Práctico 6–Solución – Topología en $\mathbb{R}^n$

Nota: en $\mathbb{R}^n$, a menos que se aclare lo contrario, asumiremos que estamos trabajando con la distancia euclídia.

En este documento se presentan las soluciones a los ejercicios del práctico, algunos de ellos con desarrollo a modo de guía para resolver el resto. A continuación algunas definiciones y observaciones para tener en cuenta:

Definiciones:
Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y p un punto de $\mathbb{R}^n$.

- *Una Bola de centro p y radio r es $B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x,p) < r\}$*
- *Decimos que el punto p es:*
  ***Interior** a A si existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subseteq A$*
  ***Exterior** a A si existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subseteq A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$*
  ***Frontera** de A si $\forall r > 0$ $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(p,r) \cap A^c \neq \emptyset$. Es decir, toda bola centrada en p tiene puntos de A y de A^c.*
- *Definimos el **interior** de A como $int(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ interior a } A\}$*
  *Decimos que A es **abierto** si $A = int(A)$*
- *El conjunto A es **cerrado** si A^c es abierto.*
- *La **frontera o borde** de A es $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ frontera de } A\}$*
- *Definimos la **clausura** de A como $\overline{A} = A \cup \partial A$*
- *Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de acumulación** si $\forall r > 0$ $\Big(B(p,r) \cap \big(A \setminus \{p\}\big)\Big) \neq \emptyset$. Es decir, toda bola centrada en p tiene elementos de A distintos de p.*
  Denotamos a los puntos de acumulación de A como A'
- *Decimos que A es **acotado** si existen $q \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ tales que $A \subseteq B(q,R)$*
- *Decimos que A es **compacto** si es cerrado y acotado.*

Observaciones:

- *Los puntos son cerrados. Es decir, si $q \in \mathbb{R}^n$, $\{q\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cerrado.*
- *Un punto $q \in \mathbb{R}^n$ es exterior a A si y solo si es interior a A^c.*
- *Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados.*
- *Un conjunto A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$*
- *La frontera de un conjunto A y su complemento coinciden: $\partial A = \partial(A^c)$*

Ejercicio 1

Las funciones a estudiar en este ejercicio son las siguientes:

(i) $N(x,y) = |x| + |y|$

(ii) $N(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(iii) $N(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$

(iv) $N(x,y) = |x+y|$

a) Las funciones correspondientes a (i),(ii) y (iii) son normas. La función (iv) no es norma pues para dicha función se tiene, por ejemplo, $N(1,-1) = 0$ con $(1,-1) \neq (0,0)$.

b) Si llamamos $B_1,\ B_2,\ B_3$ a las bolas de centro $(3,4)$ y radio 2 asociadas a las normas (i), (ii) y (iii) respectivamente, se tiene que:

- $(3,4) \in B_1$, $(3,4) \in B_2$, $(3,4) \in B_3$
- $(4,5) \notin B_1$, $(4,5) \in B_2$, $(4,5) \in B_3$
- $(0,1) \notin B_1$, $(0,1) \notin B_2$, $(0,1) \notin B_3$

Para probar lo anterior basta con calcular la distancia de los puntos al centro de la bola según las distancias inducidas por las tres normas.

Observación: En general tenemos que $N(x,y) = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$ *con* $p \geq 0$ *es una norma en* $\mathbb{R}^2$*. Vemos que en este ejercicio, la norma (i) corresponde a* $p = 0$*, la norma (ii) corresponde a* $p = 2$ *y la norma (iii) corresponde a "*$p = +\infty$*", es decir* $\lim_{p\to+\infty} \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$.

c) Dos normas N y M son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha N \leq M \leq \beta N$. Escribiremos esto como $N \sim M$. Observamos primero que la relación "ser normas equivalentes" es en efecto una relación de equivalencia. Es decir, se cumplen las tres siguientes condiciones (de fácil verificación):

- $N \sim N$
- Si $N \sim M$ entonces $M \sim N$
- Si $N \sim M$ y $M \sim P$ entonces $N \sim P$ (donde P es otra norma)

Llamamos N_1, N_2, N_3 a las normas correspondientes a (i), (ii) y (iii) respectivamente. Por lo tanto, para ver que las normas son equivalentes basta con probar que $N_1 \sim N_3$ y que $N_2 \sim N_3$.

