda), y la forma de la onda combinada no cambia. Estos otros puntos de interferencia constructiva se localizan siempre donde la diferencia de la distancia desde las dos bocinas es un número entero de longitudes de onda:

$$|x_1 - x_2| = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots . \qquad (37)$$

En otros puntos *P*, las distancias diferentes x_1 y x_2 dan por resultado ondas que posiblemente lleguen a *P* fuera de fase, aunque hayan incluso comenzado en fase al salir de las bocinas. El entorno que constituye al auditorio podría, por lo tanto, tener "puntos muertos" en los que

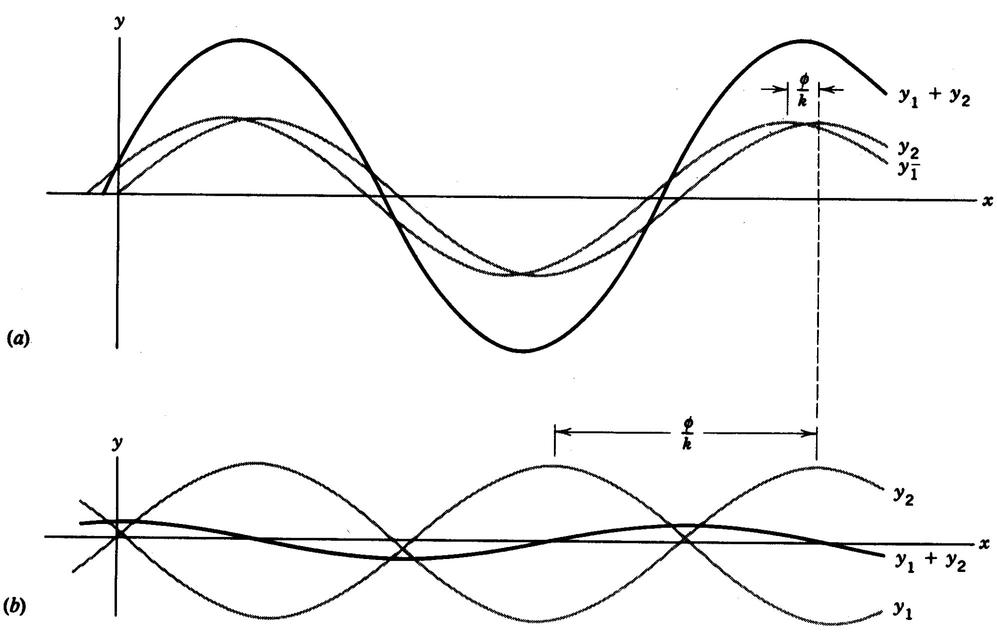

Figura 17 (*a*) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén prácticamente en fase da por resultado una onda de casi el doble de la amplitud de cualquiera de las componentes. (*b*) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén casi a 180° fuera de fase da por resultado una onda cuya amplitud es prácticamente cero. Nótese que la longitud de onda de la resultante no cambia en ninguno de los casos.

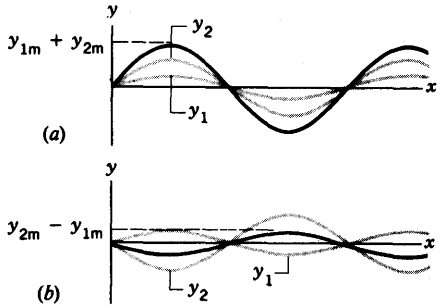

Figura 18 Suma de dos ondas de la misma longitud de onda y fase pero de diferentes amplitudes (líneas de menor intensidad) da una resultante de la misma longitud de onda y fase. (*a*) Las amplitudes se suman si las ondas están en fase, y (*b*) se restan si las ondas están 180° fuera de fase.

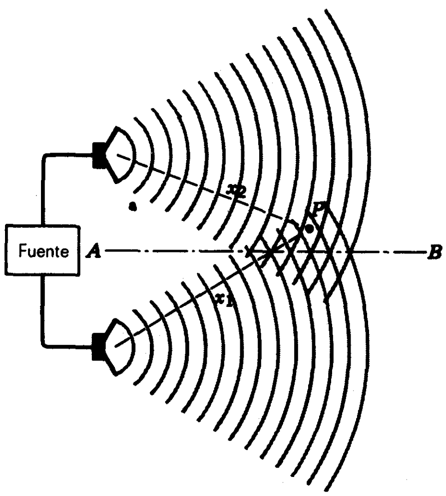

Figura 19 Dos altoparlantes, accionados por una fuente común, envían señales al punto *P*, donde éstas se interfieren.

existe interferencia destructiva parcial o completa para una longitud de onda λ en particular. La interferencia destructiva máxima se presenta en los puntos en que

$$|x_1 - x_2| = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \ldots, \qquad (38)$$

correspondientes a una diferencia de fase de 180°, 540°, 900°, y así sucesivamente.

Por supuesto, si las bocinas emiten una mezcla de muchas longitudes de onda diferentes, ciertos puntos *P* podrían mostrar una interferencia destructiva para una longitud de onda y una interferencia constructiva para otra. El factor crítico en la determinación de las posiciones de los máximos y mínimos de la intensidad del sonido es la *diferencia de trayectoria* $|x_1 - x_2|$. En los puntos que no estén en el plano medio representado por la línea *AB*, las dos componentes llegan con amplitudes diferentes (porque las distancias desde las bocinas no son las mismas; véase el problema muestra 3). No existirá entonces una interferencia destructiva completa. (En ciertas geometrías es posible que el sonido irradiado por la *parte trasera* de una bocina interfiera con el sonido irradiado por la parte frontal. Estas dos ondas están a 180° fuera de fase, y su interferencia puede reducir la intensidad del sonido en lugares frente a la bocina. Se han diseñado cajas de bocinas que eliminan este efecto.)

Problema muestra 4 Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda e interfieren entre sí. Las ondas tienen la misma longitud de onda y viajan con la misma velocidad. La amplitud de cada onda es de 9.7 mm, y existe una diferencia de fase de 110° entre ellas. (*a*) ¿Cuál es la amplitud de la onda combinada que resulta de la interferencia de las dos ondas? (*b*) ¿A qué valor se debería cambiar la diferencia de fase de modo que la onda combinada tenga una amplitud igual a la de una de las ondas originales?

Solución (*a*) La amplitud de la onda combinada se dio en la ecuación 36:

$$2y_m|\cos(\Delta\phi/2)| = 2(9.7\text{ mm})|\cos(110°/2)| = 11.1\text{ mm}.$$

(*b*) Si la cantidad $2y_m |\cos(\Delta\phi/2|$ ha de ser igual a y_m, entonces debemos tener que

$$2|\cos(\Delta\phi/2)| = 1,$$

o sea

$$\Delta\phi = 2\cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = 120° \quad \text{or} \quad -120°.$$

Cualquier onda puede ir delante de la otra por 120° (más o menos cualquier múltiplo entero de 360°) para producir la onda combinada deseada.

Problema muestra 5 En la geometría de la figura 19, un oyente está sentado en un punto a una distancia de 1.2 m directamente enfrente de una bocina. Las dos bocinas, separadas por una distancia *D* de 2.3 m, emiten tonos puros de longitud de onda λ. Las ondas están en fase al salir de las bocinas. ¿Para qué longitudes de onda oirá el oyente un mínimo de intensidad del sonido?

Solución De acuerdo con los criterios de la ecuación 38, la intensidad mínima de sonido ocurre cuando las ondas de las dos bocinas se interfieren destructivamente. Si el oyente está sentado enfrente de la bocina 2, entonces x_2 = 1.2 m, y x_1 puede hallarse a partir de la fórmula pitagórica,

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + D^2} = \sqrt{(1.2\text{ m})^2 + (2.3\text{ m})^2} = 2.6\text{ m}.$$

Así, $x_1 - x_2$ = 2.6 m - 1.2 m = 1.4 m, y, de acuerdo con la ecuación 38, tenemos que

$$1.4\text{ m} = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots,$$

que corresponde a

$$\lambda = 2.8\text{ m}, 0.93\text{ m}, 0.56\text{ m}, \ldots.$$

No ocurrirá una interferencia destructiva completa en esta posición, porque las dos ondas que llegan al punto de observación tienen amplitudes diferentes, siempre y cuando salgan de las bocinas con amplitudes iguales.

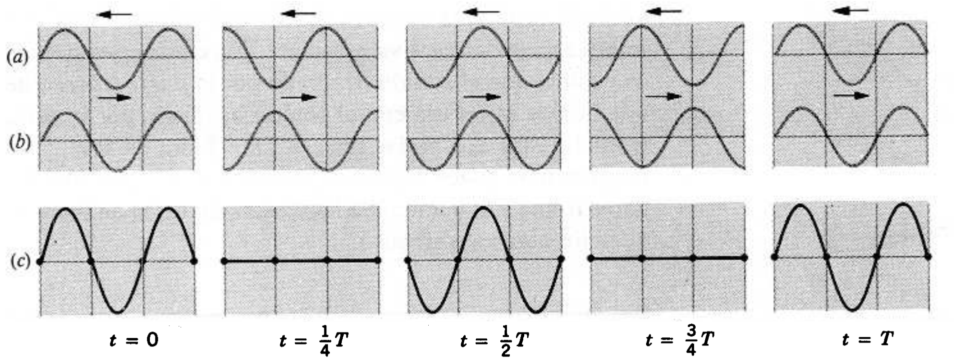

Figura 20 (*a*, *b*) Dos ondas viajeras de la misma longitud de onda y amplitud, se mueven en direcciones opuestas. (*c*) La superposición de las dos ondas en instantes de tiempo diferentes. Los nodos del patrón de onda estacionaria se hallan indicados por puntos gruesos. Nótese que las ondas viajeras no tienen nodos.

