CDIVV

Dic 2021

Soluciones del examen, v01.

Preguntas tipo VF

1) $e^{1-n^2} = e\,e^{-n^2}$, por lo que alcanza con clasificar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$. Utilizando el criterio de la raíz,

$$\sqrt[n]{e^{-n^2}} = e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$ por lo que la serie converge.

2) $\int_1^{\infty} x^{\alpha}\,dx$ converge sii $\alpha < -1$, ver teórico.

3) Hallemos las curvas de nivel de f.

$f(x,y) = k \leftrightarrow (x+y)^3 = k \leftrightarrow$
$x+y = \sqrt[3]{k}$.

Las curvas de nivel son rectas de ecuación $x+y =$ constante, que están dibujadas en (A).

4) Recordemos que

A es cerrado $\leftrightarrow$ A contiene a todos sus puntos de acumulación.

Por lo tanto, la afirmación dada es equivalente a:

A no es abierto $\rightarrow$ A es cerrado,

lo cual es falso.

Preguntas tipo MO

Ejercicio 1

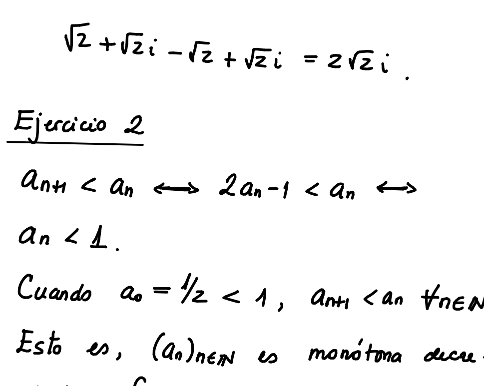
$z\bar{z} = 4 \leftrightarrow |z|^2 = 4 \leftrightarrow |z| = 2$.

Los puntos que satisfacen esta condición son los que están en la circunferencia roja.

$Re(z)^2 - Im(z)^2 = 0 \leftrightarrow Re(z) = Im(z)$ o $Re(z) = -Im(z)$. Los puntos que satisfacen esta condición son los que están en las rectas azules.

Los puntos que satisfacen $Im(z) > 0$ son los que están en el semiplano superior.

Por lo tanto, los puntos que satisfacen las tres condiciones son los dos puntos marcados en violeta.



Éstos son $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$. Su suma es

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}i - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}i.$$

Ejercicio 2

$a_{n+1} < a_n \leftrightarrow 2a_n - 1 < a_n \leftrightarrow$
$a_n < 1$.

Cuando $a_0 = 1/2 < 1$, $a_{n+1} < a_n \;\forall n \in \mathbb{N}$.

Esto es, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente. Veamos si converge o diverge.

Supongamos que existe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$,

L satisface la ecuación

$$L = 2L - 1,$$

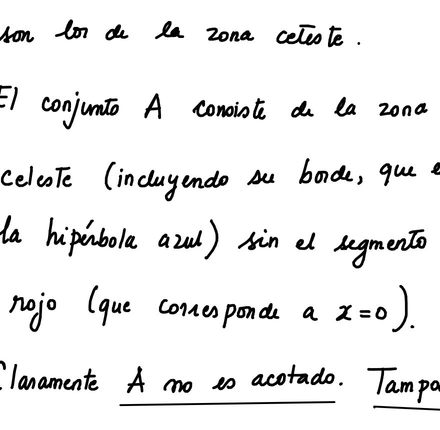
es decir $L = 1$. Pero si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y converge,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Como $a_0 = 1/2$, el límite no puede ser 1. Concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y diverge.

Ejercicio 3

El conjunto de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ es la hipérbola de la figura.



Los puntos para los cuales $x^2 - y^2 \leq 1$ son los de la zona celeste.

El conjunto A consiste de la zona celeste (incluyendo su borde, que es la hipérbola azul) sin el segmento rojo (que corresponde a $x = 0$).

Claramente A no es acotado. Tampoco es cerrado, porque los puntos rojos son de acumulación de A pero no están en A.

Ejercicio 4

Veamos que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y calculémoslas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Análogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

f es diferenciable en $(0,0)$ sii

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y + r(x,y),$$

con $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Como $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $r(x,y) = f(x,y)$. Es decir, f es diferenciable sii

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Calculemos este límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\text{coordenadas polares}}{=}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\,\cos(1/\rho^2)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^3 \underbrace{\boxed{\left(\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\,\cos(1/\rho^2)\right)}}_{\text{ACOTADO}} = 0.$$

Por lo tanto f es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio 5

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2-y} & -e^{x^2-y} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$J_g(1,0) = \begin{pmatrix} 2e & -e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $g(1,0) = (e,1)$,

$$\nabla(f\circ g)(1,0) = \nabla f(e,1)\cdot J_g(1,0) =$$

$$= (3\;\; -2)\begin{pmatrix} 2e & -e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (6e \;\; \underbrace{-3e-2}_{\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1,0)}).$$

Por lo tanto $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1,0) = -3e-2$.

Ejercicio 6

Sea $f(x,y) = x(y-1)^2 + \mathrm{sen}(x+y) + 1$.

El polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$ es

$p(x,y) = 1 + 2x + y - 2xy$, y sus coeficientes suman 2. Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - p(x,y)}{x^2+y^2} = 0,$$

la respuesta correcta es 2.

Ejercicio 7

En coordenadas polares, esta integral es

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \int_1^2 \cos(\rho^2)\cdot \underbrace{\rho}_{\text{jacobiano del cambio de variable}}\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\int_1^2 \cos(\rho^2)\,2\rho\,d\rho \underset{\text{haciendo el cambio de variable } u=\rho^2}{=}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^4 \cos(u)\,du = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}(u)\Big|_{u=1}^{u=4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{sen}(4) - \mathrm{sen}(1)\right).$$

Ejercicio 8

Escribimos esta integral triple como una integral iterada.

$$\int_D xy\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{3-x-y} xy\,dz\,dy\,dx.$$

Calculando directamente se obtiene

$$\int_D xy\,dx\,dy\,dz = 1.$$