2do. parcial - Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

(soluciones)

PARTE I: VERDADERO O FALSO

Verdadero o Falso #1

V1: Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$S_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z) = 0\},$$

es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$.

- **Verdadero**.
- Falso.

Solución: El conjunto S_0 es cerrado, pues contiene a cualquiera de sus puntos de acumulación. En efecto, sea (a,b,c) un punto de acumulación de S_0. Veamos que $(a,b,c) \in S_0$. Sea (x_k, y_k, z_k) una sucesión con recorrido en $S_0 - \{(a,b,c)\}$ y que converge a (a,b,c). Como f es continua en (a,b,c), se tiene que $f(a,b,c) = \lim_{k\to+\infty} f(x_k,y_k,z_k) = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0$, es decir, $(a,b,c) \in S_0$.

Otra forma de resolver esto es la siguiente: $\{0\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, por lo cual $S_0 = f^{-1}(\{0\})$ (imagen inversa) es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$ por ser f continua.

V2: Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$S_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z) \leq 0\},$$

es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$.

- **Verdadero**.
- Falso.

Solución: El conjunto S_0 es cerrado, pues contiene a cualquiera de sus puntos de acumulación. En efecto, sea (a,b,c) un punto de acumulación de S_0. Veamos que $(a,b,c) \in S_0$. Sea (x_k, y_k, z_k) una sucesión con recorrido en $S_0 - \{(a,b,c)\}$ y que converge a (a,b,c). Como f es continua en (a,b,c), se tiene que $f(a,b,c) = \lim_{k\to+\infty} f(x_k,y_k,z_k) = \lim_{k\to+\infty} r_k$ donde $r_k \leq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $\{r_k\}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$ y acotada superiormente por 0, por lo cual $f(a,b,c) \leq 0$.

Otra forma de resolver esto es la siguiente: $(-\infty, 0]$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, por lo cual $S_0 = f^{-1}((-\infty,0])$ (imagen inversa) es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$ por ser f continua.

V3: Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$S_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x, y, z) < 0\},$$

es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$.

- **Verdadero**.
- Falso.

Solución: El conjunto S_0 es abierto porque su complemento es cerrado (ver la versión 2).

Verdadero o Falso #2

V1: Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Existe una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0), que cumple que

$$df_{(x_0,y_0)}(1, 1) = 1 = df_{(x_0,y_0)}(-1, 1),$$

y además

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

($df_{(x_0,y_0)}$ denota el diferencial de f en el punto (x_0, y_0).)

- Verdadero.
- **Falso**.

Solución: Por un lado,

$$1 = df_{(x_0,y_0)}(1, 1) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (1, 1)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por otro lado,

$$1 = df_{(x_0,y_0)}(-1, 1) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (-1, 1)\rangle = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

De donde

$$\begin{aligned} 2 &= 2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

V2: Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Existe una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0), que cumple que

$$df_{(x_0,y_0)}(1, 1) = 1 = df_{(x_0,y_0)}(-1, 1),$$

y además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

($df_{(x_0,y_0)}$ denota el diferencial de f en el punto (x_0, y_0).)

- **Verdadero**.
- Falso.

Solución: Siguiendo la solución de la versión 1, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

V3: Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Existe una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0), que cumple que

$$df_{(x_0,y_0)}(1,1) = 1 = df_{(x_0,y_0)}(1,-1),$$

y además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

($df_{(x_0,y_0)}$ denota el diferencial de f en el punto (x_0, y_0).)

- Verdadero.
- **Falso**.

Solución: Por un lado,

$$1 = df_{(x_0,y_0)}(1,1) = \langle \nabla f(x_0,y_0), (1,1)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por otro lado,

$$1 = df_{(x_0,y_0)}(1,-1) = \langle \nabla f(x_0,y_0), (1,-1)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

De donde

$$\begin{aligned} 2 &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 1 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Verdadero o Falso #3

V1: Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ continua y positiva en D, donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un rectángulo compacto (es decir, cerrado y acotado). Entonces necesariamente f es integrable y además

$$\iint_D f \geq \text{área}(D).$$

- Verdadero.
- **Falso**.

Solución: Considere $D = [0,1] \times [0,1]$ y f la función constantemente igual a $1/2$ sobre D. Entonces

$$\iint_D f = \frac{1}{2}\iint_D 1 = \frac{1}{2}\cdot \text{área}(D) = \frac{1}{2} < 1 = \text{área}(D).$$

V2: Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ continua en D, donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un rectángulo compacto (es decir, cerrado y acotado). Entonces necesariamente f es integrable y además

$$\left| \iint_D f \right| \geq \iint_D |f|.$$

- Verdadero.
- **Falso**.

