Solución Práctico 6 - Topología en $\mathbb{R}^n$

A continuación algunas definiciones y observaciones para tener en cuenta:

Definiciones. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y p un punto de $\mathbb{R}^n$.*

- *Una* ***bola*** *de centro p y radio r es $B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x,p) < r\}$*
- *Decimos que el punto p es:*

  Interior *a A si existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subseteq A$*

  Exterior *a A si existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subseteq A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$*

  Frontera *de A si $\forall r > 0$ $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(p,r) \cap A^c \neq \emptyset$. Es decir, toda bola centrada en p tiene puntos de A y de A^c.*
- *El* ***interior*** *de A es $int(A) = \mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ interior a } A\}$*

  Decimos que A es ***abierto*** *si $A = \mathring{A}$*

  Decimos que A es ***cerrado*** *si A^c es abierto.*
- *La* ***frontera o borde*** *de A es $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ frontera de } A\}$*
- *La* ***clausura*** *de A es $\overline{A} = A \cup \partial A$*
- *Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un* ***punto de acumulación*** *si $\forall r > 0$ $\Big(B(p,r) \cap \big(A \setminus \{p\}\big)\Big) \neq \emptyset$. Es decir, toda bola centrada en p tiene elementos de A distintos de p.*

  Denotamos a los puntos de acumulación de A como A'
- *Decimos que A es* ***acotado*** *si existen $q \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ tales que $A \subseteq B(q,R)$*
- *Decimos que A es* ***compacto*** *si es cerrado y acotado.*

Observaciones. i) Los puntos son cerrados. Es decir, si $q \in \mathbb{R}^n$, $\{q\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cerrado.

ii) Un punto $q \in \mathbb{R}^n$ es exterior a A si y solo si es interior a A^c.

iii) Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados.

iv) Un conjunto A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$

v) La frontera de un conjunto A y su complemento coinciden: $\partial A = \partial(A^c)$

Ejercicio 1

Las funciones a estudiar en este ejercicio son las siguientes:

(i) $N(x,y) = |x| + |y|$

(ii) $N(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(iii) $N(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$

(iv) $N(x,y) = |x + y|$

a) Las funciones correspondientes a (i),(ii) y (iii) son normas. La función (iv) no es norma pues para dicha función se tiene, por ejemplo, $N(1,-1) = 0$ con $(1,-1) \neq (0,0)$.

b) Si llamamos $B_1,\ B_2,\ B_3$ a las bolas de centro $(3,4)$ y radio 2 asociadas a las normas (i), (ii) y (iii) respectivamente, se tiene que:

- $(3,4) \in B_1$, $(3,4) \in B_2$, $(3,4) \in B_3$
- $(4,5) \notin B_1$, $(4,5) \in B_2$, $(4,5) \in B_3$
- $(0,1) \notin B_1$, $(0,1) \notin B_2$, $(0,1) \notin B_3$

Para probar lo anterior basta con calcular la distancia de los puntos al centro de la bola según las distancias inducidas por las tres normas.

Observación. En general tenemos que $N(x,y) = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$ con $p \geq 1$ es una norma en $\mathbb{R}^2$. Vemos que en este ejercicio, la norma (i) corresponde a $p = 1$, la norma (ii) corresponde a $p = 2$ y la norma (iii) corresponde a "$p = +\infty$", es decir $\lim_{p\to+\infty} \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$.

c) Dos normas N y M son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha N \leq M \leq \beta N$. Escribiremos esto como $N \sim M$. Observamos primero que la relación "ser normas equivalentes" es en efecto una relación de equivalencia. Es decir, se cumplen las tres siguientes condiciones (de fácil verificación):

- $N \sim N$
- Si $N \sim M$ entonces $M \sim N$
- Si $N \sim M$ y $M \sim P$ entonces $N \sim P$ (donde P es otra norma)

Llamamos N_1, N_2, N_3 a las normas correspondientes a (i), (ii) y (iii) respectivamente. Por lo tanto, para ver que las normas son equivalentes basta con probar que $N_1 \sim N_3$ y que $N_2 \sim N_3$.