19-9 ONDAS ESTACIONARIAS

En la sección anterior considerábamos el efecto de superponer dos ondas componentes de igual amplitud y frecuencia que se mueven en la misma dirección en una cuerda. ¿Cuál es el efecto cuando las ondas se mueven a lo largo de la cuerda en direcciones *opuestas*?

La figura 20 es una indicación gráfica del efecto de sumar las formas de onda componentes para obtener la resultante. En la figura se muestran dos ondas viajeras, una moviéndose hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. Se muestran "instantáneas" de las dos ondas componentes y su resultante en intervalos de $\frac{1}{4}$ de periodo.

De esta superposición resulta una característica particular: existen ciertos puntos a lo largo de la cuerda, llamados *nodos*, en los cuales el desplazamiento es nulo *en todo momento*. (La figura 18 muestra también ciertos puntos en los que la resultante tenía un desplazamiento nulo, pero esa figura representaba una instantánea de las ondas viajeras *en un momento particular*. Si tomásemos otra instantánea un momento más tarde, hallaríamos que aquellos puntos ya no tienen desplazamiento nulo, porque la onda está viajando. En la figura 20*c*, los ceros permanecen como ceros en todo momento.) Entre los nodos se hallan los *antinodos*, donde el desplazamiento oscila con la amplitud más grande. Tal patrón de nodos y antinodos se denomina *onda estacionaria*.

Para analizar matemáticamente a la onda estacionaria, representemos a las dos ondas por

$$y_1(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t),$$
$$y_2(x,t) = y_m \text{ sen } (kx + \omega t).$$

De aquí que la resultante se pueda expresar como:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m \text{ sen } (kx - \omega t) + y_m \text{ sen } (kx + \omega t) \end{aligned} \tag{39}$$

o, haciendo uso de la relación trigonométrica de la ecuación 35,

$$y(x,t) = [2y_m \text{ sen } kx] \cos \omega t. \tag{40}$$

La ecuación 40 es la ecuación de una onda estacionaria. No puede representar a una onda viajera, porque *x* y *t* *no* aparecen en la combinación $x - vt$ o $x + vt$ exigida por una onda viajera.

Nótese que una partícula en cualquier posición *x* determinada ejecuta un movimiento armónico simple en el transcurso del tiempo, y que todas las partículas vibran con la misma frecuencia angular ω. En una onda viajera cada partícula de la cuerda vibra con la misma amplitud. Sin embargo, en una onda estacionaria, *la amplitud no es la misma para todas las partículas sino que varía con la posición x de la partícula*. De hecho, la amplitud $|2y_m \text{ sen } kx|$, tiene un valor *máximo* de $2y_m$ en las posiciones donde

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots . \tag{41}$$

Estos puntos son los antinodos y están separados por $\frac{1}{2}$ de longitud de onda. La amplitud tiene un valor *mínimo* de cero en las posiciones donde

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots . \tag{42}$$

Estos puntos son los nodos y están también separados por $\frac{1}{2}$ de longitud de onda. La separación entre un nodo y un antinodo adyacente es de $\frac{1}{4}$ de longitud de onda.

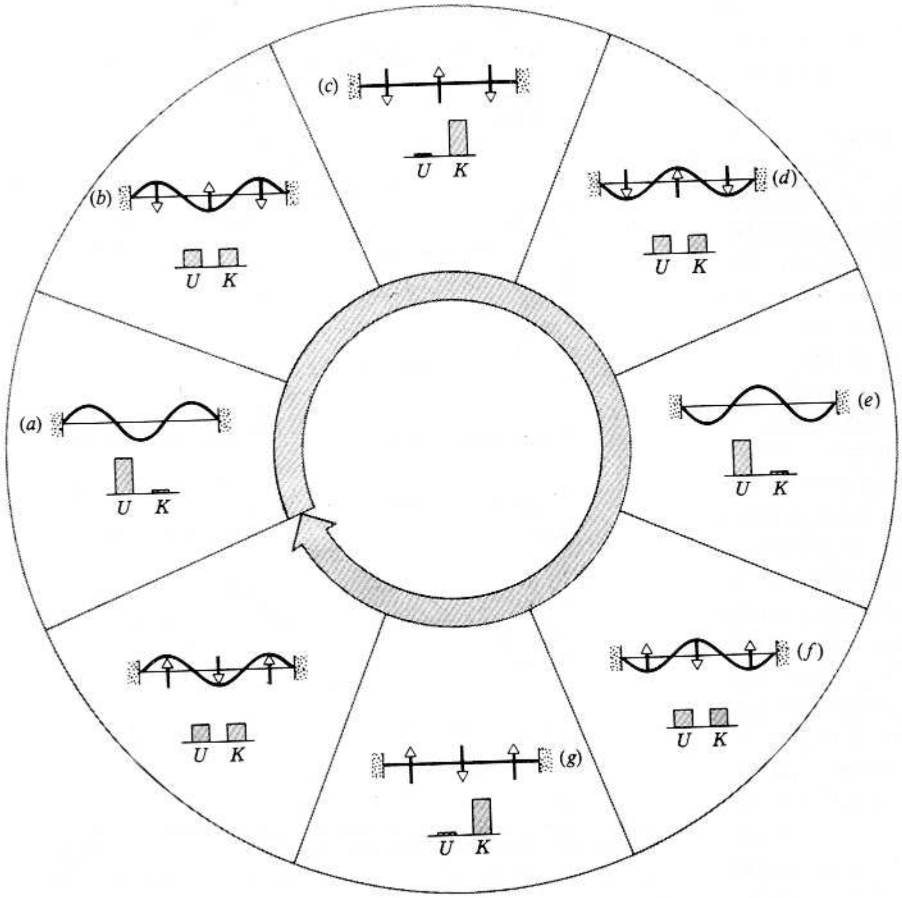

Figura 21 Onda estacionaria en una cuerda tensa que muestra un ciclo de oscilación. En (*a*) la cuerda está momentáneamente en reposo con los antinodos en su desplazamiento máximo. La energía de la cuerda es energía potencial elástica totalmente. (*b*) Un octavo de ciclo más tarde, el desplazamiento se reduce y la energía es parcialmente potencial y parcialmente cinética. Los vectores muestran las velocidades instantáneas de las partículas de la cuerda en ciertas posiciones. (*c*) El deplazamiento es cero; no existe energía potencial, y la energía cinética es máxima. Las partículas de la cuerda tienen sus velocidades máximas. (*d* - *h*) El movimiento continúa a través del resto del ciclo, transformándose continuamente la energía en las formas cinética y potencial.

Está claro que no se transporta energía a lo largo de la cuerda hacia la derecha o hacia la izquierda, ya que la energía no puede fluir más allá de los nodos de la cuerda, los cuales están permanentemente en reposo. De aquí que la energía permanezca "estacionaria" en la cuerda, si bien alterna entre energía cinética vibratoria y energía potencial elástica. Cuando los antinodos están todos en sus desplazamientos máximos, la energía se almacena enteramente como energía potencial, en especial como una energía potencial elástica asociada al estiramiento de la cuerda. Cuando todas las partes de la cuerda pasan simultáneamente por la posición de equilibrio (como en la segunda y cuarta instantáneas de la Fig. 20), la energía se almacena enteramente como energía cinética. La figura 21 muestra una descripción más detallada de la transformación de la energía entre las formas potencial y cinética durante un ciclo de oscilación. Compárese la figura 21 con la figura 6 del capítulo 8 para el sistema oscilatorio bloque-resorte. ¿En qué se parecen estos sistemas?

Podemos considerar de igual manera al movimiento como una oscilación de la cuerda como un todo, experimentando cada partícula un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω y con una amplitud que depende de su posición. Cada pequeña parte de la cuerda tiene inercia y elasticidad, y la cuerda en su conjunto puede verse como una colección de osciladores acoplados. De aquí que la cuerda vibratoria sea lo mismo en principio que el sistema bloque-resorte, excepto que el sistema bloque-resorte tiene únicamente una frecuencia natural, y la cuerda vibratoria tiene un gran número de frecuencias naturales (véase la sección 19-10).

Una manera fácil de conseguir una onda estacionaria consiste en superponer a una onda que viaje por una cuerda con su onda reflejada que viaje en la dirección opuesta. Consideremos ahora más detenidamente el proceso de reflexión de una onda. Supongamos una pulsación que viaje por una cuerda tensa que está fija en un extremo, como se muestra en la figura 22*a*. Cuando la pulsación llega a ese extremo, ejerce una fuerza hacia arriba sobre el apoyo. El apoyo es rígido, sin embargo, y no se mueve. Según la tercera ley de Newton, el apoyo ejerce una fuerza igual sobre la cuerda pero directamente opuesta. Esta fuerza de reacción genera una pulsación en el apoyo, el cual viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Decimos que la pulsación incidente ha sido *reflejada* en el punto extremo fijo de la cuerda. Nótese que la pulsación reflejada regresa con su desplazamiento transversal invertido. Si un tren de ondas es incidente en el punto extremo fijo, se genera un tren de ondas reflejado en ese punto de la misma manera. El desplazamiento de cualquier punto a lo largo de la cuerda es la suma de los desplazamientos causados por las ondas incidente y reflejada. Puesto que el punto extremo está fijo, estas dos ondas deben interferir entre sí siempre destructivamente en ese punto, de modo que el desplazamiento será nulo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre 180° fuera de fase con la onda incidente en un extremo fijo. *Al reflejarse en un extremo fijo, una onda transversal experimenta un cambio de fase de 180°.*

En la figura 22*b* se representa la reflexión de una pulsación en un extremo libre de una cuerda tensa, es decir, en el extremo que tiene libertad de moverse transversalmente. El extremo de la cuerda está unido a un aro muy ligero que puede deslizarse libremente sin fricción a lo largo de una barra transversal. Cuando la pulsación llega al extremo libre, ejerce una fuerza sobre el elemento de la cuerda allí situado. Este elemento se acelera, y (como en el caso de un péndulo) su movimiento lo lleva más allá del punto de equilibrio; se "pasa de largo" y ejerce una fuerza de reacción sobre la cuerda. Esto genera una pulsación que viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Una vez más tenemos una reflexión, pero ahora en un extremo libre. El extremo libre sufrirá obviamente el desplazamiento máximo de las partículas de la cuerda; un tren de ondas incidente y otro reflejado deben interferir constructivamente en ese punto si han de tener un máximo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre en fase con la onda incidente en ese punto. *En un extremo libre, una onda transversal se refleja sin cambiar de fase.*

La figura 23 muestra exposiciones de tiempo de los patrones de onda estacionaria que pueden obtenerse al sacudir una cuerda tensa que esté fija en un extremo.