Solución: Considere $D = [-1, 1] \times [0, 1]$ y $f(x, y) = x$. Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 x dx \right) dy = \int_0^1 0 dy = 0, \\ \left| \iint_D f \right| &= 0, \\ \iint_D |f| &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 |x| dx \right) dy = \int_0^1 1 dy = 1. \end{aligned}$$

Luego, $\left| \iint_D f \right| < \iint_D |f|$.

V3: Sean U y V rectángulos compactos de $\mathbb{R}^2$ (es decir, cerrados y acotados). Si existe $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable, que cumple

$$\iint_{U \cup V} f = \iint_U f + \iint_V f,$$

entonces necesariamente U y V son disjuntos.

- Verdadero.
- **Falso**.

Solución: Tome $U = V$, de donde $U \cap V = U \neq \emptyset$. La función f constantemente igual a cero claramente cumple con ser integrable y con $\iint_{U \cup V} f = \iint_U f + \iint_V f$.

Múltiple Opción #1

V1: Sea $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con $\alpha(0) = (0,0)$, y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por

$$f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y}).$$

Sabiendo que $(f \circ \alpha)'(0) = (2,0)$, el diferencial de α en 0 es el vector dado por:

(A) $\boldsymbol{\alpha'(0) = (1,1)}$

(B) $\alpha'(0) = (1,-1)$

(C) $\alpha'(0) = (0,0)$

(D) $\alpha'(0) = (-1,1)$

(E) $\alpha'(0) = (1,0)$

Solución: Por la Regla de la Cadena, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (f \circ \alpha)'(0) = J_f(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = J_f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y})\big|_{(0,0)} & \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y})\Big|_{(0,0)} \\ \frac{\partial}{\partial x}(e^{x-y})\big|_{(0,0)} & \frac{\partial}{\partial y}(e^{x-y})\Big|_{(0,0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y}|_{(0,0)} & e^{x+y}|_{(0,0)} \\ e^{x-y}|_{(0,0)} & -e^{x-y}|_{(0,0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(0) + y'(0) \\ x'(0) - y'(0) \end{pmatrix}.$$

Se sigue que $x'(0) + y'(0) = 2$ y $x'(0) - y'(0) = 0$, de donde $x'(0) = 1$ e $y'(0) = 1$, es decir, $\alpha'(0) = (1,1)$.

V2: Sea $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con $\alpha(0) = (0,0)$, y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por

$$f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y}).$$

Sabiendo que $(f \circ \alpha)'(0) = (0,4)$, el diferencial de α en 0 es el vector dado por:

(A) $\boldsymbol{\alpha'(0) = (2,-2)}$

(B) $\alpha'(0) = (-2,2)$

(C) $\alpha'(0) = (2,2)$

(D) $\alpha'(0) = (0,0)$

(E) $\alpha'(0) = (2,0)$

Solución: Siguiendo el procedimiento de la versión 1, se tiene que $x'(0) + y'(0) = 0$ y $x'(0) - y'(0) = 4$, de donde $x'(0) = 2$ e $y'(0) = -2$, es decir, $\alpha'(0) = (2,-2)$.

V3: Sea $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con $\alpha(0) = (0,0)$, y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por

$$f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y}).$$

Sabiendo que $(f \circ \alpha)'(0) = (1,3)$, el diferencial de α en 0 es el vector dado por:

(A) $\boldsymbol{\alpha'(0) = (2, -1)}$

(B) $\alpha'(0) = (-2, 1)$

(C) $\alpha'(0) = (-1, 2)$

(D) $\alpha'(0) = (1, -2)$

(E) $\alpha'(0) = (0, 0)$

Solución: Siguiendo el procedimiento de la versión 1, se tiene que $x'(0) + y'(0) = 1$ y $x'(0) - y'(0) = 3$, de donde $x'(0) = 2$ e $y'(0) = -1$, es decir, $\alpha'(0) = (2, -1)$.

