v 01

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2021

Examen

15 de diciembre de 2021

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

La duración del examen es de tres horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Tenga cuidado al pasar las respuestas
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

VERDADERO O FALSO (Total: 20 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **V** o **F**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**
V	V	V	F

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: −5 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 80 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
D	A	D	E	B	C	C	C

Correctas: 10 puntos. Incorrectas: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

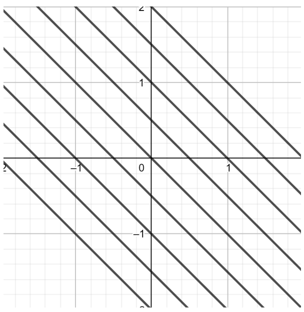
SOLO PARA USO DOCENTE

V/F	MO	Total

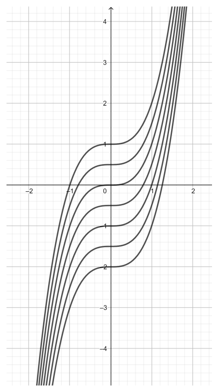
Ejercicios del tipo VERDADERO/FALSO

Indicar si las siguientes afirmaciones son *necesariamente* verdaderas.

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{1-n^2}$ converge.
2. Consideremos la integral impropia $\int_1^{\infty} x^{\alpha}\, dx$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta integral converge si y sólo si $\alpha < -1$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = (x + y)^3$. De los dos dibujos de abajo, el que mejor representa las curvas de nivel de f es el (A).



(A)



(B)

4. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Si A no es abierto, entonces contiene a todos sus puntos de acumulación.

Ejercicios de MÚLTIPLE OPCIÓN

Ejercicio 1

Consideremos los números complejos que satisfacen las tres condiciones siguientes (simultáneamente):

- $z\bar{z} = 4$.
- $Re(z)^2 - Im(z)^2 = 0$.
- $Im(z) > 0$.

La suma de dichos números vale:

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{2}i$

(C) $2\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{2}i$

(E) 0

Ejercicio 2

Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tal que $a_0 = \frac{1}{2}$ y

$$a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Entonces:

(A) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y diverge.

(B) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y diverge.

(C) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y converge.

(D) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y converge.

(E) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona.

Ejercicio 3

Consideremos el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y^2 \leq 1 \text{ y } x \neq 0\}.$$

Entonces:

(A) A es compacto.

(B) A es cerrado pero no acotado.

(C) A es acotado pero no cerrado.

(D) A no es ni cerrado ni acotado.

(E) A es abierto.

Ejercicio 4

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Entonces:

(A) f no es continua en $(0, 0)$.

(B) f es continua y no existen sus derivadas parciales en $(0, 0)$.

(C) f es continua, existen sus derivadas parciales en $(0, 0)$ pero no existen todas las derivadas direccionales en $(0, 0)$.

(D) f es continua, existen todas sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ pero no es diferenciable.

(E) f es diferenciable en $(0, 0)$.

Ejercicio 5

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la dada por $g(x, y) = (e^{x^2-y}, xy + 1)$. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $\nabla f(e, 1) = (3, -2)$, indicar cuánto vale $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1, 0)$.

(A) $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1, 0) = 3e + 1$

(B) $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1, 0) = -3e - 2$

(C) $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1, 0) = 6e + 2$

(D) $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1, 0) = -6e - 2$

(E) $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1, 0) = -3e - 1$

Ejercicio 6

Sean a, b, c, d, e y f tales que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(y-1)^2 + \operatorname{sen}(x+y) + 1 - a - bx - cy - dx^2 - exy - fy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Entonces la suma $a + b + c + d + e + f$ es igual a:

(A) 0

(B) 1

(C) 2

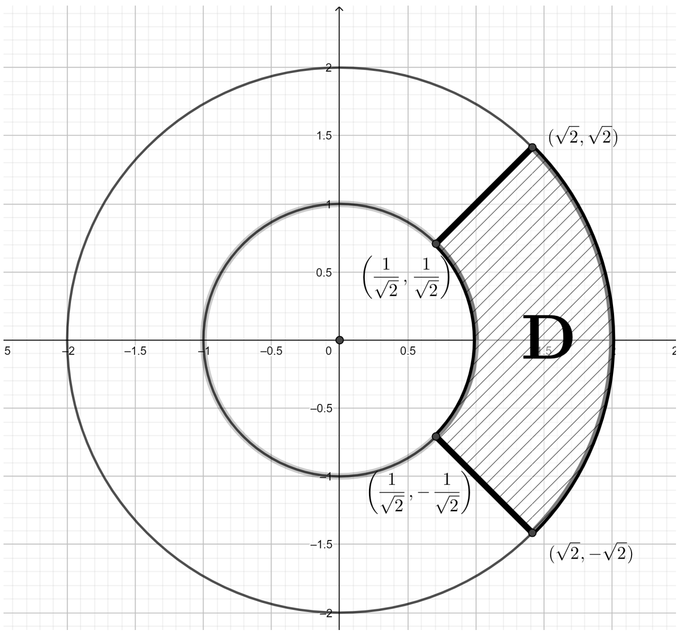
(D) 3

(E) 4

Ejercicio 7

Sea D la región rayada en el dibujo. Calcular

$$\int_D \cos(x^2 + y^2)\, dxdy.$$



(A) $\pi \cos(2)$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\frac{\pi}{4}(\operatorname{sen}(4) - \operatorname{sen}(1))$

(D) $\frac{\pi}{4}$

(E) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Ejercicio 8

Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 2, \; z \geq 0, \; x + y + z \leq 3\}$. Calcular

$$\int_D xy \, dxdydz$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) $\frac{3}{2}$

(E) 2