Hasta ahora hemos supuesto que la onda se refleja en el extremo sin pérdida de intensidad. En la práctica encontramos que existe siempre una reflexión parcial y una transmisión parcial en cualquier frontera entre dos medios; por ejemplo, si observamos un trozo de vidrio de ventana ordinario, podemos ver que parte de la luz se refleja de regreso hacia uno y parte se transmite a través del vidrio. Podemos demostrar este efecto con ondas transversales en cuerdas amarrando juntas dos cuerdas de densidades de masa diferentes. Cuando una onda que viaja a lo largo de las cuerdas llega al punto en que las cuerdas están unidas, parte de la energía de la onda se transmite a la otra cuerda y parte se refleja de regreso. La amplitud de la onda reflejada es menor que la amplitud de la onda incidente original, porque la onda transmitida a la segunda cuerda transporta parte de la energía incidente.

Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa mayor que la primera, la onda reflejada de regreso hacia la primera cuerda sufre aún un cambio de fase de 180° al ser

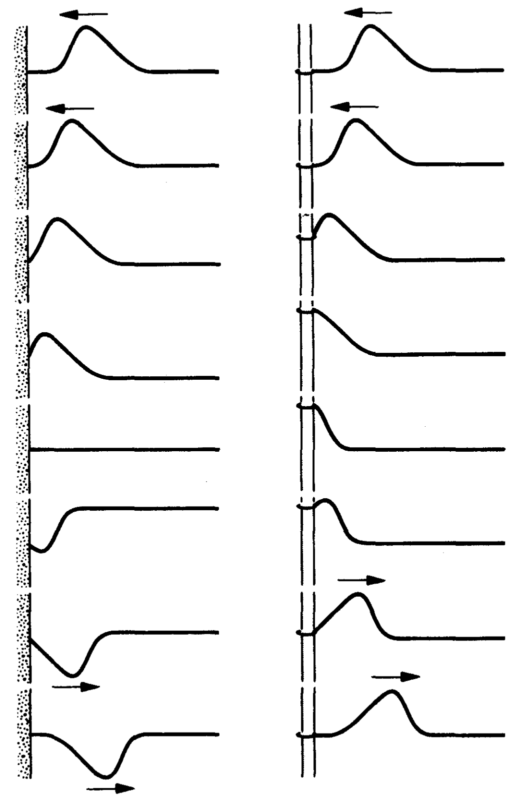

Figura 22 (*a*) Una pulsación transversal incidente desde la derecha se refleja por una pared rígida. Nótese que la fase de la pulsación reflejada se invierte o se cambia en 180°. (*b*) Aquí el extremo de la cuerda puede moverse con libertad, estando unida la cuerda a un aro que puede deslizarse libremente a lo largo de la barra. La fase de la pulsación reflejada no cambia.

reflejada. Pero a causa de que su amplitud es menor que la de la onda incidente, el punto frontera no es un nodo y se mueve. Ocurre así una transferencia neta de energía a lo largo de la primera cuerda hacia la segunda. Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa menor que la primera, ocurre una reflexión parcial sin cambio de fase, pero una vez más se transmite energía hacia la segunda cuerda. En la práctica, la mejor manera de comprobar un "extremo libre" en una cuerda consiste en amarrarla a otra cuerda larga y mucho más ligera. La energía transmitida es despreciable, y la segunda cuerda sirve para mantener la tensión en la primera.

Nótese que la onda transmitida viaja con una velocidad diferente de la de las ondas incidente y reflejada. La velocidad de la onda está determinada por la relación $v = \sqrt{F/\mu}$; la tensión es la misma en ambas cuerdas, pero sus densidades son diferentes. De aquí que la onda viaje más lentamente en la cuerda más densa. La frecuencia de la onda transmitida es la misma que la de las ondas incidente y reflejada. (Si no fuera esto así, existiría una

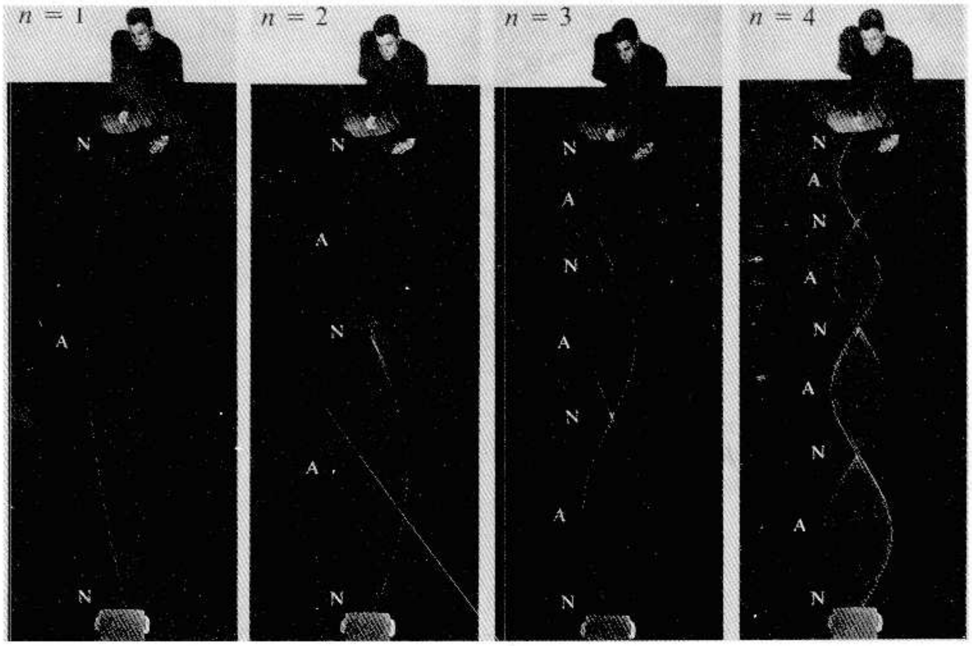

Figura 23 Un estudiante sacude una cuerda tensa (en realidad un tubo de hule) a cuatro frecuencias resonantes, produciendo cuatro patrones diferentes de ondas estacionarias.

discontinuidad en el punto en que las cuerdas están unidas.) Las ondas, que tienen la misma frecuencia pero viajan con velocidades diferentes, tienen longitudes de onda diferentes. Partiendo de la relación $\lambda = v/\nu$, concluimos que la longitud de onda es más corta en la cuerda más densa, donde v es más pequeña. Este fenómeno de cambio de longitud de onda al pasar la onda de un medio a otro lo encontraremos con frecuencia en nuestro estudio de las ondas de luz. También se presenta en las ondas de sonido: una cuerda, como la de una guitarra, vibra con cierta frecuencia y cierta longitud de onda; la onda transmitida al aire tiene la misma frecuencia que la de la cuerda, pero una longitud de onda diferente, debido a que la velocidad de las ondas de la cuerda difiere de su velocidad en el aire.

19-10 RESONANCIA

Veamos de nuevo los patrones de la onda estacionaria de la figura 23. Podemos ver que pueden presentarse cuatro ondas estacionarias diferentes. El espaciamiento entre los nodos difiere en los cuatro patrones, y puesto que la longitud de onda es el doble de la distancia entre nodos adyacentes, la longitud de onda difiere también. Por otra parte, la velocidad de fase es la misma en las cuatro situaciones, estando determinada únicamente por la tensión de la cuerda. La relación $v = \lambda\nu$ nos dice entonces que si v es constante y λ cambia, la frecuencia ν debe ser ciertamente diferente para las diferentes ondas estacionarias. En las fotografías, el estudiante debe estar por lo tanto sacudiendo la cuerda a ciertas frecuencias diferentes pero bien definidas.

Las fotos de la figura 23 parecen mostrar un sistema con nodos en ambos extremos. (Si el estudiante está sacudiendo la cuerda en un extremo, lo hace con una amplitud muy pequeña de modo que el extremo sea aproximadamente un nodo.) El espaciamiento entre nodos es siempre de la mitad de la longitud de onda, de modo que la condición para que en la cuerda se produzca una onda estacionaria es que la longitud L de la cuerda sea igual a un número entero n de medias longitudes de onda:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1,2,3, \ldots)$$

o bien

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1,2,3, \ldots). \tag{43}$$

En términos de la frecuencia, podemos escribir la ecuación 43 como:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \qquad (n = 1,2,3, \ldots). \tag{44}$$

Es decir, el estudiante debe sacudir la cuerda a estas frecuencias particulares (correspondiendo a n = 1, 2, 3, y 4) para producir las ondas estacionarias.

Podemos considerar que las frecuencias de la ecuación 44 son las *frecuencias naturales* del sistema oscilatorio (la cuerda). Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora (la mano del estudiante) concuerda con las frecuencias naturales permitidas, se produce una onda estacionaria y el sistema comienza a moverse con una gran amplitud. Ésta es la condición de *resonancia* que estudiamos anteriormente en la sección 15-9.