Múltiple Opción #2

V1: Hallar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2 + y) - 1 + x^2 + \alpha y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

(A) $\boldsymbol{\alpha = 3/2}$

(B) $\alpha = 1/2$

(C) $\alpha = -1/2$

(D) $\alpha = -3/2$

(E) $\alpha = 0$

Solución: Hallamos el desarrollo de Taylor de orden dos de $f(x, y) = \cos(x^2 + y)$ en un entorno de $(0, 0)$. La función f claramente es de clase C^3. Primero calculamos todas las derivadas parciales de orden 1 y 2 de f, y luego evaluamos en $(0, 0)$ para hallar el gradiente y la Hessiana de f en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -2x \sin(x^2 + y), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\sin(x^2 + y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -2\sin(x^2 + y) - 4x^2 \cos(x^2 + y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\cos(x^2 + y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= -2x \cos(x^2 + y).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\nabla f(0, 0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
H_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

El desarrollo de Taylor de orden dos de $f(x, y) = \cos(x^2 + y)$ en $(0, 0)$ viene entonces dado por:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r_2(x,y) \\
\cos(x^2+y) &= 1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r_2(x,y) \\
\cos(x^2+y) &= 1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r_2(x,y) \\
\cos(x^2+y) &= 1 - \frac{y^2}{2} + r_2(x,y),
\end{aligned}
$$

donde $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(x^2+y)-1+x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} &= \frac{1-\frac{y^2}{2}+r_2(x,y)-1+x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+(\alpha-1/2)y^2+r_2(x,y)}{x^2+y^2} \\
\frac{\cos(x^2+y)-1+x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} &= \frac{x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2} + \frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} \\
\frac{x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2} &= \frac{\cos(x^2+y)-1+x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} - \frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

Tomando $(x,y)\to(0,0)$, se tiene

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y)-1+x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} = 1-0 = 1.
$$

De lo anterior se sigue que $\alpha - 1/2 = 1$, es decir, $\alpha = 3/2$.

Otra manera de resolver este ejercicio es la siguiente: se nos dice que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y)-1+x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2}$ existe y vale uno. En particular, esto se cumplirá para cualquier límite direccional. Si hacemos el límite a lo largo de la recta $x=0$, y aplicamos un par de veces al Regla de l'Hôpital, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{\cos(y)-1+\alpha y^2}{y^2} &= 1 \\
\lim_{y\to 0} \frac{-\sin(y)+2\alpha y}{2y} &= 1 \\
\lim_{y\to 0} \frac{-\cos(y)+2\alpha}{2} &= 1 \\
2\alpha - 1 &= 2 \\
2\alpha &= 3 \\
\alpha &= 3/2.
\end{aligned}
$$

V2: Hallar el valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ para el cual

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y)-1+2x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} = 2.
$$

(A) $\boldsymbol{\alpha = 5/2}$

(B) $\alpha = 3/2$

(C) $\alpha = -3/2$

(D) $\alpha = -5/2$

(E) $\alpha = 0$

Solución: Siguiendo el razonamiento de la versión 1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x^2+y)-1+2x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} &= \frac{1-\frac{y^2}{2}+r_2(x,y)-1+2x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2+(\alpha-1/2)y^2+r_2(x,y)}{x^2+y^2} \\
\frac{\cos(x^2+y)-1+2x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} &= \frac{2x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2}+\frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} \\
\frac{2x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2} &= \frac{\cos(x^2+y)-1+2x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2}-\frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Tomando $(x,y)\to(0,0)$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2+y)-1+2x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} = 2-0=2.$$

De lo anterior se sigue que $\alpha-1/2=2$, es decir, $\alpha=5/2$.

Otra manera de resolver este ejercicio es la siguiente: se nos dice que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2+y)-1+2x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2}$ existe y vale 2. En particular, esto se cumplirá para cualquier límite direccional. Si hacemos el límite a lo largo de la recta $x=0$, y aplicamos un par de veces al Regla de l'Hôpital, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to0}\frac{\cos(y)-1+\alpha y^2}{y^2} &= 2 \\
\lim_{y\to0}\frac{-\sin(y)+2\alpha y}{2y} &= 2 \\
\lim_{y\to0}\frac{-\cos(y)+2\alpha}{2} &= 2 \\
2\alpha-1 &= 4 \\
2\alpha &= 5 \\
\alpha &= 5/2.
\end{aligned}$$

V3: Hallar el valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ para el cual

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2+y)-1-x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} = -1.$$