Sea (x,y) un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $|x| \geq |y|$, por lo que $N_3(x,y) = |x|$. Entonces:

- $N_1 \sim N_3$: Basta con tomar $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$:

$$\frac{1}{2}(|x| + |y|) \leq \frac{1}{2}(|x| + |x|) = |x| \leq |x| + |y|$$

- $N_2 \sim N_3$: Basta con tomar $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\beta = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+y^2}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+x^2}) = \sqrt{x^2} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Por lo tanto todas las normas son equivalentes. De hecho, de forma análoga podemos probar que todas las normas de la forma $N(x,y) = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$ son equivalentes.

Ejercicio 2

a) Conjuntos acotados: A_1, B, A_3, C, A_5, A_6.

b,c) A_1 : $\mathring{A}_1 = \{(x,y) :\ 1 < x < 2,\ 1 < y < 3\}$

$\partial A_1 = \{(x,y) :\ 1 \leq x \leq 2,\ y \in \{1,3\}\} \cup \{(x,y) :\ 1 \leq y \leq 3,\ x \in \{1,2\}\}$

$\overline{A_1} = \{(x,y) :\ 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$

$A_1' = \overline{A_1}$

B : $\mathring{B} = \emptyset$

$\partial B = \overline{A_1}$

$\overline{B} = \partial B$

$B' = \partial B = \overline{A_1}$

A_2: $\mathring{A}_2 = \emptyset$
$\partial A_2 = A_2$
$\overline{A_2} = A_2$
$A_2' = A_2$

A_3: $\mathring{A}_3 = A_3$
$\partial A_3 = \{(x,y):\ x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$
$\overline{A_3} = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$
$A_3' = \overline{A_3}$

C: $\mathring{C} = \emptyset$
$\partial C = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$
$\overline{C} = \partial C$
$C' = \overline{C} = \partial C$

A_4: $\mathring{A}_4 = \{(x,y):\ 2x^2+y^2<1\}$
$\partial A_4 = \{(x,y):\ 2x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y): x=y, 2x^2+y^2>1\}$
$\overline{A_4} = A_4 \cup \{(x,y):\ 2x^2+y^2=1\}$
$A_4' = \overline{A_4}$

A_5: $\mathring{A}_5 = \emptyset$
$\partial A_5 = A_5 \cup \{(-1,1),(1,1)\}$
$\overline{A_5} = \partial A_5$
$A_5' = \{(-1,1),(1,1)\}$

A_6: $\mathring{A}_6 = A_6$
$\partial A_6 = \{(x,y,z):\ x+y+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\} \cup \{(x,y,z): z=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\} \cup \{(x,y,z): x=0,\ z\geq 0,\ y\geq 0,\ z+y\leq 1\} \cup \{(x,y,z): y=0,\ x\geq 0,\ z\geq 0,\ x+z\leq 1\}$
$\overline{A_6} = \{(x,y,z):\ x+y+z\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$
$A_6' = \overline{A_6}$

A_7: $\mathring{A}_7 = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+1<z\}$
$\partial A_7 = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+1=z\}$
$\overline{A_7} = A_7$
$A_7' = \overline{A_7} = A_7$

d) Los únicos conjuntos abiertos son: A_3 y A_6.

e) Los únicos conjuntos cerrados son: A_2 y A_7.

f) Ningun conjunto es compacto.

Ejercicio 3

a) Probemos que toda Bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $r>0$ y $B = B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) < r\}$. Por definición de conjunto abierto, hay que probar que cualquier $y \in B$ admite una bola centrada en y contenida en B.

Sea $0 < \alpha < \big(r - d(p,y)\big)$. Luego, $B(y,\alpha) \subseteq B$, ya que si $z \in B(y,\alpha)$ por desigualdad triangular se cumple

$$d(z,p) \leq d(z,y) + d(y,p) < \alpha + d(p,y) = r$$

Y por lo tanto $z \in B$. Como z es arbitrario $B(y,\alpha) \subseteq B$. Como y es arbitrario, B es abierto.

b) Probemos que si $p \in A$ y A es abierto, $\hat{A} = A \setminus \{p\}$ también.