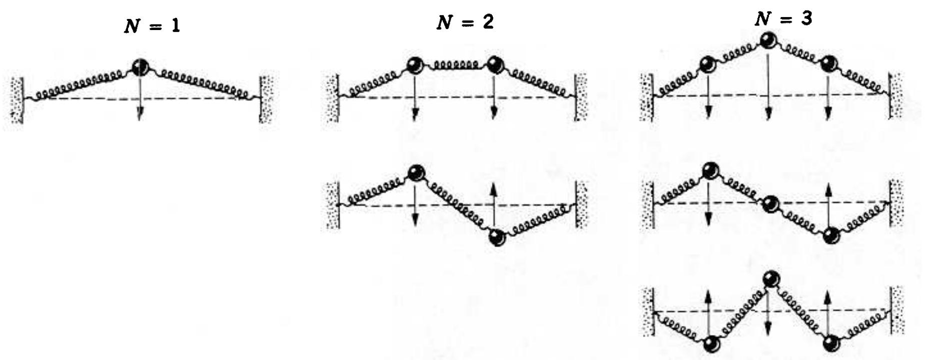

Figura 24 Algunos patrones de oscilación de un oscilador que tiene elementos concentrados, estando conectados los cuerpos oscilatorios en este caso mediante resortes de masa despreciable. Cada patrón de movimiento diferente tiene una frecuencia natural diferente, siendo el número de frecuencias naturales igual al número de cuerpos oscilatorios.

Un bloque colgado de un resorte es también capaz de resonar, pero únicamente a una sola frecuencia. ¿Por qué entonces tiene la cuerda tensa un número infinito de frecuencias resonantes? En el sistema bloque-resorte la inercia (el bloque) está concentrada ("amontonada") en una parte del sistema mientras que la elasticidad (el resorte) está concentrada en otra. Se dice que tal sistema resonante tiene elementos *concentrados*. Por otra parte, se dice que la cuerda tensa tiene elementos *distribuidos*, porque cada parte de la cuerda tiene propiedades tanto inerciales como elásticas. Son muchas las formas posibles en que la cuerda puede almacenar sus energías cinética y potencial, en contraste con sólo una única manera en el sistema bloque-resorte. Un sistema concentrado de N objetos tiene N frecuencias naturales, cada una de las cuales corresponde a un patrón de oscilación diferente (Fig. 24). El límite cuando N tiende al infinito nos conduce al sistema completamente distribuido de la cuerda tensa, con su número infinito de frecuencias resonantes.

Si la cuerda vibratoria de la figura 23 se pusiera en movimiento y luego se dejara sola, las vibraciones desaparecerían en forma gradual. El movimiento de la cuerda está amortiguado por la disipación de energía a través de los soportes en los extremos y por la resistencia del aire al movimiento. Para mantener la vibración, el estudiante debe suministrar cierta energía al sistema aplicando una fuerza impulsora. Cuando la frecuencia impulsora es muy diferente a la de las frecuencias resonantes, la onda reflejada hace que la cuerda efectúe un trabajo sobre la mano del estudiante; de esta manera, la cuerda pierde energía, a lo que hay que añadir la pérdida por amortiguamiento. En la resonancia, el movimiento de la mano del estudiante está en fase con el de la cuerda, y la cuerda no pierde energía a causa del trabajo efectuado sobre la mano del estudiante. Toda la energía suministrada por el estudiante, menos la pérdida por amortiguamiento, se almacena en la oscilación, y el resultado es un movimiento de una gran amplitud. Finalmente, se llega a una situación estable en la que la energía suministrada por la fuerza impulsora equilibra exactamente las pérdidas debidas al amortiguamiento.

Este movimiento es análogo al del oscilador armónico amortiguado que hemos estudiado en la sección 15-9. La frecuencia resonante es casi, pero no exactamente, una frecuencia natural de la cuerda. Los nodos aparentes no son verdaderos nodos, porque la energía debe estar fluyendo por ellos a lo largo de la cuerda para compensar las pérdidas debidas al amortiguamiento. Si no existiera un amortiguamiento, la frecuencia resonante sería exactamente una frecuencia natural, y la amplitud aumentaría sin límite al continuar siendo suministrada energía a la cuerda. Finalmente, se excedería el límite elástico y la cuerda se rompería. (El límite elástico puede excederse aunque haya amortiguamiento presente, como se mostró en la figura 21 del capítulo 15.)

Si el estudiante sacude la cuerda con una frecuencia que difiera de una de las frecuencias naturales del sistema, la onda reflejada regresa a la mano del estudiante fuera de fase con el movimiento de la mano. En este caso, la cuerda efectúa un trabajo sobre la mano, en adición al que la mano efectúa sobre la cuerda. No se produce ningún patrón fijo de onda estacionaria. La amplitud del movimiento resultante es pequeña y no muy diferente a la del movimiento de la mano del estudiante. Esta situación es análoga al movimiento errático de un columpio que sea impulsado con una frecuencia diferente a la natural; el desplazamiento resultante del columpio es bastante pequeño.

En la resonancia, la cuerda absorbe tanta energía como puede de la mano del estudiante. Esto sucede así en todo sistema vibratorio. Al sintonizar un aparato de radio, la frecuencia natural de un circuito electrónico se cambia hasta que concuerda con una frecuencia particular de las ondas de radio que estén siendo transmitidas por la estación. En ese momento el circuito resuena con la señal y absorbe tanta energía de la señal como puede. Otras condiciones de resonancia similares se presentan en el sonido, el electromagnetismo, la óptica, y las físicas atómica y nuclear.

En el capítulo siguiente consideraremos con mayor detalle la importancia de la resonancia para entender las propiedades de diferentes instrumentos musicales y la manera en que se producen sus sonidos característicos. Si bien en esta sección hemos utilizado una cuerda vibrante como ejemplo de un sistema vibratorio, los principios estudiados aquí se aplican a todos los sistemas vibratorios que puedan mantener un movimiento ondulatorio.

Problema muestra 6 En el arreglo de la figura 25, un vibrador pone en movimiento a la cuerda con una frecuencia de 120 Hz. La cuerda tiene una longitud de L = 1.2 m, y su densidad de masa lineal es de 1.6 g/m. ¿A qué valor debe ajustarse la tensión (aumentando el peso colgante) para obtener el patrón de movimiento de cuatro rizos?

Solución Para hallar la tensión, podemos sustituir a la ecuación 18 por la ecuación 44 y obtener

$$F = \frac{4L^2\nu^2\mu}{n^2}.$$

Se encuentra que la tensión correspondiente a n = 4 (para cuatro rizos) es

$$F = \frac{4(1.2\text{ m})^2(120\text{ Hz})^2(0.0016\text{ kg/m})}{4^2} = 8.3\text{ N}.$$

Esto corresponde a un peso colgante de unas 2 lb.

Problema muestra 7 Una cuerda de violín sintonizada en la nota *la* (440 Hz) tiene una longitud de 0.34 m. (*a*) ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más largas de las resonancias de la cuerda? (*b*) ¿Cuáles son las longitudes de onda correspondientes que llegan al oído del oyente?

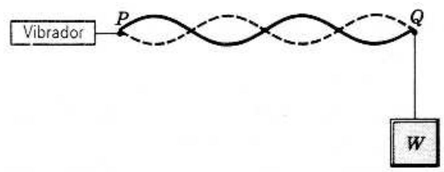

Figura 25 Problema muestra 6. Una cuerda sometida a tensión está conectada a un vibrador. A una frecuencia fija del vibrador, los patrones de la onda estacionaria ocurrirán para ciertos valores discretos de la tensión en la cuerda.

Solución (*a*) Las longitudes de onda resonantes de una cuerda de longitud L = 0.34 m pueden hallarse directamente de la ecuación 43:

$$\lambda_1 = 2L/1 = 2(0.34\text{ m}) = 0.68\text{ m},$$
$$\lambda_2 = 2L/2 = 0.34\text{ m},$$
$$\lambda_3 = 2L/3 = 0.23\text{ m}.$$

(*b*) Cuando una onda pasa de un medio (la cuerda) a otro (el aire) de velocidad de onda diferente, la frecuencia permanece igual, pero la longitud de onda cambia. La ecuación 19 da la relación entre las longitudes de onda. Para hallar la velocidad de onda de la cuerda, observamos que en el modo resonante más bajo ν = 440 Hz y λ = 0.68 m, de modo que

$$v = \nu\lambda = (440\text{ Hz})(0.68\text{ m}) = 299\text{ m/s}.$$

En el aire, la velocidad de la onda es de 343 m/s, y partiendo de la ecuación 19 obtenemos

$$\lambda_{\text{aire}} = \lambda_{\text{cuerda}}\frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{cuerda}}} = \lambda_{\text{cuerda}}\frac{343\text{ m/s}}{299\text{ m/s}} = 1.15\lambda_{\text{cuerda}}.$$

Entonces hallamos que las longitudes de onda en el aire son:

$$\lambda_1 = 0.78\text{ m},\qquad \lambda_2 = 0.39\text{ m},\qquad \lambda_3 = 0.26\text{ m}.$$

PREGUNTAS

1. ¿Cómo podría usted probar experimentalmente que la energía se halla asociada a una onda?
2. La energía puede transferirse por partículas y por ondas. ¿Cómo podemos distinguir experimentalmente entre estos métodos de transferencia de la energía?
3. ¿Puede generarse un movimiento ondulatorio en el que las partículas del medio vibren con un movimiento angular armónico simple? De ser así, explique cómo y describa la onda.
4. Al analizar el movimiento de una onda elástica a través de un medio material, a menudo despreciamos la estructura molecular de la materia. ¿Cuándo se justifica esto y cuándo no?
5. ¿Cómo varían la amplitud y la intensidad de las ondas de la superficie del agua con la distancia desde la fuente?
6. ¿Cómo podemos crear ondas planas? ¿Y ondas esféricas?
7. Al pasar un bote de motor crea una estela que causa ondas que bañan la orilla. Al paso del tiempo, el periodo de las ondas que llegan se hace cada vez más corto. ¿Por qué?
8. Las siguientes funciones en las que A es una constante son de la forma $y = f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt),\qquad y = A(x + vt)^2,$$
$$y = A\sqrt{x - vt},\qquad y = A\ln(x + vt).$$

Explique por qué estas funciones no son útiles en el movimiento ondulatorio.