Sea (x,y) un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $|x| \geq |y|$, por lo que $N_3(x,y) = |x|$. Entonces:

- $N_1 \sim N_3$: Basta con tomar $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$:

$$\frac{1}{2}(|x| + |y|) \leq \frac{1}{2}(|x| + |x|) = |x| \leq |x| + |y|$$

- $N_2 \sim N_3$: Basta con tomar $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\beta = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+y^2}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+x^2}) = \sqrt{x^2} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Por lo tanto todas las normas son equivalentes. De hecho, de forma análoga podemos probar que todas las normas de la forma $N(x,y) = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$ son equivalentes.

Ejercicio 2

a) Conjuntos acotados: A_1, B, A_3, C, A_5, A_6.

b,c)

- $int(A_1) = \{(x,y) :\ 1 < x < 2,\ 1 < y < 3\}$,
  $\partial A_1 = \{(x,y) :\ 1 \leq x \leq 2,\ y \in \{1,3\}\} \cup \{(x,y) :\ 1 \leq y \leq 3,\ x \in \{1,2\}\}$,
  $\overline{A_1} = \{(x,y) :\ 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$
  $A_1' = \overline{A_1}$
- $int(B) = \emptyset$,
  $\partial B = \overline{A_1}$
  $\overline{B} = \partial B$
  $B' = \partial B = \overline{A_1}$
- $int(A_2) = \emptyset$,
  $\partial A_2 = A_2$
  $\overline{A_2} = A_2$
  $A_2' = A_2$
- $int(A_3) = A_3$,
  $\partial A_3 = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$
  $\overline{A_3} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
  $A_3' = \overline{A_3}$
- $int(C) = \emptyset$,
  $\partial C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
  $\overline{C} = \partial C$
  $C' = \overline{C} = \partial C$
- $int(A_4) = \{(x,y) :\ 2x^2 + y^2 < 1\}$,
  $\partial A_4 = \{(x,y) :\ 2x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) : x = y, 2x^2 + y^2 > 1\}$
  $\overline{A_4} = A_4 \cup \{(x,y) :\ 2x^2 + y^2 = 1\}$
  $A_4' = \overline{A_4}$
- $int(A_5) = \emptyset$,
  $\partial A_5 = A_5 \cup \{(-1,1),(1,1)\}$
  $\overline{A_5} = \partial A_5$
  $A_5' = \{(-1,1),(1,1)\}$
- $int(A_6) = A_6$,
  $\partial A_6 = \{(x,y,z) :\ x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\} \cup \{(x,y,z) : z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$
  $x + y \leq 1\} \cup \{(x,y,z) : x = 0,\ z \geq 0,\ y \geq 0,\ z + y \leq 1\} \cup \{(x,y,z) : y = 0,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ x + z \leq 1\}$
  $\overline{A_6} = \{(x,y,z) :\ x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
  $A_6' = \overline{A_6}$
- $int(A_7) = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + 1 < z\}$
  $\partial A_7 = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + 1 = z\}$
  $\overline{A_7} = A_7$
  $A_7' = \overline{A_7} = A_7$

d) Los únicos conjuntos abiertos son: A_3 y A_6.

e) Los únicos conjuntos cerrados son: A_2 y A_7.

f) Ningun conjunto es compacto.

Ejercicio 3

a) Probemos que toda Bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $B = B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\}$. Por definición de conjunto abierto, hay que probar que cualquier $y \in B$ admite una bola centrada en y contenida en B.

Sea $0 < \alpha < \big(r - d(p, y)\big)$. Luego, $B(y, \alpha) \subseteq B$, ya que si $z \in B(y, \alpha)$ por desigualdad triangular se cumple

$$d(z, p) \leq d(z, y) + d(y, p) < \alpha + d(p, y) = r$$

Y por lo tanto $z \in B$. Como z es arbitrario $B(y, \alpha) \subseteq B$. Como y es arbitrario, B es abierto.

b) Probemos que si $p \in A$ y A es abierto, $\hat{A} = A \setminus \{p\}$ también.

De nuevo, tenemos que probar que cualquier $y \in \hat{A}$ admite una bola centrada en y contenida en $\hat{A}$.

Como $y \in A$ y A abierto, existe r tal que $B(y, r) \subseteq A$. Tomamos $\alpha = \text{mín}\{r, d(y, p)\}$, entonces $B(y, \alpha) \subseteq \hat{A}$, pues:

$$B(y, \alpha) \subseteq A,\ p \neq B(y, \alpha) \text{ implica } B(y, \alpha) \subseteq \hat{A}$$

Por lo tanto el conjunto $\hat{A} = A \setminus \{p\}$ es abierto.