De nuevo, tenemos que probar que cualquier $y \in \hat{A}$ admite una bola centrada en y contenida en $\hat{A}$.

Como $y \in A$ y A abierto, existe r tal que $B(y,r) \subseteq A$. Tomamos $\alpha = \text{mín}\{r, d(y,p)\}$, entonces $B(y,\alpha) \subseteq \hat{A}$, pues:

$$B(y,\alpha) \subseteq A,\ p \notin B(y,\alpha) \text{ implica } B(y,\alpha) \subseteq \hat{A}$$

Por lo tanto el conjunto $\hat{A} = A \setminus \{p\}$ es abierto.

Ejercicio 4

Sea A abierto de $\mathbb{R}^2$, $C = A \cap \mathbb{Q}^2$.
Entonces $\mathring{C} = \emptyset$, $\overline{C} = \overline{A}$ y $\partial C = \overline{A}$.

Sugerencias para las pruebas:

- Es conveniente observar que dados $x_1 < x_2$ números reales, entonces existen $q \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tales que $x_1 < q < x_2$ y $x_1 < r < x_2$.
- También será útil probar que para cualquier conjunto B se tiene $\overline{B} = B \cup \partial B = \mathring{B} \cup \partial B$ (observar que la última unión es disjunta). Como $\mathring{C} = \emptyset$ se deduce $\partial C = \overline{C}$.

Ejercicio 5

Consideramos A, B dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$, y definimos su suma como

$$A + B = \{a + b :\ a \in A,\ b \in B\}$$

a) Tomamos $a + b$ un elemento genérico de $A + B$, queremos probar que hay una bola centrada en $a + b$ contenida en $A + B$.

Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq A$. Veamos que el mismo r sirve para $a+b$, es decir, que $B = B((a+b), r) \subseteq (A + B)$:

Dado $y \in B$ (se tiene $d(y,(a+b)) < r$), definimos $\tilde{a} = y - b$. Observamos que

$$d((y-b), a) = ||(y-b) - a|| = ||y - (a+b)|| = d(y,(a+b)) < r$$

Por lo que $(y-b) \in B(a,r) \subseteq A$, es decir $(y-b) = \tilde{a} \in A$, lo que implica $y = \tilde{a} + b \in (A+B)$. Como y es generico, $B \subseteq (A+B)$. Como $a + b$ es genérico, $A + B$ es abierto.

b) No podemos decir lo mismo si tomamos dos conjuntos cerrados (si uno es abierto y otro cerrado, como vimos, la suma es un abierto).

Obviamente sí hay casos donde la suma de cerrados es un cerrado (basta con tomar $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$).

Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}$ donde A y B cerrados y $A + B$ no:

Definimos $A = \{-n :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$ y $B = \{n + \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\ \}$. Tanto A como B son un conjunto de puntos aislados, por lo tanto son cerrados.

Recordamos que un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación, por lo que para ver que $A + B$ no es cerrado basta con observar que $0 \notin A + B$ y 0 es de acumulación de $A + B$. El punto 0 no está en $A + B$, pues no hay ningún natural en B y por lo tanto al sumarle un entero negativo nunca podrá ser cero. Luego, 0 sí es de acumulación, pues la sucesión de elementos de $A + B$ dado por $(-n) + (n + 1/n) = 1/n$ con $n > 2$ converge a 0.

Ejercicio 7

a) Consideramos $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia de conjuntos abiertos.

Entonces $A = \bigcup_{j\in J} A_j = \{a : a \in A_j \text{ para algún } j \in J\}$ es abierto. A continuación la prueba:

Si $a \in A$, entonces existe $j \in J$ tal que $a \in A_j$. Como A_j abierto, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq A_j$. Como $A_j \subseteq A$, $B(a,r) \subseteq A$ y por lo tanto A abierto.

b) Consideramos $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos abiertos.

