

Soluciones Práctico 5 – Integrales impropias

1. a) Sean $a > 0$ y $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(t) \geq 0$. Definimos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Mostrar que $F(x)$ es creciente y que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\iff F(x)$ está acotada superiormente.

- b) Sea $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que verifica $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq a$.

i) Probar que si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ también converge.

ii) Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge entonces $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge .

Solución:

- a) ■ Por T.F.C sabemos que F es derivable y $\forall x \in [a, +\infty) F'(x) = f(x) \geq 0$. Por lo tanto F es monótona creciente.
 ■ Recordamos que definimos

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

Queremos probar que dicho límite existe si y solo si F está acotada superiormente.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L \geq 0$, como F monótona creciente necesariamente $\forall x F(x) \leq L$, lo que implica que L es cota superior.

Por otro lado, si F es acotada superiormente y llamamos L a la menor de las cotas superiores, vemos que necesariamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$. Basta con ver que por ser la menor de las cotas superiores, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in [a, +\infty)$ tal que $F(x_0) \in (L - \epsilon, L]$. Como F es monótona creciente, si $x \geq x_0$, $F(x) \in (L - \epsilon, L]$, cumpliendo con la definición de límite, es decir:

$$\forall \epsilon > 0 \exists x_0 \text{ tal que } \forall x \geq x_0 |F(x) - L| < \epsilon$$

- b) 1) Sea $L_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$. Como G es monótona creciente, tenemos que $\forall x F(x) \leq G(x) \leq L_g$. Es decir, F es monótona creciente y acotada superiormente. Por la parte a), concluimos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe y es finito. Además, si llamamos L_f a dicho límite, se verifica $L_f \leq L_g$.
 2) Vemos que G es una función monótona creciente sin cota superior, pues si M fuera cota superior de G lo sería también de F , contradiciendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ (parte a)). Esto implica que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.

2. Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia

$$a) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\alpha(x)} dx \quad b) \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx \quad c) \int_0^1 \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad e) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Solución:

- a) Converge si y solamente si $\alpha > 1$, y en este caso converge a $\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{1}{\log(2)^{\alpha-1}}\right)$. Para el cálculo considerar el cambio de variable $u(x) = \log(x)$.

- b) Converge a $\frac{1}{2}$. Para el cálculo, considerar cambio de variable $u(x) = x^2$.
 c) Oscila. Considerar el cambio de variable $u(x) = \frac{1}{x}$.
 d) Converge a π .
 e) Converge a $\pi/2$. Considerar el cambio de variable $u(x) = e^x$.

3. Sea $k > 0$. Hallar el valor de k para que la integral $\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$ sea convergente y calcularla.

Solución: Buscamos el valor de $k > 0$ para que la siguiente integral sea convergente:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$$

La función a integrar es

$$\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} = \frac{x^2 + x - 2kx^2 - 2k^2}{2x^3 + 2kx + 2x^2 + 2k} = \frac{(1-2k)x^2 + x - 2k^2}{2x^3 + 2x^2 + 2kx + 2k}$$

Observamos que si $k = \frac{1}{2}$, la integral es de la misma clase que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$, y por lo tanto converge. De lo contrario, sería de la clase $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ que diverge. Por lo tanto el único valor de k para el cual la integral converge es $k = \frac{1}{2}$.

Para calcular la integral, buscamos una expresión para la primitiva de $\frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)}$

Una primitiva de $\frac{x}{2x^2+1}$ es $\frac{\log(2x^2+1)}{4}$ (basta con considerar el cambio de variable $u(x) = x^2$).

Una primitiva de $\frac{1}{(x+1)}$ es $\log(x+1)$.

Por lo tanto, una primitiva de la función a integrar es

$$\frac{1}{4} \log(2x^2 + 1) - \frac{1}{2} \log(x + 1) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2x^2 + 1}{(x + 1)^2} \right)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2(x+1)} dx &= \frac{1}{4} \log \left(\frac{2x^2 + 1}{(x + 1)^2} \right) \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{4} \left(\log(2) - \log \left(\frac{3}{4} \right) \right) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

4. a) Probar que para $x \rightarrow +\infty$ se cumple que

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x} \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

- b) Probar que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge mientras que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x} \right) dx$ diverge.

- c) ¿Por qué no aplica el criterio del equivalente en este caso?

5. Sean f y g dos funciones derivables en $[a, +\infty)$ y tales que sus derivadas f' y g' son funciones integrables en el mismo $[a, +\infty)$. Además se cumple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$.