Ejercicio 4

Sea A abierto de $\mathbb{R}^2$, $C = A \cap \mathbb{Q}^2$.
Entonces $int(C) = \emptyset$, $\overline{C} = \overline{A}$ y $\partial C = \overline{A}$.

Sugerencias para las pruebas:

- Es conveniente observar que dados $x_1 < x_2$ números reales, entonces existen $q \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $x_1 < q < x_2$ y $x_1 < r < x_2$.
- También será útil probar que para cualquier conjunto B se tiene $\overline{B} = B \cup \partial B = int(B) \cup \partial B$ (observar que la última unión es disjunta). Como $int(C) = \emptyset$ se deduce $\partial C = \overline{C}$.

Ejercicio 5

Consideramos A, B dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$, y definimos su suma como

$$A + B = \{a + b :\ a \in A,\ b \in B\}$$

Probemos que si A es abierto, $A + B$ también:

Tomamos $a + b$ un elemento genérico de $A + B$, queremos probar que hay una bola centrada en $a + b$ contenida en $A + B$.

Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$. Veamos que el mismo r sirve para $a + b$, es decir, que $B = B((a + b), r) \subseteq (A + B)$:

Dado $y \in B$ (se tiene $d(y, (a + b)) < r$), definimos $\tilde{a} = y - b$. Observamos que

$$d((y - b), a) = ||(y - b) - a|| = ||y - (a + b)|| = d(y, (a + b)) < r$$

Por lo que $(y - b) \in B(a, r) \subseteq A$, es decir $(y - b) = \tilde{a} \in A$, lo que implica $y = \tilde{a} + b \in (A + B)$. Como y es generico, $B \subseteq (A + B)$. Como $a + b$ es genérico, $A + B$ es abierto.

Sin embargo, no podemos decir lo mismo si tomamos dos conjuntos cerrados (si uno es abierto y otro cerrado, como vimos, la suma es un abierto)

Si A y B son conjuntos cerrados, entonces $A + B$ no es necesariamente cerrado:

Obviamente sí hay casos donde la suma de cerrados es un cerrado (basta con tomar $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$). Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}$ donde A y B cerrados y $A + B$ no:

Definimos $A = \{-n : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2\}$ y $B = \{n + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2 \ \}$. Tanto A como B son un conjunto de puntos aislados, por lo tanto son cerrados.

Recordamos que un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación, por lo que para ver que $A+B$ no es cerrado basta con observar que $0 \notin A + B$ y 0 es de acumulación de $A + B$. El punto 0 no está en $A + B$, pues no hay ningún natural en B y por lo tanto al sumarle un entero negativo nunca podrá ser cero. Luego, 0 sí es de acumulación, pues la sucesión de elementos de $A + B$ dado por $(-n) + (n + 1/n) = 1/n$ con $n > 2$ converge a 0.

Ejercicio 7

a) Consideramos $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia de conjuntos abiertos.

Entonces $A = \bigcup_{j\in J} A_j = \{a : a \in A_j \text{ para algún } j \in J\}$ es abierto. A continuación la prueba:

Si $a \in A$, entonces existe $j \in J$ tal que $a \in A_j$. Como A_j abierto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A_j$. Como $A_j \subseteq A$, $B(a, r) \subseteq A$ y por lo tanto A abierto.

b) Consideramos $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos abiertos.

Entonces $\bigcap_1^n A_i = \{a : a \in A_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es un conjunto abierto. La prueba:

Sea $a \in A$. Entonces $a \in A_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Definimos r_i como el radio tal que $B(a, r_i) \subseteq A_i$ (dicho r_i existe porque los conjuntos A_i son abiertos). Por último definimos $r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_n\}$. Entonces $B(a, r) \subseteq A_i$ para todo i, lo que implica $B(a, r) \subseteq \bigcap_1^n A_i$. Esto demuestra que es un conjunto abierto.

Observar que $r \neq 0$ porque tuvimos en cuenta finitos r_i. De hecho esta afirmación no vale para infinitos abiertos. Por ejemplo, podemos considerar los abiertos $A_n = B(0, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$ cuya intersección da $\{0\}$ que no es abierto. En este caso si repetíamos el razonamiento r sería 0 y no conseguiríamos una bola.

c) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado, la unión finita de cerrados es cerrada. Para esto basta con observar que

$$\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)^c = \bigcup_{j\in J} A_j^c$$

$$\Big(\bigcup_{1}^{n} A_i\Big)^c = \bigcap_{1}^{n} A_i^c$$

Luego, como un conjunto es cerrado (abierto) si y solo si su complemento es abierto (cerrado), los incisos a) y b) implican lo mencionado.