9. ¿Puede uno producir en una cuerda una forma de onda que tenga una discontinuidad en la pendiente en un punto, es decir, una esquina aguda? Explique.

10. La ley del cuadrado inverso no se aplica exactamente a la disminución de la intensidad de los sonidos con la distancia. ¿Por qué?

11. Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿altera una el progreso de la otra?

12. Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿existe pérdida de energía? Explique su respuesta.

13. ¿Por qué no observamos efectos de interferencia entre los haces de luz emitidos por dos lámparas de mano o entre las ondas de sonido emitidas por dos violines?

14. Como lo muestra la figura 20, la configuración de las ondas estacionarias en una cuerda tensa es una línea recta dos veces durante el ciclo, exactamente como sería si la cuerda no vibrara en absoluto. Explique desde el punto de vista de la conservación de la energía.

15. Dos ondas de la misma amplitud y frecuencia están viajando en la misma cuerda. En cierto momento la cuerda se asemeja a una línea recta. ¿Viajan las dos ondas necesariamente en la misma dirección? ¿Cuál es la relación de fase entre las dos ondas?

16. Si dos ondas difieren únicamente en amplitud y se propagan en direcciones opuestas a través de un medio, ¿producirán ondas estacionarias? ¿Se transporta energía? ¿Existen nodos?

17. La reflexión parcial de la energía ondulatoria a causa de discontinuidades en la trayectoria de transmisión es usualmente disipante y puede reducirse a un mínimo por medio de la inserción de aparatos de "igualación de la impedancia" entre las secciones de la trayectoria que limitan con la discontinuidad. Por ejemplo, un megáfono ayuda a igualar la columna de aire de boca y garganta con el aire afuera de la boca. Dé otros ejemplos y explique cualitativamente cómo tales aparatos minimizan las pérdidas por reflexión.

18. Considere que las ondas estacionarias de una cuerda son una superposición de ondas viajeras y explique, usando ideas de superposición, por qué no existen nodos reales en la cuerda resonante de la figura 25, ni siquiera en el extremo "fijo". (*Sugerencia:* Considere los efectos del amortiguamiento.)

19. Las ondas estacionarias de una cuerda se demuestran por medio de un arreglo como el de la figura 25. La cuerda es iluminada por una lámpara fluorescente y el vibrador está impulsado por la misma toma eléctrica que energiza a la lámpara. La cuerda exhibe una variación curiosa del color en dirección transversal. Explique.

20. En la discusión sobre las ondas transversales de una cuerda, hemos tratado únicamente con desplazamientos en un solo plano, el plano xy. Si todos los desplazamientos están en un plano, se dice que la onda es *planamente polarizada.* ¿Pueden existir desplazamientos en otro plano que aquél con el que tratamos? De ser así, ¿pueden combinarse las ondas polarizadas en dos planos diferentes? ¿Qué apariencia tendría tal combinación de ondas?

21. Una onda transmite energía. ¿Transfiere ímpetu? ¿Puede transferir ímpetu angular? (Véase "Energy and Momentum Transport in String Waves", por D. W. Juenker, *American Journal of Physics*, enero de 1976, pág. 94).

22. En el terremoto de la Ciudad de México ocurrido el 19 de septiembre de 1985, se alternaron zonas de mucho daño con zonas de poco daño. También, los edificios de entre 5 y 15 pisos de altura sufrieron el daño mayor. Explique estos efectos en términos de las ondas estacionarias y de la resonancia.

PROBLEMAS

Sección 19-3 Ondas viajeras

1. Una onda tiene una velocidad de onda de 243 m/s y una longitud de onda de 3.27 cm. Calcule (*a*) la frecuencia y (*b*) el periodo de la onda.

2. Al mecer un bote, un niño produce ondas de agua en la superficie de un lago previamente tranquilo. Se observa que el bote produce 12 oscilaciones en 30 s y también que la cresta de una onda determinada llega en 5 s a la orilla, que está alejada 15 m. Halle (*a*) la frecuencia, (*b*) la velocidad, y (*c*) la longitud de onda de las ondas.

3. Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda. El tiempo para que un punto en particular se mueva desde el desplazamiento máximo hasta el desplazamiento cero es de 178 ms. La longitud de onda de la onda es de 1.38 m. Halle (*a*) el periodo, (*b*) la frecuencia, y (c) la velocidad de la onda.

4. Escriba una expresión que describa a una onda transversal que viaje a lo largo de una cuerda en la dirección $+x$ con una longitud de onda de 11.4 cm, una frecuencia de 385 Hz, y una amplitud de 2.13 cm.

5. Escriba la ecuación de una onda que viaje en dirección negativa a lo largo del eje x y tenga una amplitud de 1.12 cm, una frecuencia de 548 Hz, y una velocidad de 326 m/s.

6. Una onda de 493 Hz de frecuencia tiene una velocidad de 353 m/s. (*a*) ¿A qué distancia entre sí están dos puntos que difieran en fase por 55.0°? (*b*) Halle la diferencia de fase entre dos desplazamientos en el mismo punto pero en tiempos que difieran en 1.12 ms.

Sección 19-4 Velocidad de onda

7. Demuestre (*a*) que la velocidad transversal máxima de una partícula de una cuerda debida a una onda viajera está dada por $u_{máx} = \omega y_m$, y (*b*) que la aceleración transversal máxima es $a_{máx} = \omega^2 y_m$.

8. La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda está dada por

$$y = (2.30 \times 10^{-3}) \text{ sen } (18.2x - 588t),$$

donde x y y están en metros y t está en segundos. Halle (*a*) la amplitud, (*b*) la frecuencia, (*c*) la velocidad, (*d*) la longitud de onda de la onda, y (*e*) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

9. La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda muy larga está dada por $y = 6.0 \text{ sen } (0.020\pi x + 4.0\pi t)$, donde x y y están expresadas en centímetros y t en segundos. Calcule (*a*) la amplitud, (*b*) la longitud de onda, (*c*) la frecuencia, (*d*) la velocidad, (*e*) la dirección de propagación de la onda, y (*f*) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

10. Calcule la velocidad de una onda transversal en una cuerda de 2.15 m de longitud y 62.5 g de masa bajo una tensión de 487 N.

11. La velocidad de una onda de una cuerda es 1de 72 m/s cuando la tensión es de 123 N. ¿En qué valor deberá ser aumentada la tensión con objeto de elevar la velocidad de la onda a 180 m/s?

12. Demuestre que, en términos del esfuerzo de tensión S y de la densidad de masa ρ, la velocidad v de las ondas transversales de un alambre está dada por $v = (S/\rho)^{1/2}$.

13. La ecuación de una onda transversal de una cuerda es $y = 1.8 \text{ sen } (23.8x + 317t)$, donde x está en metros, y está en milímetros, y t en segundos. La cuerda está sometida a una tensión de 16.3 N. Halle la densidad de masa lineal de la cuerda.

14. Una onda sinusoidal continua viaja por una cuerda con una velocidad de 82.6 cm/s. Se halla que el desplazamiento de las partículas de la cuerda en x = 9.60 cm varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación $y = 5.12 \text{ sen } (1.16 - 4.08t)$, donde y está en centímetros y t en segundos. La densidad de masa lineal de la cuerda es de 3.86 g/cm. (*a*) Halle la frecuencia de la onda. (*b*) Halle la longitud de onda de la onda. (*c*) Escriba la ecuación general que da el desplazamiento transversal de las partículas de la cuerda en función de la posición y del tiempo. (*d*) Calcule la tensión en la cuerda.

15. Una onda transversal armónica simple se está propagando a lo largo de una cuerda hacia la izquierda (ó $-x$). La figura 26 muestra un trazo del desplazamiento en función de la posición en el tiempo t = 0. La tensión de la cuerda es de 3.6 N y su densidad lineal es de 25 g/m. Calcule (*a*) la amplitud, (*b*) la longitud de onda, (*c*) la velocidad de la onda, (*d*) el periodo, y (*e*) la velocidad máxima de una partícula de la cuerda. (*f*) Escriba una ecuación que describa a la onda viajera.

16. Pruebe que la pendiente de una cuerda en cualquier punto es numéricamente igual a la razón entre la velocidad de la partícula y la velocidad de la onda en ese punto.

17. Para una onda en una cuerda tensa, halle la razón entre la velocidad máxima de una partícula (la velocidad máxima con la cual una sola partícula del cordón se mueve transversalmente a la onda) y la velocidad de la onda. Si una onda que tiene cierta frecuencia y cierta amplitud actúa sobre un cordón, ¿dependería esta razón de velocidades del material de que esté hecha la cuerda, por ejemplo de alambre o de nylon?

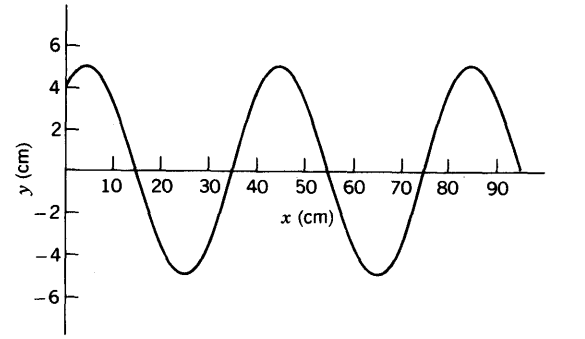

Figura 26 Problema 15.

