Respuestas por Versión

Versión	Empieza	MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
1	Límite	**B**	**C**	**B**	**D**	**A**
2	Complejos	**A**	**D**	**D**	**C**	**B**
3	Volumen	**A**	**D**	**C**	**B**	**C**

Límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} + \ln(2(x^2+y^2)+1) - \frac{3}{2}(x^2+y^2) - 1}{x^2+y^2}$$

Notamos $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 1$ y $g(x,y) = \ln(2(x^2+y^2)+1)$. Usando la propiedad de composición de polinomios de Taylor tenemos:

$$T_{2,f,(0,0)}(x,y) = x^2+y^2 \quad \text{y} \quad T_{2,g,(0,0)}(x,y) = 2x^2+2y^2.$$

Sustituyendo en el límite, resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^2+y^2+2(x^2+y^2) - \frac{3}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{3}{2}$$

Complejos

Sea $z = |z|e^{i\varphi}$ Igualando módulo: $|\overline{z}| = |z| = 2|z|^2$, por lo que $|z| = 0$, en cuyo caso $z = 0$, o $|z| = 1/2$. Igualando fases tenemos que $-\varphi + 2k\pi = 2\varphi$, por lo que $\varphi = 2k\pi/3$, con $k \in \{0,1,2\}$. El conjunto solución es entonces $A = \{0, 1/2, 1/2e^{2i\pi/3}, 1/2e^{-2i\pi/3}\}$, que tiene 4 elementos y una dupla de conjudados.

Integral Doble

Usando coordenadas polares $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ y luego usando el cambio de variable $u = 1+r^2$ se obtiene:

$$\iint_A \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi/2\int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \pi\log(2)/2.$$

Volumen

Aplicando Fubini:

$$\iiint_V 1dxdydz = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 dz = \int_0^1 dx \int_x^1 (y-1)dy = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} dx = \frac{1}{6}.$$

Series

El término general en magnitud es decreciente y tiende a 0. Por el criterio de Leibniz la serie converge. Para estudiar convergencia absoluta aplicaremos el criterio serie integral:

$$\int_{13}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{13}^{T} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{\ln 13}^{\ln T} \frac{1}{u^2} du = \int_{\ln 13}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$$

Luego la serie $\displaystyle\sum_{n=13}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ también converge absolutamente.

Problema 1 de Desarrollo

1. Primero estudiamos existencia de las derivadas parciales:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2 sen(1/h) - 1}{h} = 0;$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+h+1-1}{h} = 1.$$

2. Para estudiar diferenciabilidad, primero expresamos el residuo:

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + r(x,y).$$

Utilizando que $f_x(0,0) = 0$ y que $f_y(0,0) = 1$, tenemos que:
$r(x,y) = \begin{cases} y^2, & si\ x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & si\ x \neq 0 \end{cases}$ Tomando límites del residuo dividido por su norma, tenemos en la primera porción que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 sen^2(\theta)}{\rho} = 0.$$

En la segunda porción el límite resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 sen(1/x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

Luego, $f(x,y)$ es diferenciable.

3. La matriz jacobiana de la composición es el producto de las matrices: $J_{g\circ f}(0,0) = J_g(f(0,0))J_f(0,0) = J_g(1)J_f(0,0)$. Con las derivadas antes calculadas tenemos que $J_f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,1)$. Luego, la matriz jacobiana de $g \circ f$ en $0,0$ es el producto:

$$J_{g\circ f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 de Desarrollo

(a) Sea (a_n) una sucesión de $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}^n$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq n_0$ se cumple que $\|a_n - L\| < \epsilon$.

(b) Decimos que la función f es continua en a si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

(c) Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ existe n_0 tal que $\|a_n - a\| < \delta$, para todo $n \geq n_0$. Luego $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$, y la sucesión $(f(a_n))$ converge a $f(a)$, como queríamos demostrar.