Entonces $\bigcap_1^n A_i = \{a : a \in A_i \ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\}$ es un conjunto abierto. La prueba:

Sea $a \in A$. Entonces $a \in A_i$ para $i = 1,\ldots,n$. Definimos r_i como el radio tal que $B(a,r_i) \subseteq A_i$ (dicho r_i existe porque los conjuntos A_i son abiertos). Por último definimos $r = \text{mín}\{r_1,\ldots,r_n\}$. Entonces $B(a,r) \subseteq A_i$ para todo i, lo que implica $B(a,r) \subseteq \bigcap_1^n A_i$. Esto demuestra que es un conjunto abierto.

c) Observar que en el inciso anterior obtuvimos $r \neq 0$ porque tuvimos en cuenta finitos r_i. De hecho esta afirmación no vale para infinitos abiertos. Por ejemplo, podemos considerar los abiertos $A_n = B(0, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$ cuya intersección da $\{0\}$ que no es abierto. En este caso si repetíamos el razonamiento r sería 0 y no conseguiríamos una bola.

d) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado, la unión finita de cerrados es cerrada. Para esto basta con observar que

$$\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)^c = \bigcup_{j\in J} A_j^c$$

$$\Big(\bigcup_1^n A_i\Big)^c = \bigcap_1^n A_i^c$$

Luego, como un conjunto es cerrado (abierto) si y solo si su complemento es abierto (cerrado), los incisos a) y b) implican lo mencionado.

Ejercicio 8

a) Converge a $(0,0)$

b) No converge. Tiene subsucesiones convergentes a $(2,0)$.

c) No converge. Tiene subsucesiones convergentes a $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

d) No converge. Tiene subsucesiones convergentes a $(0,e)$.

e) No converge. Tiene subsucesiones convergentes a $\big(sin(\frac{a\pi}{8}), cos(\frac{b\pi}{3})\big)$ donde a y b son tales que $a \in \{0,\ldots,15\}$, $b \in \{0,\ldots,5\}$, $a-b$ es par.

Veamos en detalle el ejercicio **7e)**:
La sucesión a estudiar es

$$e_n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right),\ \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) = \left(\sin\left(n\frac{2\pi}{16}\right),\ \cos\left(n\frac{2\pi}{6}\right)\right) = \Big(x_n, y_n\Big)$$

Primero descartamos rápidamente que la sucesión no es convergente, pues ninguna de sus entradas lo son (basta con ver que $x_n = \sin(n\pi/8)$ no converge).

Luego, observamos que tanto x_n como y_n son sucesiones periódicas. Específicamente tenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x_n = \sin\left(a\frac{2\pi}{16}\right) & \text{donde } a \text{ es tal que } n = a + 16m,\ a,m \in \mathbb{N},\ a < 16 \\ y_n = \cos\left(b\frac{2\pi}{6}\right) & \text{donde } b \text{ es tal que } n = b + 6k,\ b,k \in \mathbb{N},\ b < 6 \end{cases}$$

Dicho de otra forma:
Si $a < 16$ natural, se tiene $x_{16n+a} = x_a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Si $b < 6$ natural, entonces $y_{6m+b} = y_b$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Entonces tenemos que la sucesión x_n (vista como sucesión de $\mathbb{R}$) tiene subsucesiones convergentes a los puntos $sin(a\frac{2\pi}{16})$ con $a \in \{0, \dots, 15\}$, y por otro lado, la sucesión y_n tiene subsucesiones convergentes a $cos(b\frac{2\pi}{6})$ con $b \in \{0, \dots, 5\}$.

A continuación veremos que la sucesión $e_n = (x_n, y_n)$ tiene subsucesiones que convergen a cualquier combinación de los valores que toman x_n e y_n que cumplan cierta condición:

Consideramos un punto de la forma $(x_a, y_b) = \big(sin(a\frac{2\pi}{16}), cos(b\frac{2\pi}{6})\big)$ con $a \in \{0, \dots, 15\}$ y $b \in \{0, \dots, 5\}$. Buscamos una subsucesión de e_n (eventualmente constante) que converja a este punto, es decir, que a partir de cierto K, $e_{n_k} = (x_a, y_b)$. Observamos que dado n natural

$$(a + 16m) = n = (b + 6k) \iff (a - b) = 2(-8k + 3k)$$

Es decir, si $x_n = x_a$ e $y_n = y_b$ simultáneamente, necesariamente $a - b$ es par. Veamos que esta condición no solo es necesaria, sino suficiente para conseguir una subsucesión $e_{n_k} \xrightarrow{k} (x_a, y_b)$ donde $e_{n_k} = (x_a, y_b)$ para todo k.