18. En la figura 27*a*, la cuerda #1 tiene una densidad de masa lineal de 3.31 g/m, y la cuerda #2 tiene una densidad de masa lineal de 4.87 g/m. Están bajo tensión debido al bloque colgante de masa M = 511 g. (*a*) Calcule la velocidad de la onda en cada cuerda. (*b*) El bloque se divide ahora en dos bloques (siendo $M_1 + M_2 = M$) y el aparato se modifica como se muestra en la figura 27*b*. Halle M_1 y M_2, de modo que las velocidades de onda de las dos cuerdas sean iguales.

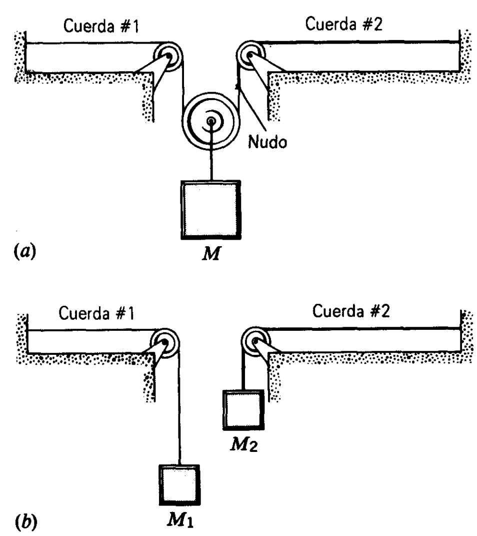

Figura 27 Problema 18.

19. Un alambre de 10.3 m de longitud y una masa de 97.8 g se estira bajo una tensión de 248 N. Si se generan dos pulsaciones, separadas en tiempo por 29.6 ms, una en cada extremo del alambre, ¿en dónde se encuentran las pulsaciones?

20. Halle la velocidad de la onda transversal más rápida que puede ser enviada a lo largo de un alambre de acero.

Permitiendo un factor de seguridad razonable, el esfuerzo máximo de tensión al que podrían estar sujetos los alambres de acero es de 720 MPa. La densidad del acero es de 7.80 g/cm³. Demuestre que la respuesta no depende del diámetro del alambre.

21. El tipo de banda de hule empleado en el interior de algunas bolas de béisbol y de algunas pelotas de golf obedece la ley de Hooke dentro de un amplio intervalo de elongaciones de la banda. Un segmento de este material tiene una longitud L sin estirar y una masa m. Cuando se aplica una fuerza F, la banda se estira una longitud adicional ΔL. (*a*) ¿Cuál es la velocidad (en términos de m, ΔL, y la constante de fuerza k) de las ondas transversales en esta banda de hule? (*b*) Usando la respuesta de (*a*), demuestre que el tiempo requerido para que una pulsación transversal viaje la longitud de la banda de hule es proporcional a $1/\sqrt{\Delta L}$ si $\Delta L \ll L$ y es constante si $\Delta L \gg L$.

22. Un cable uniforme de masa m y longitud L cuelga de un techo. (*a*) Demuestre que la velocidad de una onda transversal en el cable es una función de y, la distancia desde el extremo inferior, y está dada por $v = \sqrt{gy}$. (*b*) Demuestre que el tiempo que le toma a una onda transversal viajar la longitud del cable está dada por $t = 2\sqrt{L/g}$. (*c*) ¿Afecta la masa real del cable a los resultados de (*a*) y de (*b*)?

23. Un alambre no uniforme de longitud L y masa M tiene una densidad de masa lineal variable dada por $\mu = kx$, donde x es la distancia desde un extremo del alambre y k es una constante. (*a*) Demuestre que $M = kL^2/2$. (*b*) Demuestre que el tiempo t requerido para que una pulsación generada en un extremo del alambre viaje hasta el otro extremo está dado por $t = \sqrt{8ML/9F}$, donde F es la tensión en el alambre.

24. Un aro de cuerda circular y uniforme gira en sentido horario en ausencia de la gravedad (véase la Fig. 28). La velocidad tangencial es v_0. Halle la velocidad de las ondas en esta cuerda. (*Nota*: La respuesta es independiente del radio del aro y de la densidad de masa lineal de la cuerda.)

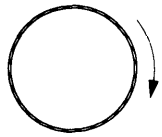

Figura 28 Problema 24.

Sección 19-6 Potencia e intensidad en el movimiento ondulatorio

25. Una cuerda de 2.72 m de longitud tiene una masa de 263 g. La tensión en la cuerda es de 36.1 N. ¿Cuál debe ser la frecuencia de las ondas viajeras de amplitud de 7.70 mm para que la potencia promedio transmitida sea de 85.5 W?

26. Una fuente lineal emite una onda cilíndrica expansiva. Suponiendo que el medio no absorbe energía, encuentre (*a*) cómo dependen la intensidad y (*b*) la amplitud de la onda de la distancia medida desde la fuente.

27. Una onda se propaga uniformemente en todas direcciones desde un punto fuente. (*a*) Justifique la expresión para el desplazamiento y del medio a una distancia r desde la fuente:

$$y = \frac{Y}{r} \operatorname{sen} k(r - vt).$$

Considere la velocidad, dirección de propagación, periodicidad e intensidad de la onda. (*b*) ¿Qué dimensiones tiene la constante Y?

28. Un observador mide una intensidad de 1.13 W/m² a una distancia desconocida medida desde una fuente de ondas esféricas cuya potencia de salida es también desconocida. El observador camina 5.30 m acercándose a la fuente y mide entonces una intensidad de 2.41 W/m² en esta nueva posición. Calcule la potencia de salida de la fuente.

29. (*a*) Muestre que la intensidad I es el producto de la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) y la velocidad de propagación v de una perturbación ondulatoria; o sea muestre que $I = uv$. (*b*) Calcule la densidad de energía en una onda de sonido a 4.82 km de una sirena de 47.5 kW, suponiendo que las ondas son esféricas, la propagación isotrópica sin haber una absorción atmosférica, y que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

30. Una onda sinusoidal transversal se genera en un extremo de una cuerda larga, horizontal por una barra que se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una distancia de 1.12 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 120 veces por segundo. La cuerda tiene una densidad lineal de 117 g/m y se mantiene bajo una tensión de 91.4 N. Halle (*a*) el valor máximo de la velocidad transversal u y (*b*) el valor máximo de la componente transversal de la tensión. (*c*) Demuestre que los dos valores máximos calculados arriba ocurren a los mismos valores de fase de la onda. ¿Cuál es el desplazamiento transversal y de la cuerda en estas fases? (*d*) ¿Cuál es la potencia máxima transferida a lo largo de la cuerda? (*e*) ¿Cuál es el desplazamiento transversal y para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia máxima de potencia? (*f*) ¿Cuál es la transferencia mínima de potencia a lo largo de la cuerda? (*g*) ¿Cuál es el desplazamiento transversal y para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia mínima de potencia?

Sección 19-8 Interferencia de ondas

31. ¿Qué diferencia de fase entre dos ondas transversales por lo demás idénticas, que se mueven en la misma dirección a lo largo de una cuerda tensa, resultará en la onda combinada que tenga una amplitud de 1.65 veces la de la amplitud común de las dos ondas componentes? Exprese la respuesta tanto en grados como en radianes.

32. Determine la amplitud de la onda resultante cuando se combinan dos ondas sinusoidales que tengan la misma frecuencia y viajen en la misma dirección, si sus amplitudes son de 3.20 cm y 4.19 cm y difieren en fase en $\pi/2$ rad.

33. Dos pulsaciones están viajando a lo largo de una cuerda en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 29. (*a*) Si la velocidad de onda es de 2.0 m/s y las pulsaciones tienen una separación de 6.0 cm, trace los patrones des-

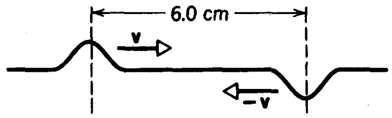

Figura 29 Problema 33.

pués de 5.0, 10, 15, 20, y 25 ms. (*b*) ¿Qué le ha sucedido a la energía en t = 15 ms?

34. Tres ondas sinusoidales viajan en dirección x positiva a lo largo de la misma cuerda. Las tres ondas tienen la misma frecuencia. Sus amplitudes están en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ y sus ángulos de fase son 0, $\pi/2$, y π, respectivamente. Trace la forma de onda resultante y discuta su comportamiento al crecer t.

35. Cuatro ondas sinusoidales viajan en la dirección positiva de x a lo largo de la misma cuerda. Sus frecuencias están en la razón 1:2:3:4 y sus amplitudes en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, respectivamente. Cuando t = 0, en x = 0, la primera y la tercera onda están 180° fuera de fase con la segunda y la cuarta. Trace la forma de onda resultante cuando t = 0 y discuta su comportamiento al crecer t.

36. Considere dos fuentes puntuales S_1 y S_2 en la figura 30, las cuales emiten ondas de la misma frecuencia y amplitud. Las ondas se inician con la misma fase, y esta relación de fase en las fuentes se mantiene a través del tiempo. Considere puntos P en los cuales r_1 sea casi igual a r_2. (*a*) Demuestre que la superposición de estas dos ondas produce una onda cuya amplitud y_m varía con la posición P aproximadamente de acuerdo con

$$y_m = \frac{2Y}{r} \cos \frac{k}{2}(r_1 - r_2),$$

donde $r = (r_1 + r_2)/2$. (*b*) Demuestre luego que la cancelación total ocurre cuando $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, siendo n cualquier entero, y que el refuerzo total ocurre cuando $r_1 - r_2 = n\lambda$. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia en distancia desde dos puntos fijos es constante es una hipérbola, siendo los puntos fijos los focos. De aquí que cada valor de n produzca una línea hiperbólica de interferencia constructiva y una línea hiperbólica de interferencia destructiva. En los puntos en que r_1 y r_2 no son aproximadamente iguales (como cerca de las fuentes), las amplitudes de las ondas de S_1 y S_2 difieren y las cancelaciones son solamente parciales. (Ésta es la base del sistema de navegación OMEGA.)

