Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Agosto 2020**

EXAMEN – Agosto de 2020

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.(10 pts.) Los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación $z^5 = 1 + \sqrt{3}i$ son:

Solución:

$$\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\varphi} :, \rho = 2^{1/5}, \varphi = \pi/15 + 2/5k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejercicio 2.(20 pts.) Se considera la ecuación diferencial

$$y'' - y = -\frac{\sin(Log(x))}{x^2} - \frac{\cos(Log(x))}{x^2} - \sin(Log(x)).$$

Se sabe que $y(x) = e^x + e^{-x} + \sin(Log(x))$ es solución de la ecuación.

Solución:

La ecuación a estudiar es $y'' - y = -\sin(\log(x))/x^2 - \cos(\log(x))/x^2 - \sin(\log(x))$. La solución general de este tipo de ecuaciones se puede expresar como la suma de una solución particular y una solución general de la ecuación homogénea. La correspondiente ecuación homogénea y su polinomio característico son:

$$y'' - y = 0, \qquad \lambda^2 - 1 = 0$$

Por lo tanto podemos escribir una solución general de la ecuación homogénea como

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Sabemos por la letra que una solución particular de la ecuación original es

$$y_p(x) = e^x + e^{-x} + \sin(\log(x))$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x + e^{-x} + \sin(\log(x))$$

$$y(x) = (c_1 + 1)e^x + (c_2 + 1)e^{-x} + \sin(\log(x))$$

Observamos que $c_1 + 1$ y $c_2 + 1$ son constantes arbitrarias, pues c_1 y c_2 lo son. Es decir, podemos expresar una solución general como $y(x) = b_1 e^x + b_2 e^{-x} + \sin(\log(x))$ con b_1, b_2 constantes.

Ejercicio 3.(15 pts.)

Clasificar, justificando:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

<u>**Solución:**</u>

La función $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ presenta una discontinuidad en $x = 0$, y no está acotada alrededor de dicho punto, por lo que la integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ es del tipo mixto. En este caso, usamos la propiedad de aditividad en el dominio de integración, y tenemos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Entonces, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ converge si $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ convergen, o diverge si $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ o $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ diverge.

Determinar la convergencia de ambas integrales del lado derecho de la igualdad resulta sencillo usando el hecho de que $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ posee una familia de primitivas expresada como combinación de funciones elementales:

$$\int f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}} + K,$$

donde K es una constante real. Entonces, aplicando la Regla de Barrow y la definición de integrales impropias de primera y segunda especie, tenemos lo siguiente:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0^+} -2e^{-\sqrt{x}}|_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (2e^{-\sqrt{c}} - 2e^{-1}) = 2 - \frac{2}{e},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to +\infty} -2e^{-\sqrt{x}}|_1^a = \lim_{a \to +\infty} (2e^{-1} - 2e^{-\sqrt{a}}) = \frac{2}{e}.$$

Entonces, $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ convergen, por lo que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ converge. Además,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left(2 - \frac{2}{e}\right) + \frac{2}{e} = 2.$$

Ejercicio 4.(20 pts.)Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución:

1 Calcular las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$.
Calculamos primero las derivadas parciales en $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Para las direcciones no canónicas consideramos $v = (v_1, v_2)$. Podemos suponer que el vector tiene componenentes no nulas.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2v_1^2hv_2}{h^4v_1^4+h^2v_2^2}}{h} = \frac{v_1^2}{v_2}$$

.

2 Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
La función f no es continua en $(0,0)$. El límite de dicha función en $(0,0)$ no existe. Es suficiente con calcularlo sobre las trayectorias $y=0$ y $y=x^2$. Por lo tanto la función no es diferenciable.

Ejercicio 5.(15 pts.) Calcular, justificando:

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-sen(x)sen(y)}{x^2+y^2}$$

Solución: Para calcular este límite planteamos el desarrollo de Taylor de la función $f(x,y) = sen(x)sen(y)$ en el punto $(0,0)$ (ver notas del curso, Teorema 6.31). Tenemos que:

$f(0,0)=0$.