(A) $\boldsymbol{\alpha=-1/2}$

(B) $\alpha=1/2$

(C) $\alpha=3/2$

(D) $\alpha=-3/2$

(E) $\alpha=0$

Solución: Siguiendo el razonamiento de la versión 1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x^2+y)-1-x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} &= \frac{1-\frac{y^2}{2}+r_2(x,y)-1-x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} = \frac{-x^2+(\alpha-1/2)y^2+r_2(x,y)}{x^2+y^2} \\
\frac{\cos(x^2+y)-1-x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} &= \frac{-x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2}+\frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} \\
\frac{-x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2} &= \frac{\cos(x^2+y)-1-x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2}-\frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Tomando $(x,y)\to(0,0)$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x^2+(\alpha-1/2)y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2+y)-1-x^2+\alpha y^2}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} = -1-0=-1.$$

De lo anterior se sigue que $\alpha - 1/2 = -1$, es decir, $\alpha = -1/2$.

Otra manera de resolver este ejercicio es la siguiente: se nos dice que el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y) - 1 - x^2 + \alpha y^2}{x^2+y^2}$ existe y vale -1. En particular, esto se cumplirá para cualquier límite direccional. Si hacemos el límite a lo largo de la recta $x = 0$, y aplicamos un par de veces al Regla de l'Hôpital, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{\cos(y) - 1 + \alpha y^2}{y^2} &= -1 \\
\lim_{y\to 0} \frac{-\sin(y) + 2\alpha y}{2y} &= -1 \\
\lim_{y\to 0} \frac{-\cos(y) + 2\alpha}{2} &= -1 \\
2\alpha - 1 &= -2 \\
2\alpha &= -1 \\
\alpha &= -1/2.
\end{aligned}$$

Múltiple Opción #3

V1: Se asume que existe la integral doble mostrada a continuación para una función continua $f\colon D \to \mathbb{R}$ sobre una región D y que

$$\iint_D f = \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

Si se invierte el orden de integración, entonces:

(A) $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-2}^{0} \left(\int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y)\ dy \right) dx}$

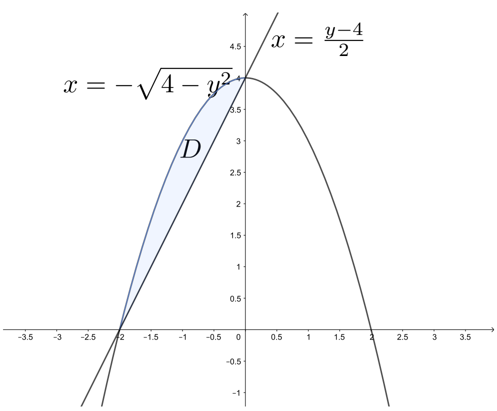
(B) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{4-x^2}^{2x+4} f(x,y)\ dy \right) dx$

(C) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{2x+4}^{\sqrt{16+8x}} f(x,y)\ dy \right) dx$

(D) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{x+2}^{4-x^2} f(x,y)\ dy \right) dx$

(E) $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(\int_{-\sqrt{4-x}}^{(x-4)/2} f(x,y)\ dy \right) dx$

Solución: De la figura



obtenemos que el conjunto D es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \leq x \leq 0, \ 2x+4 \leq y \leq 4 - x^2\}.$$

Luego,

$$\iint_D f = \int_{-2}^{0} \left(\int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y) \ dy \right) dx.$$

V2: Se asume que existe la integral doble mostrada a continuación para una función continua $f \colon D \to \mathbb{R}$ sobre una región D y que

$$\iint_D f = \int_0^4 \left(\int_{(4-y)/2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y) \ dx \right) dy.$$

Si se invierte el orden de integración, entonces:

(A) $\boldsymbol{\int_0^2 \left(\int_{4-2x}^{4-x^2} f(x,y) \ dy \right) dx}$

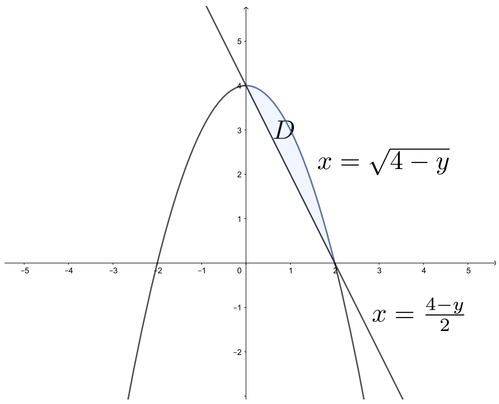
(B) $\int_0^2 \left(\int_{4-x^2}^{4-2x} f(x,y) \ dy \right) dx$