37. Una fuente S y un detector D de ondas de alta frecuencia están a una distancia d en el suelo. Se detecta que la onda dirigida desde S está en fase en D con la onda que parte de S, que se refleja por una capa horizontal situada a una altitud H (Fig. 31). Los rayos incidente y reflejado forman el mismo ángulo con la capa reflectora. Cuando la capa se eleva una distancia h, no se detecta ninguna señal en D. Desprecie la absorción de la atmósfera y halle la relación entre d, h, H, y la longitud de onda λ de las ondas.

38. Refiérase al problema 37 y a la figura 31. Suponga que d = 230 km y H = 510 km. Las ondas son ondas de radio de 13.0 MHz ($v = 3.00 \times 10^8$ m/s). En el detector D la

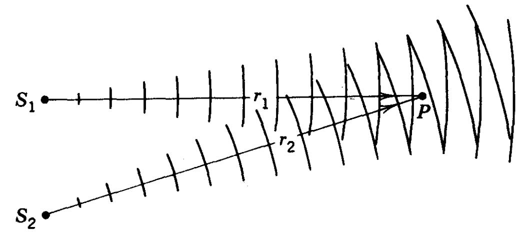

Figura 30 Problema 36.

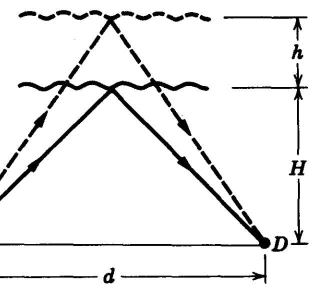

Figura 31 Problemas 37 y 38

intensidad de la señal combinada varía desde un máximo hasta cero y regresa de nuevo a un máximo seis veces en 1 minuto. ¿Con qué velocidad vertical se está moviendo la capa reflectora? (La capa se mueve lentamente, de modo que la distancia vertical desplazada en 1 min es pequeña en comparación con H y d.)

Sección 19-9 Ondas estacionarias

39. Una cuerda fija en ambos extremos tiene una longitud de 8.36 m y una masa de 122 g. Está sujeta a una tensión de 96.7 N y se pone en vibración. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en la cuerda? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria más larga posible? (*c*) Indique la frecuencia de esa onda.

40. Una cuerda de guitarra de nilón tiene una densidad de masa lineal de 7.16 g/m y está bajo una tensión de 152 N. Los soportes fijos están separados por 89.4 cm. La cuerda vibra según el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura 32. Calcule (*a*) la velocidad, (*b*) la longitud de onda, y (*c*) la frecuencia de las ondas componentes cuya superposición da lugar a esta vibración.

41. La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por

$$y = 0.15 \text{ sen } (0.79x - 13t),$$

donde x y y están expresadas en metros y t en segundos. (*a*) ¿Cuál es el desplazamiento en x = 2.3 m, t = 0.16 s? (*b*) Escriba la ecuación de una onda que, cuando se sume a la dada, produciría ondas estacionarias en la cuerda. (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento de la onda estacionaria resultante en x = 2.3 m, t = 0.16 s?

42. Una cuerda vibra según la ecuación

$$y = 0.520 \text{ sen } (1.14x) \cos (137t),$$

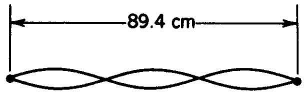

Figura 32 Problema 40.

donde x y y están en centímetros y t en segundos. (*a*) ¿Cuáles son la amplitud y la velocidad de las ondas componentes cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración? (*b*) Halle la distancia entre nodos. (*c*) ¿Cuál es la velocidad de una partícula de la cuerda en posición x = 1.47 cm en el tiempo t = 1.36 s?

43. Las vibraciones que parten de un diapasón de 622 Hz producen ondas estacionarias en una cuerda sujeta en ambos extremos. La velocidad de la onda para la cuerda es de 388 m/s. La onda estacionaria tiene cuatro rizos y una amplitud de 1.90 mm. (*a*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda? (*b*) Escriba una ecuación para el desplazamiento de la cuerda en función de la posición y del tiempo.

44. Considérese una onda estacionaria que sea la suma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas pero por lo demás son idénticas. Demuestre que la energía cinética máxima en cada rizo de la onda estacionaria es $2\pi^2\mu y_m^2 \nu v$.

45. Una onda viajera incidente, de amplitud A_i, se refleja sólo parcialmente desde un extremo, siendo A_r la amplitud de la onda reflejada. La superposición resultante de dos ondas de amplitudes diferentes que viajan en direcciones opuestas produce un patrón de ondas tipo onda estacionaria cuya envolvente se muestra en la figura 33. La ***razón de onda estacionaria*** (SWR, de *standing wave ratio*) se define como $(A_i + A_r)/(A_i - A_r) = A_{máx}/A_{mín}$, y el porcentaje de reflexión se define como la razón entre la potencia promedio en la onda reflejada y la potencia promedio en la onda incidente, multiplicada por 100. (*a*) Demuestre que la SWR = ∞ para el 100% de reflexión y que la SWR = 1 cuando no hay reflexión. (*b*) Demuestre que una medición de la SWR justo antes del extremo revela la reflexión porcentual que ocurre en el extremo de acuerdo con la fórmula

$$\% \text{ de reflejo} = [(\text{SWR} - 1)^2/(\text{SWR} + 1)^2](100).$$

46. Calcule (*a*) la SWR (razón de onda estacionaria) y (*b*) la reflexión porcentual en el extremo para la envolvente del patrón de onda estacionaria mostrado en la figura 33.

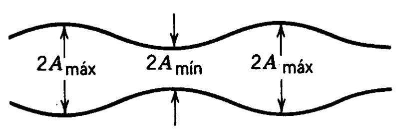

Figura 33 Problemas 45 y 46.

47. Dos cuerdas de densidad de masa lineal μ_1 y μ_2 están anudadas entre sí en $x = 0$ y estiradas a una tensión F. Una onda $y = A$ sen $k_1(x - v_1 t)$ en la cuerda de densidad μ_1 llega a la unión de las dos cuerdas, en donde parte se transmite por la cuerda de densidad μ_2 parte se refleja. Llamemos a estas ondas B sen $k_2(x - v_2 t)$ y C sen $k_1(x + v_1 t)$, respectivamente. (*a*) Suponiendo que $k_2 v_2 = k_1 v_1 = \omega$ y que el desplazamiento del nudo que surge de las ondas incidente y reflejada sea el mismo que el que surge de la onda transmitida, demuestre que $A = B + C$. (*b*) Si se supone que ambas cuerdas tienen cerca del nudo la misma pendiente (¿por qué?), es decir, dy/dx en la cuerda 1 = dy/dx en la cuerda 2, demuestre que

$$C = A\,\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}.$$

¿En qué condiciones es C negativa?

Sección 19-10 Resonancia

48. Una cuerda de violín de 15 cm, fija en ambos extremos, está vibrando en su modo $n = 1$. La velocidad de las ondas en este alambre es de 250 m/s, y la velocidad del sonido en el aire es de 348 m/s. ¿Cuáles son (*a*) la frecuencia y (*b*) la longitud de onda de la onda sonora emitida?

49. ¿Cuáles son las tres frecuencias más bajas de las ondas estacionarias en un alambre de 9.88 m de longitud que tiene una masa de 0.107 kg, y que está estirado bajo una tensión de 236 N?

50. Un alambre de 1.48 m de longitud tiene una masa de 8.62 g y se halla bajo una tensión de 122 N. El alambre está sujeto rígidamente en ambos extremos y se pone en vibración. Calcule (*a*) la velocidad de las ondas en el alambre, (*b*) las longitudes de onda de las ondas que producen ondas estacionarias de uno y dos rizos en el alambre y (*c*) las frecuencias de las ondas en (*b*).

51. Un extremo de una cuerda de 120 cm se mantiene fijo. El otro extremo está unido a un anillo sin peso que puede deslizarse a lo largo de una barra sin fricción como se muestra en la figura 34. ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más grandes posibles de ondas estacionarias en la cuerda? Trace las ondas estacionarias correspondientes.

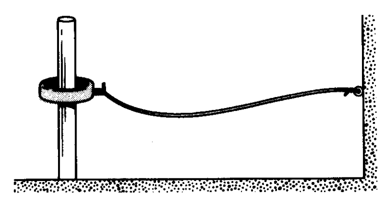

Figura 34 Problema 51.

52. Una cuerda de 75.6 cm está estirada entre soportes fijos. Se observa que tiene frecuencias de resonancia de 420 y 315 Hz, y ninguna otra entre estas dos. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia más baja de esta cuerda? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de onda en esta cuerda?

53. En un experimento sobre ondas estacionarias, una cuerda de 92.4 cm de longitud se une al vástago de un diapasón eléctrico que vibra en dirección perpendicular a la longitud de la cuerda con una frecuencia de 60.0 Hz. La masa de la cuerda es 44.2 g. ¿A qué tensión debe someterse la cuerda (en el otro extremo tiene conectadas a ella pesas) para que vibre con cuatro rizos?

