1 Respuestas Múltiple Opción

1. A
2. A
3. D
4. C
5. D
6. D

2 Resolución ejercicios M.O.

1. Tenemos que hallar la solución $x' - 6x + 25x = 0$, con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y —$x'(0) = 4$.
Para esto, planteamos el polinomio característico asociado a la ecuación: $\lambda^2 - 6\lambda + 2$ y hallamos sus raíces:
$$\frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = 3 \pm 4i.$$
La solución general es de la forma:
$$x(t) = e^{3x}(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x).$$
Sabemos que $x(0) = 0$ y que $x(0) = C_2$, luego $C_2 = 0$.
Así que $x(t) = C_1 e^{3x} \sin 4x$ y por lo tanto,
$$x'(t) = e^{3x}(3C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x).$$
Como $x'(0) = 4$ y $x'(0) = 4C_2$, luego $c_2 = 1$ y
$$x(t) = e^{3x} \sin 4x \quad \text{y} \quad x(\pi) = 0.$$

---

2. Hallamos la solución de $x'(t) = -2tx(t)$ tal que $x(0) = 1$.
$$x'(t) = -2tx(t) \to \frac{x'(t)}{x(t)} = -2t,$$
integrando con respecto de t y aplicando el teorema de cambio de variable en la parte a la izquierdda del signo de igual:
$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int -2tdt \to \ln |x(t)| = -t^2 + C \to |x(t)| = e^{-t^2+c} = Ke^{-t^2},$$
donde C es una constante real y $K = e^C > 0$. Para eliminar las barras de valor absoluto, hacemos que $K \in R : x(t) = Ke^{-t^2}$.
Como $x(0) = 1$ y esto implica $K = 1$:
$$x(t) = e^{-t^2} \to x'(t) = -2te^{t^2} \to x''(t) = -2e^{-t^2} + (4t^2)e^{-t^2} \to x''(0) = -2$$

---

3. Estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(6+\frac{6}{n}\right) - \log\left(6+\frac{6}{n+2}\right).$$

Definimos:

- $a_n = \log(6+\frac{6}{n})$,
- $b_n = \log\left(6+\frac{6}{n}\right) - \log\left(6+\frac{6}{n+2}\right)$
- $B_K = \sum_{n=1}^{K} b_n$..

Observar que $b_n = a_n - a_{n+2} = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{n=1}^{K} b_n = \sum_{n=1}^{K} a_n - a_{n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{K} (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) \\
&= \sum_{n=1}^{K} (a_n - a_{n+1}) + \sum_{n=1}^{K} (a_{n+1} - a_{n+2})
\end{aligned}$$

Calculemos,

(a) $\sum_{n=1}^{K} (a_n - a_{n+1}) = (a_1 - a_2) - (a_1 - a_2) - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_K - a_{K+1}) = a_1 - a_{K+1}$,

(b) $\sum_{n=1}^{K} (a_{n+1} - a_{n+2}) = (a_2 - a_3) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{K+1} - a_{K+2}) = a_2 - a_{K+2}$

$$B_K = \sum_{n=1}^{K} (a_n - a_{n+1}) - \sum_{n=1}^{K} (a_{n+1} - a_{n+2}) = a_1 + a_2 - a_{K+1} - a_{k+2}.$$

Queremos saber como se comporta $\lim_{K\to+\infty} B_K$. Observar que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \log 6$, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \log 6$ y $\lim_{n\to+\infty} a_{n+2} = \log 6$.
Luego,

$$\lim_{K\to+\infty} B_K = \log 12 + \log 9 - 2\log 6$$

---

4. Clasificar $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ y $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

(a) SERIE: Tenemos que $f(n) > 0$ para todo $n > 1$. Además si $n \geq 3$ entonces

$$\log n > 1 \Rightarrow \frac{\log n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergemte y usando el criterio de compración de serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ diverge

(b) Integral Impropia
Calculemos:

$$\int_1^T \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \log x\sqrt{x}|_1^T - \int_1^T \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2\log n\sqrt{n} - 4\sqrt{n} + 4$$