$f_x = cos(x)sen(y)$. Luego, $f_x(0,0)=0$.
$f_y = sen(x)cos(y)$. Luego, $f_y(0,0)=0$.

$f_{xx} = -sen(x)sen(y)$. Luego, $f_xx(0,0)=0$.
$f_{yy} = -sen(x)sen(y)$. Luego, $f_yy(0,0)=0$.
$f_{xy} = cos(x)cos(y)$. Luego, $f_xy(0,0)=1$.
$f_{yx} = cos(x)cos(y)$. Luego, $f_yx(0,0)=1$.

Teniendo estos valores numéricos, la función f en un entorno de $(0,0)$ cumple que

$$\begin{aligned} f(\Delta x,\Delta y) &= 0+0\Delta x+0\Delta y+\frac{1}{2}[0\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+0\Delta y^2]+r(\Delta x,\Delta y)\\ &= \Delta x\Delta y + r(\Delta x,\Delta y)\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-sen(x)sen(y)}{x^2+y^2} = lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-xy-r(x,y)}{x^2+y^2} = lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-r(x,y)}{x^2+y^2}$$

Por ser r el resto de Taylor, este límite da 0.

Ejercicio 6.(20 pts.) Usando integración múltiple, demostrar que el volumen del sólido limitado por los planos $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, donde a, b y c son números reales positivos es igual a $\dfrac{abc}{6}$.

Solución: La intersección del plano $\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\}$ con el plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$ es el conjunto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, que podemos escribir como la recta $z=c-\frac{c}{b}y$ del plano yz. Esta recta pasa por los puntos $(0,b,0)$ y $(0,0,z)$.
De modo similar la intersección de Π con el plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0\}$ es el conjunto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, esto es, la recta $z=c-\frac{c}{a}x$ del plano xz, la que pasa por los puntos $(a,0,0)$ y $(0,0,c)$.
Por último la intersección del plano Π con el plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0\}$ es el conjunto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, que es la recta $y=b-\frac{b}{a}x$ del plano xy, que pasa por los puntos $(a,0,0)$ y $(0,b,0)$.
Estas intersecciones definen un tetraedro de vértices $(0,0,0),(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$ cuyo volumen obtendremos integrando la función $f(x,y,z) : f(x,y,z)=1$ en dicho tetraedro.
Tenemos seis formas de plantear la integral triple, de la que solamente escribiremos dos de ellas:

(1) $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} 1dz$

(2) $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^{c-\frac{c}{a}x} dz\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c})} 1dy$

En el primer caso para cada x entre 0 y a, y puede variar entre 0 y la recta $y=b-\frac{b}{a}x$, y para cada pareja (x,y) en dichas condiciones, z puede variar entre 0 y el plano $c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$.
En el segundo caso para cada x entre 0 y a, z puede variar entre 0 y la recta $z=c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$, y para cada pareja (x,z) en dichas condiciones, y puede variar entre 0 y el plano $c(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c}$.
Para cada y entre 0 y b tenemos otros dos casos, y lo mismo para cada z entre 0 y c.
Cualquiera de las seis opciones va a dar el mismo resultado, haremos la primera, $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} 1dz$.
Al integrar la constante 1 respecto a z y evaluar entre 0 y $c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$ obtenemos la función $g(x,y)=c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$, que integraremos respecto de y entre 0 y $(b-\frac{b}{a}x)$.
La primitiva (recordemos que todo lo que no sea y lo tratamos como si fuese una constante), es $(c-\frac{c}{a}x)y-\frac{c}{b}\frac{y^2}{2}$, que evaluaremos entre 0 y $(b-\frac{b}{a}x)$.
Esto nos da la función $h(x)=\frac{bc}{2}-\frac{bcx}{a}+\frac{bcx^2}{2a^2}$.
Por último integramos esta función respecto a x entre 0 y a, obteniendo $\frac{bc}{2}a-\frac{bc}{a}\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{2a^2}\frac{a^3}{3}$, que luego de operar es igual a $\frac{abc}{6}$.