(C) $\int_0^2 \left(\int_{2-x}^{4-x^2} f(x,y) \ dy \right) dx$

(D) $\int_0^2 \left(\int_{4-2x}^{\sqrt{16-8x}} f(x,y) \ dy \right) dx$

(E) $\int_0^4 \left(\int_{(4-x)/2}^{\sqrt{4-x}} f(x,y) \ dy \right) dx$

Solución: De la figura



obtenemos que el conjunto D es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 2, \ 4-2x \leq y \leq 4 - x^2\}.$$

Luego,

$$\iint_D f = \int_0^2 \left(\int_{4-2x}^{4-x^2} f(x,y) \ dy \right) dx.$$

V3: Se asume que existe la integral doble mostrada a continuación para una función continua $f\colon D \to \mathbb{R}$ sobre una región D y que

$$\iint_D f = \int_0^4 \left(\int_{(y-4)/2}^{-2+\sqrt{y}} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

Si se invierte el orden de integración, entonces:

(A) $\boldsymbol{\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{(x+2)^2}^{2x+4} f(x,y)\ dy \right) dx}$

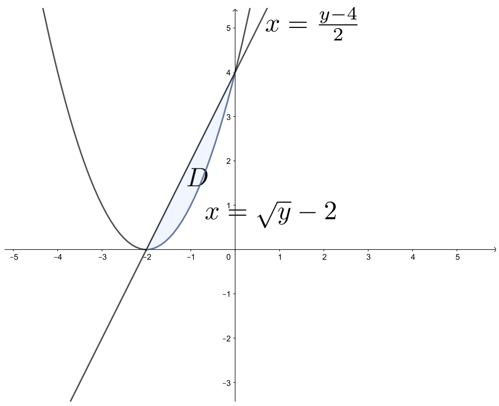
(B) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{2x+4}^{(x+2)^2} f(x,y)\ dy \right) dx$

(C) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{(x+2)^2}^{x+2} f(x,y)\ dy \right) dx$

(D) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{4-\sqrt{-8x}}^{2x+4} f(x,y)\ dy \right) dx$

(E) $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(\int_{(x-4)/2}^{-2+\sqrt{x}} f(x,y)\ dy \right) dx$

Solución: De la figura



obtenemos que el conjunto D es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -2 \leq x \leq 0,\ 2x+4 \leq y \leq (x+2)^2\}.$$

Luego,

$$\iint_D f = \int_{-2}^{0} \left(\int_{(x+2)^2}^{2x+4} f(x,y) dy \right) dx.$$

D1

(a) Defina qué significa que una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sea diferenciable en un punto (x_0, y_0). `[3 puntos]`

Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+3y^2)\cos\left(\dfrac{1}{2x^2+3y^2}\right) + 2x - 3y + 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, en caso de existir. `[4 puntos]`

(c) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$. `[7 puntos]`

(d) Determine si f es de clase C^1. `[4 puntos]`

Solución:

(a) Ver teórico.

(b) Como $(0,0)$ es un punto donde la función puede presentar problemas, en necesario usar la definición de derivada parcial en $(0,0)$ para poder determinar su existencia, es decir, calcular (en caso de existir) el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}.$$

Como $(h,0) \neq (0,0)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(2h^2+3\cdot 0^2)\cos\left(\frac{1}{2h^2+3\cdot 0^2}\right) + 2h - 3\cdot 0 + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2\cos\left(\frac{1}{2h^2}\right)+2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2h\cos\left(\frac{1}{2h^2}\right) + 2 = 2, \end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{h\to 0} 2h\cos\left(\dfrac{1}{2h^2}\right) = 0$ ya que $\lim\limits_{h\to 0} 2h = 0$ y $\cos\left(\frac{1}{2h^2}\right)$ es una función acotada en un entorno reducido de 0. Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2.$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(2\cdot 0^2+3h^2)\cos\left(\frac{1}{2\cdot 0^2+3h^2}\right) + 2\cdot 0 - 3h + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2\cos\left(\frac{1}{3h^2}\right)-3h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 3h\cos\left(\frac{1}{3h^2}\right) - 3 = -3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -3.$$

(c) Para determinar si f es diferenciable en $(0,0)$, se debe usar la definición de diferenciabilidad, ya que f puede presentar problemas en dicho punto. Recordemos que f es diferenciable en $(0,0)$ si:

- Las derivadas parciales de f en $(0,0)$ existen.
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = 0.$

La primera condición la tenemos por la parte (b). Para verificar la segunda, simplemente calculamos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2+3y^2)\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+2x-3y+1-1-2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2+3y^2)\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+3\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Respecto al límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)$, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)\right) = 0,$$

al ser el producto de una función con límite cero en $(0,0)$ (a saber, $(x,y)\to x$) por una función acotada en un entorno reducido de $(0,0)$ (a saber, $(x,y)\to \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)$). En efecto, la primera afirmación es evidente, mientras que para la segunda se tiene que

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\left|\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)\right| \le \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \le 1.$$

De manera similar, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} &= 2\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+3\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right) \\
&= 2\cdot 0+3\cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es decir, f es diferenciable en $(0,0)$.

(d) Para determinar si f es de clase C^1, debemos estudiar la continuidad de las funciones derivadas parciales de orden uno. De momento sólo tenemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-3$. Para calcular las derivadas parciales en los puntos diferentes de $(0,0)$, usamos las reglas de derivación.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left((2x^2+3y^2)\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+2x-3y+1\right) \\
&= 4x\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+(2x^2+3y^2)\left(-\sin\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{(2x^2+3y^2)^2}\cdot 4x\right)+2 \\
&= 4x\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+\left(-\sin\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2x^2+3y^2}\cdot 4x\right)+2 \\
&= 4x\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+\frac{4x}{2x^2+3y^2}\sin\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+2.
\end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 4x\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+\frac{4x}{2x^2+3y^2}\sin\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right)+2 & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 2 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

La función $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en todo punto diferente del origen, por lo que habría que estudiar su continuidad en $(0,0)$. Tenemos entonces que estudiar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 4x\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right) + \frac{4x}{2x^2+3y^2}\sin\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right) + 2.$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 4x\cos\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right) = 0$ (función con límite cero en $(0,0)$ por función acotada en un entorno reducido de $(0,0)$) y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} = 2$, el problema se reduce a estudiar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x}{2x^2+3y^2}\sin\left(\frac{1}{2x^2+3y^2}\right).$$

El límite anterior no existe, porque el límite unidimensional no existe a lo largo de la recta $y=0$, es decir,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x^2}\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

no existe. Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

no existe, por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, y entonces f no es de clase C^1. Se puede llegar a la misma conclusión analizando $\frac{\partial f}{\partial y}$.

D2

(a) Enuncie el Teorema de Cambio de Variable para integrales triples. `[3 puntos]`

(b) Sea

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y \geq |x|,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\},$$

y g el cambio de variable a coordenadas cilíndricas que asocia a la terna (ρ,θ,z) la terna (x,y,z). Realice un bosquejo aproximado de D y $g^{-1}(D)$. `[6 puntos]`

(c) Sea $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, dada por

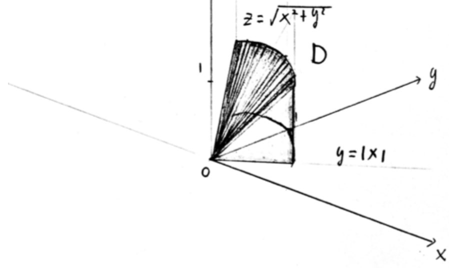
$$f(x,y,z) = yz.$$

Calcule $\displaystyle\iiint_D f$, donde D es la región de la parte (b). `[9 puntos]`

Solución:

(a) Ver teórico.

(b) Viendo la figura



tenemos que

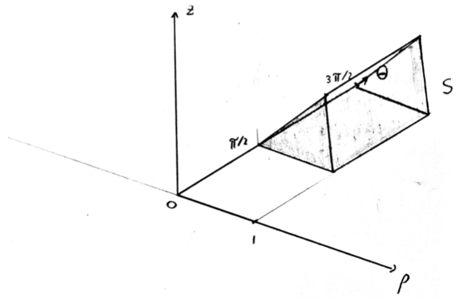
$$0 \leq \rho \leq 1,\quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4 \ \text{ y } \ 0 \leq z \leq \rho.$$

Luego,

$$D = \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \rho \leq 1, \ \ \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4 \ \text{ y } \ 0 \leq z \leq \rho\}.$$

Por otro lado, el conjunto a donde pertenecen las coordenadas cilíndricas viene dado por