Luego

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{T \to +\infty} \int_1^T \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = +\infty$$

5. Definamos a_n la altura del enesímo rebote, tenemos que $a_0 = 2$ y que por letra $a_{n+1} = \frac{2}{3}$. Por lo tanto:

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Luego de que la pelota rebote por primera vez, sube una distancia $2\frac{2}{3}$, y a su vez la tiene que bajar: por lo tanto en cada recorre en el primer rebote una distancia total de : $a_0 + 2a_1$; en el segundo recorre $a_0 + 2a_1 + 2a_2$. En general la distancia recorrida en el enesímo rebote es: $2 + \sum_{n=1}^{n} 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$ Queremos calcular el total recorrido ypara eso recurrimos a la suma infinita.

$$\begin{aligned}
d =& 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\
=& 2 + 4\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\
=& 2 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) \\
=& 10.
\end{aligned}$$

---

6. Clasificar $\int_0^1 \left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)^s$

(a) Caso $s \geq 0$.
Observar que:

$$\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)^s \geq 0$$

si $0 \leq x < 1$ y usando el criterio del equivalente la integral que queremos integrar se comporta de la misma manera que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2s}}dx$. Usando la definición de integral impropia y el cambio de variable $y = x - 1$ tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2s}}dx = \lim_{T\to 1^-} \int_0^T \frac{1}{(x-1)^{2s}}dx = \lim_{U\to 0^-} \int_{-1}^U \frac{1}{y^{2s}}dy$$

Como la función $\dfrac{1}{y^{2s}}$ es par:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2s}}dx = \lim_{U\to 0^+} \int_U^1 \frac{1}{y^{2s}}dy,$$

Esta integral diverge si $2s > 1$ y converge si $2s < 1$.
Luego si $s \geq 0$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)^s$ converge sí $0 \leq s < \dfrac{1}{2}$. Resta estudiar el caso $s < 0$

(b) Caso $s < 0$.
Observar que:

$$\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)^s \geq 0$$

si $0 < x \leq 1$, además y usando el criterio del equivalente la integral se comporta de la misma manera que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{-s}}dx$.
Dicha integral converge si $-s > 1$ y por lo tanto $-1 < s < 0$.

Usando las partes (a) y (b) concluimos que:

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)^s \quad \text{converge sí y sólo sí} \quad -1 < s < \frac{1}{2}$$

3 Solución del Problema de Desarrollo

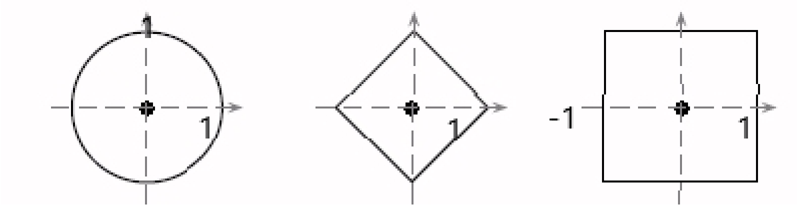
1. Definimos las normas pedidas:

   (a) $|(x_1,\ldots,x_d)|_1 = |x_1| + \ldots + |x_d|$

   (b) $|(x_1,\ldots,x_d)|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$

   (c) $|(x_1,\ldots,x_d)|_\infty = \max\{|x_1|,\ldots,|x_d|\}$

2. En R^2 dibujar $B((0,0),1)$



La primera imagen corresponde a la $|,|_2$, la segunda a $|,|_1$ y al tercera a $|,|_\infty$

3. Como las normas son funciones positivas para demostrar que norma Euclídes es menor o igual a su norma de la sumas, podemos mostrar que **el cuadrado de la norma euclídea es menor o igual al cuadrado de la norma de la suma**. Dado $(x, y) \in R^2$:

$$|(x,y)|_2^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |(x,y)|_1^2$$

Para que se de la igualdad, necesariamente tiene que pasar que $2|x||y| = 0$ y por lo tanto las nomras coinciden sólo sí $x = 0$ o $y = 0$