54. Un alambre de aluminio de longitud L= 60.0 cm y área de la sección transversal 1.00×10^{-2} cm^2 de área en su sección transversal está conectado a un alambre de acero de la misma área de su sección transversal. El alambre compuesto, cargado con un bloque de 10.0 kg de masa m, está dispuesto como se muestra en la figura 35 de modo que la distancia L_2 desde la junta a la polea de soporte es de 86.6 cm. Se inducen ondas trasversales en el alambre usando una fuente externa de frecuencia variable. (*a*) Halle la frecuencia de excitación de ondas estacionarias más baja observada de modo que la unión del alambre sea un nodo. (*b*) ¿Cuál es el número total de nodos observado a esta frecuencia, excluyendo los dos de los extremos del alambre? La densidad del aluminio es de 2.60 g/cm^3 y la del acero es de 7.80 g/cm^3.

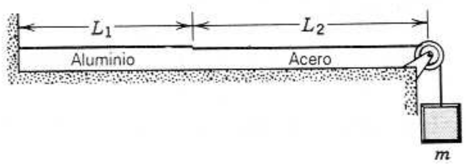

Figura 35 Problema 54.

55. Una cuerda de piano de 1.4 m de longitud está hecha de acero con una densidad de 7.8 g/cm^3 y un módulo de Young de 220 MPa. La tensión en la cuerda produce una deformación de 1.0%. Calcule la frecuencia de resonancia más baja de la cuerda.

Proyectos de computación

56. (*a*) Inicialmente una cuerda tensa tiene una forma dada por $f_1(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, en donde f y x están en metros. Supongamos una pulsación que se mueva con una velocidad v = 25 m/s en dirección x positiva, de modo que el desplazamiento de la cuerda en la coordenada x y en el tiempo t esté dada por $y_1(x,t) = f(x - vt) = 0.02e^{-(x-ut-5)^2/9}$. Úsese un programa de computación o una hoja de cálculo para trazar $y_1(x,t)$ en función de x desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 1.0, y 1.5 s. Con preferencia trace las gráficas en la pantalla de un monitor y diseñe el programa de modo que pueda cambiarse fácilmente el valor de t y se pueda volver a trazar. Observe la posición del máximo de la pulsación en cada gráfica y verifique que las gráficas dibujan una pulsación que viaja en dirección x positiva, con una velocidad de 25 m/s, y se mueve sin cambiar de forma. (*b*) Una segunda pulsación tiene la forma $f_2(x) = 0.02e^{-(x-45)^2/9}$ en t = 0 y se mueve en la dirección x negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_2(x,t) = f_2(x + vt)$ desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 0.8, 1.0, y 1.5 s. Verifique que las gráficas dibujan una pulsación que se mueve en la dirección x negativa. (*c*) Suponga que ambas pulsaciones están en la cuerda al mismo tiempo. Use su programa para trazar $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 1.0, y 1.5 s. Verifique que las gráficas dibujan las pulsaciones moviéndose una hacia la otra y que cuando se reúnen el desplazamiento de la cuerda es grande en la región donde se superponen. Las pulsaciones se mueven luego alejándose entre sí sin cambiar de forma. (*d*) Suponga que la segunda onda tiene la forma $f_2(x, t) = -0.02e^{-(x-45)^2/9}$ en t = 0 y que viaja en dirección x negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 0.8, 1.0, y 1.5 s. Cuando se reúnen las dos pulsaciones, la acción de una tiende a anular la acción de la otra. Para un valor del tiempo, el desplazamiento de la cuerda es cero en cualquier parte. Las pulsaciones continúan luego su camino sin cambiar de forma.

57. Pueden generarse ondas en una cuerda tensa moviendo uno de sus extremos. Supongamos que la cuerda sea extremadamente larga y hagamos que $g(t)$ sea el desplazamiento del extremo que se mueve, el cual se presume que está en x = 0. Si la cuerda se tira a lo largo del eje x positivo, en el tiempo t el desplazamiento en el punto en x es el mismo que el desplazamiento en el extremo pero en un tiempo $t - x/v$ anterior, donde v es la velocidad de la onda. Entonces, el desplazamiento en x está dado por $y(x, t) = g(t - x/v)$. (*a*) Supongamos que, comenzando en t = 0 y continuando durante 0.20 s, la cuerda en x = 0 se jala hacia arriba en la dirección y positiva con una velocidad constante de 0.15 m/s. Luego es mantenida en su desplazamiento final. Entonces $g(t)$ = 0 para $t < 0$, $g(t) = 0.15t$ para $0 < t < 0.20$ s, y $g(t) = 0.15 \times 0.20 = 0.030$ m para $t > 0.20$ s. Considere que la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y use un programa de computadora para hacer gráficas separadas de $y(x,t)$ desde x = 0 hasta x = 20 m para t = 0, 0.1, 0.2, 1.0, 2.0, y 3.0 s. Para esto, haga que la computadora calcule $u = x - vt$ para cada valor de x seleccionado, luego haga a y = 0 si $u < 0$, a $y = 0.15u$ si $0 < u < 0.20$, y a y = 0.03 si $u > 0.20$. (*b*) Considere que la velocidad de la onda sea de 15 m/s y trace $y(x,t)$ desde x = 0 hasta x = 20 m para t = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1.0, y 1.25 s. (*c*) ¿Qué determina la pendiente de la cuerda al moverse la pulsación a lo largo de ella? Si el extremo de la cuerda se eleva más rapidamente, ¿aumenta la pendiente de la cuerda o disminuye? Si la velocidad de la onda aumenta, ¿aumenta la pendiente o disminuye?

58. Comenzando en el tiempo t = 0 y continuando durante 0.40 s, el extremo de una cuerda tensa se mueve ligeramente hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. Su desplazamiento está dado por $g(t)$ = 0.020 sen $(31.4t)$, donde g está en metros y t en segundos. Use una computadora para hacer gráficas separadas del desplazamiento $y(x, t)$ de la cuerda desde x = 0 hasta x = 20 m para cada uno de los tiempos t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, y 2.5 s. Véase el proyecto anterior para algunas sugerencias.

59. Una cuerda tensa tiene inicialmente una forma distorsionada dada por $f(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, donde f y x están en metros. La pulsación viaja 5.0 m/s en la dirección x positiva a lo largo de la cuerda hasta que llega al extremo fijo en x = 20 m, en donde se refleja. El desplazamiento de la cuerda está dado por $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, en donde y_1 es la pulsación incidente y y_2 es la pulsación reflejada. Por supuesto, la pulsación incidente está dada por $y_1(x, t) = f(x - vt) = 0.02e^{-(x-vt-5)^2/9}$. Demuestre que la pulsación reflejada está dada por $y_2(x, t) = -f(2L - x - vt) = -0.02e^{-(2L-x-vt-5)^2/9}$, donde L es la coordenada del punto fijo. Ésta es la única función de $x + vt$ tal que $y_1(L,t) + y_2(L,t) = 0$. Use un programa de computadora o una hoja de cálculo para hacer graficas separadas del desplazamiento de la cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0$, 1.0, 2.0, 2.5, 2.75, 3.0, 3.25, 3.5, 4.0, y 5.0 s. La función a trazar es $y(x, t) = 0.020e^{-(x-vt-5)^2/9} - 0.020e^{-(2L-x-vt-5)^2/9}$.

60. Una cuerda tensa que transporta una onda tiene energía: energía cinética porque se mueve y energía potencial porque está distorsionada. Si μ es la densidad de masa lineal, entonces la energía cinética en una longitud infinitesimal dx está dada por $\frac{1}{2}\mu(\partial y/\partial t)^2\,dx$. Si F es la tensión en la cuerda, entonces la energía potencial en una longitud infinitesimal está dada por $\frac{1}{2}F(\partial y/\partial x)^2\,dx$. Puesto que $y(x, t) = f(x \pm vt)$ y $v = \sqrt{F/\mu}$, estas dos cantidades son exactamente iguales para cuerdas de la misma longitud. Entonces la energía mecánica total en la cuerda desde x hasta $x + \Delta x$ está dada por

$$E = \mu \int_x^{x+\Delta x} (\partial y/\partial t)^2\, dx.$$

Puede usarse el programa de integración numerica descrito en los proyectos de computación del capítulo 8 para evaluar integrales de esta forma.

(*a*) La tensión en una cuerda que tiene una densidad de masa lineal de 0.080 kg/m es de 2.0 N. En el tiempo $t = 0$ la cuerda está distorsionada de modo que tiene la forma dada por $f(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, donde f y x están en metros. Suponga que la pulsación se mueve en la dirección x positiva. Demuestre que

$$E = (0.04/9)^2 \mu v^2 \int_x^{x+\Delta x} (x - vt - 5)^2 e^{-(x-vt-5)^2/4.5}\, dx.$$

(*b*) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m en $t = 1$ s. Este segmento incluye a todas las pulsaciones excepto en las colas muy pequeñas. El uso de 200 intervalos produciría una precisión de cuatro cifras significativas. (*c*) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 30$ m hasta $x = 50$ m en $t = 7$ s. El resultado sería el mismo que en la parte (*b*) y le indicaría que la energía se ha movido desde la región de alrededor de $x = 10$ m hasta la región de alrededor de $x = 40$ m. Esto tiene sentido, porque la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y la onda viajó 30 m en los 6 s transcurridos. (*d*) La cantidad a la que la energía pasa el punto en x está dada por $P = -F(\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t)$, así que en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ la energía que pasa por x está dada por

$$E = \int_t^{t+\Delta t} P\, dt = -F \int_t^{t+\Delta t} (\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t)\, dt.$$

Para la pulsación descrita arriba demuestre que

$$E = (0.04/9)^2 F v \int_t^{t+\Delta t} (x - vt - 5)^2 e^{-(x-vt-5)^2/4.5}\, dt.$$

Use una integración numérica para calcular la energía que pasó por el punto en $x = 25$ m desde $t = 1$ hasta $t = 7$ s. El resultado es de nuevo el mismo que antes, indicando que toda la energía alrededor de $x = 10$ m en $t = 1$ s pasó por $x = 25$ m en su camino hacia la región alrededor de $x = 40$ m.