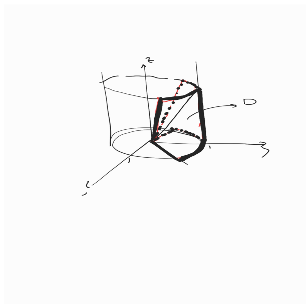
$$g^{-1}(D) = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \rho \leq 1, \ \ \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4 \ \text{ y } \ 0 \leq z \leq \rho\}.$$

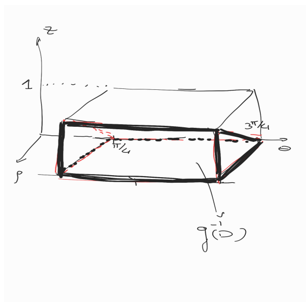


El conjunto $g^{-1}(D)$ también pueden representarse de la siguiente manera:

$$g^{-1}(D) = \{(\rho, \theta, z) : \ \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4; \ 0 \leq z \leq 1; \ z \leq \rho \leq 1\}.$$

Los bosquejos de D y de $g^{-1}(D)$:





La región D tiene como frontera una parte del cono, parte de los planos $z = 0$, $y = x$, $y = -x$ y parte de un cilindro. En resumen es un subconjunto compacto de un cilindro sólido. El conjunto $g^{-1}(D)$ es la "mitad" de un prisma de caras paralelas a los planos coordenados. Entonces g manda una parte compacta del prisma en una parte compacta de un cilindro lo cual tiene sentido ya que estamos usando las coordenadas cilíndricas.

(c) Calcularemos la integral $\displaystyle\iiint_D f$ mediante el cambio a coordenadas cilíndricas de la parte (b). Por el teorema de cambio de variables para integrales triples, se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{g^{-1}(D)} f(g(\rho, \theta, z))|\det(J_g(\rho, \theta, z))|drd\theta dz$$

donde $g\colon g^{-1}(D) \to D$ es el cambio de variables dado por

$$g(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z).$$

Tenemos que

$$J_g(\rho,\theta,z)=\left(\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos(\theta)) & \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\cos(\theta)) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\cos(\theta))\\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin(\theta)) & \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin(\theta)) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\sin(\theta))\\ \frac{\partial}{\partial\rho}(z) & \frac{\partial}{\partial\theta}(z) & \frac{\partial}{\partial z}(z)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}\det(J_g(\rho,\theta,z))&=\det\left(\begin{array}{ccc}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\det\left(\begin{array}{cc}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta)\end{array}\right)\\ &=\rho\cdot\det\left(\begin{array}{cc}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{array}\right)=\rho(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))=\rho.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\iiint_D f&=\iiint_{g^{-1}(D)} f(g(\rho,\theta,z))|\det(J_g(\rho,\theta,z))|drd\theta dz\\ &=\int_0^1\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\int_0^\rho(\rho\sin(\theta)z\rho)dz\right)d\theta\right)d\rho=\int_0^1\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\rho^2\sin(\theta)\int_0^\rho zdz\right)d\theta\right)d\rho\\ &=\int_0^1\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\rho^2\sin(\theta)\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^\rho\right)d\theta\right)d\rho=\int_0^1\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\rho^2\sin(\theta)\frac{\rho^2}{2}\right)d\theta\right)d\rho\\ &=\int_0^1\frac{\rho^4}{2}\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin(\theta)d\theta\right)d\rho=\int_0^1\frac{\rho^4}{2}\left(-\cos(\theta)|_{\pi/4}^{3\pi/4}\right)d\rho=\int_0^1\frac{\rho^4}{2}\left(\cos(\pi/4)-\cos(3\pi/4)\right)d\rho\\ &=\int_0^1\frac{\rho^4}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}d\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\rho^4d\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^1=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

También se puede hacer el cálculo de la integral anterior usando la segunda representación mostrada para $g^{-1}(D)$:

$$\begin{aligned}\iiint_D yzdxdydz&=\iiint_{g^{-1}(D)}\rho^2\sin(\theta)zd\rho d\theta dz=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin(\theta)\int_0^1\int_z^1\rho^2zd\rho dz\\ &=\sqrt{2}\int_0^1\int_z^1\rho^2zd\rho dz=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 z-z^4dz=\frac{\sqrt{2}}{3}(1/2-1/5)=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{10}\\ &=\frac{\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$