Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2018**

Solución Examen – Jueves 19 de julio de 2018

Ejer. 1	Ejer. 2	Ejer. 3	Ejer. 4	Ejer. 5	Ejer. 6	Ejer. 7	Ejer. 8
D	B	C	A	B	C	D	C

Problema (36 puntos)

Se considera la función $f : I\!R^2 \to I\!R$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 3x + 2y + 2xy & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ A & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Hallar A para que f sea continua en $(0,0)$.
b) Para el valor de A hallado, estudiar la existencia de derivadas parciales en $(0,0)$.
c) Definir diferenciabilidad de una función $g : I\!R^2 \to I\!R$ en el punto $(0,0)$.
d) Para el valor de A hallado, estudiar la diferenciabilidad de f en el $(0,0)$.

Solución:

a) Debemos calcular el límite de $f(x,y)$ en el origen. Pasando a polares, es fácil verificar que el límite es cero, por lo que $A = 0$.
b) Como $f(0,h)$ y $f(h,0)$ son cero, los límites de los cocientes incrementales para las derivadas respecto a x e y son 3 y 2 respectivamente.
c) Decimos que una función g es diferenciable en el origen sii existe una transformación lineal $dg : I\!R^2 \to I\!R$ tal que

$$g(x,y) = g(0,0) + dg(x,y) + r(x,y)$$

con r una función que cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.
d) Despejando de la definición, resulta que la función resto es $r(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2xy$, por lo que hay que calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Nuevamente utilizando coordenadas polares, es fácil verificar que le límite es cero, y por lo tanto la función es diferenciable.