Si $a - b$ es un número par, hay dos posibilidades:

- Los números a y b son pares. Se escriben como $a = 2\hat{a}$, $b = 2\hat{b}$, donde $\hat{a} < 8$, $\hat{b} < 3$ son naturales.

- Los números a y b son impares. Se escriben como $a = 2\hat{a} + 1$, $b = 2\hat{b} + 1$, donde $\hat{a} < 8$, $\hat{b} < 3$ son naturales.

En ambos casos $(a - b) = 2(\hat{a} - \hat{b})$.

Observamos que existe una combinación lineal entera en términos de 16 y 6 que nos da 2, por ejemplo
$$(-1)16 + (3)6 = 2$$

Entonces tenemos lo siguiente

$$(\hat{a} - \hat{b})(-1)16 + (\hat{a} - \hat{b})(3)6 = 2(\hat{a} - \hat{b})$$

$$\Big((\hat{b} - \hat{a}) - 6k\Big)16 + \Big(3(\hat{a} - \hat{b}) + 16k\Big)6 = 2(\hat{a} - \hat{b})$$

$$\Big(3(\hat{a} - \hat{b}) + 16k\Big)6 + 2\hat{b} = \Big((\hat{a} - \hat{b}) + 6k\Big)16 + 2\hat{a}$$

Y también obviamente se cumple

$$\Big(3(\hat{a} - \hat{b}) + 16k\Big)6 + 2\hat{b} + 1 = \Big((\hat{a} - \hat{b}) + 6k\Big)16 + 2\hat{a} + 1$$

Es decir, tanto para el caso de a, b pares como a, b impares, encontramos un conjunto infinito de naturales $A_k = \Big((\hat{a} - \hat{b}) + 6k\Big)$ y $B_k = \Big(3(\hat{a} - \hat{b}) + 16k\Big)$ para los cuales tenemos

$$B_k + b = A_k + a$$

Y por lo tanto
$$x_{A_k + a} = x_a, \quad y_{B_k + b} = y_b$$

Por último, basta con tomar la subsucesión correspondiente a

$$n_k = B_k + b = A_k + a$$

Con esta subsucesión conseguimos la subsucesión constante buscada:

$$e_{n_k} = (x_{n_k}, y_{n_k}) = \Big(sin(\frac{a\pi}{8}), cos(\frac{b\pi}{3})\Big)$$

Concluyendo que existen subsucesiones convergentes a $\left(sin(\frac{a\pi}{8}), cos(\frac{b\pi}{3})\right)$ donde $a-b$ par.

***Nota**: El hecho de que no podamos conseguir todas las combinaciones posibles de (x_a, y_b) como límites está relacionado con el Lema de Bézout. Este afirma lo siguiente: Si a, b son enteros con $mcd(a,b) = d$, entonces existen enteros x, y tales que $ax + by = d$. Más aún, d es el menor entero positivo que se puede lograr con combinaciones lineales enteras de a y b.*
En el caso de este ejercicio $mcd(16,6) = 2$ y por lo tanto (como vimos) 2 tiene que dividir a $(a-b)$. Luego, utilizando el Lema de Bézout (sin decirlo) consideramos una combinación lineal entera de 16 y 6 igual a $2 = mcd(16,6)$. A partir de eso construimos la subsucesión.
Sin embargo esto se puede hacer en general. Si consideramos la sucesión $e_n = \left(\sin(n\frac{2\pi}{P}),\ \cos(n\frac{2\pi}{Q})\right)$, la condición será también que $mcd(P,Q)$ divida a $(a-b)$. En el caso particular que P, Q sean coprimos ($mcd(P,Q) = 1$) todas las combinaciones serán posibles.

Ejercicio 9

a) Sea x_n sucesión con límite L y x_{n_k} una subsucesión. Veamos que $x_{n_k} \xrightarrow{k} L$:

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por definición de límite, existe N tal que $\forall n \geq N$ se tiene $d(x_n, L) < \epsilon$.

Recordamos que $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de naturales monótona creciente estricta. Por lo tanto, existe K tal que $\forall k \geq K$, $n_k \geq N$.

Entonces, juntando ambas cosas, $k > K$ implica $d(x_{n_k}, L) < \epsilon$. Esto no es más que la definición de límite para x_{n_k}, por lo tanto $x_{n_k} \xrightarrow{k} L$.

b) Se tiene $\mathring{A} = \emptyset$, $\overline{A} = \partial A = A \cup \{p\}$ y A' puede ser p o $\emptyset$.

Observar que para cualquier conjunto A se tiene

$$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A = A \cup A'$$

La primer igualdad es inmediata, pues dado $x \in \mathbb{R}^2$, x puede ser un punto interior, exterior, o frontera de A (estas divisiones son excluyentes) y $\overline{A}^c$ está formado por todos los puntos exteriores a A. Para probar la segunda igualdad observar que los puntos de A' que no están en A necesariamente son puntos de frontera (pues no son interiores ni exteriores), y que los puntos frontera que no son de acumulación están en A (son puntos aislados).

- $A' = \{p\}$ o $A' = \emptyset$:
  Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $x \in A'$. Luego, por definición, para $\epsilon_1 = 1$ existe $x_{n_1} \in B(x, \epsilon_1)$ con $x_{n_1} \neq x$.
  Si tomamos $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $x_{n_2} \in B(x, \epsilon_2)$ con $x_{n_1} \neq x$. Además, podemos suponer $n_2 > n_1$, pues el punto x es de acumulación de A si y solo si es de acumulación de $A \setminus \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$.
  Repitiendo el procedimiento para $\epsilon_k = \frac{1}{k}$, conseguimos una subsucesión x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$. Por lo tanto $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$. Por el ejercicio 8, tenemos que necesariamente $x = p$. Es decir, si el conjunto A' es no vacío, entonces $A' = \{p\}$.
  Observación. Las dos opciones son posibles. Por ejemplo, si tomamos $x_n = 0$ para todo n, se tiene que $p = 0$ es aislado y por lo tanto $A' = \emptyset$. Por otro lado, si $x_n = \frac{1}{n}$, entonces 0 es de acumulación y $A' = \{0\}$.
- $\mathring{A} = \emptyset$:
  Esto es consecuencia directa de lo demostrado anteriormente. Si existiera $B(x,r) \subseteq A$, entonces toda la bola estaría formada por puntos de acumulación, contradiciendo que, a lo sumo, hay un único punto de acumulación.
- $\overline{A} = \partial A = A \cup \{p\}$
  Como $\mathring{A} = \emptyset$, $\overline{A} = \partial A$.
  Luego, si $A' = \{p\}$, $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \{p\}$.

Si $A' = \emptyset$ necesariamente $p \in A$, pues si $p \notin A$ y p no es de acumulación, entonces existe ϵ tal que $\forall n\ x_n \notin B(p,\epsilon)$, lo cual contradice la definición de límite para x_n. Por lo tanto $\overline{A} = A \cup \emptyset = A = A \cup \{p\}$.

c) ($\Rightarrow$): Como a es de acumulación, dado $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ existe un elemento $x_n \in B(a,\epsilon_n)$ con $x_n \neq x$. De esta forma construimos una sucesión x_n de elementos de $X \setminus \{a\}$ que converge a a: Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe N tal que $\forall n \geq N$, $\epsilon_n < \epsilon$. Por lo tanto, $\forall\ n \geq N$ se tiene $x_n \in B(a,\epsilon_n) \subseteq B(a,\epsilon)$. Es decir, $x_n \to a$.

($\Leftarrow$): Por definición de límite, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe N tal que $\forall n \geq N$ se tiene $x_n \in B(a,\epsilon)$. Como además $\forall n\ x_n \neq a$, entonces se tiene lo siguiente: Para todo $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $x_N \in B(a,\epsilon)$ y $x_N \neq a$. Esto implica que a es punto de acumulación de X:

$$B(a,\epsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

Para cualquier $\epsilon > 0$.

Ejercicios Complementarios