- a) Probar que $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx$ converge si y solo si $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx$ converge.

b) Clasificar:

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ y $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2} dt$,
 2) $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2) dt$ ¹ y $\int_1^{+\infty} |\sin(x^2)| dx$.

Solución:

a) Sean f, g derivables con derivada de primer orden integrable, definidas en $[a, +\infty)$ tales que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f'(x)g(x)dx \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} f(x)g(x) \Big|_a^T - \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(x)g'(x)dx \\ &= (L - f(a)g(a)) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

Por lo tanto es claro que $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ converge si y solo si $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ converge.

- b)
 - Convergente (en $x = 0$ es equivalente a 1, para la integral a partir de $x = 1$ se deduce de la parte a).
 - Convergente (converge absolutamente).
 - Convergente (integración por partes como en la sugerencia en el dominio $[1, +\infty)$).
 - Divergente (por comparación con la función poligonal que va conectando máximos y mínimos de la función $|\sin(x^2)|$).

6. Clasificar:

- a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ b) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$ c) $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx$ d) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ e) $\int_0^{+\infty} \sin^2(t) dt$
- f) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx$ h) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1} dx$ i) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ j) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
- k) $\int_0^{+\infty} e^{x^2 - \frac{1}{x^2}} dx$ l) $\int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{-1}{x-1}}}{(x-1)^2} dx$ m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha(x) \cos^\beta(x)}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

- a) **Convergente** (observar que la función a integrar es par, y comparar con $\frac{1}{x^2}$ para $x > 1$).
- b) **Divergente** (equivalente a $\frac{1}{x}$).
- c) **Convergente** (integración por partes).
- d) **Convergente** (converge absolutamente, pues $|\frac{\sin(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$).
- e) **Divergente** (se integra una función periódica y positiva).
- f) **Divergente** (equivalente en infinito a $\frac{1}{x}$).
- g) **Convergente** (observar primero que se integra una función impar y luego ver que en $+\infty$ es equivalente a $\frac{x}{e^x}$, cuya integral impropia es convergente).

¹Sugerencia: escribir $\operatorname{sen}(t^2) = 2t\operatorname{sen}(t^2)\frac{1}{2t}$ y usar la fórmula de partes.

- h) **Divergente** (observar primero que se integra una función par, y luego ver que en $x = 1$ la función es equivalente a $\frac{1}{x-1}$).
- i) **Convergente** (en $x = 0$ es equivalente a $\frac{1}{\sqrt{x}}$, y para estudiar la convergencia en infinito se hace integración por partes).
- j) **Convergente** (utilizar cambio de variable $u(x) = \sqrt{x}$).
- k) **Divergente** (la función que se integra está acotada en un entorno de 0, y en $+\infty$ es equivalente a e^{x^2}).
- l) **Divergente** (considerar el cambio de variable $u(x) = \frac{-1}{x-1}$).
- m) **Convergente si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$, de lo contrario diverge** (en $x = 0$ es equivalente a $\frac{1}{x^\alpha}$ y en $x = \pi/2$ es equivalente a $\frac{1}{(\pi/2-x)^\beta}$).

Veamos en detalle los ejercicios **3g)** y **3i)**.

g) Estudiaremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cosh(x)^{-1} x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^{-1} x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2x}{e^x + e^{-x}} \right) dx$$

La función que se integra es impar: si $f(x) = \cosh(x)x$, entonces $f(-x) = -f(x)$, por lo tanto, podemos afirmar que si la serie converge entre 0 y $+\infty$, la integral buscada será nula.

La integral $\int_0^{+\infty} \cosh(x)x dx$ es de primera especie. Basta con probar que $\int_1^{+\infty} \cosh(x)x dx$ es convergente. Podemos ver que esta última integral es equivalente a $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$, pues

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2x} \right) = 1$$

Vemos que $\forall x > 0$:

$$\frac{x}{e^x} \leq \frac{6x}{x^3} = \frac{6}{x^2}$$

Pues esta desigualdad ocurre si y solo si $\frac{x^3}{6} \leq e^x$, lo cual se verifica trivialmente si recordamos que $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{6}{x^2} dx$ converge, por criterio de comparación $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ converge y por lo tanto $\int_1^{+\infty} \cosh(x)x dx$ converge.

i) Estudiaremos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Vemos que es una integral impropia mixta. Por lo tanto separamos su estudio en dos partes:

$$A = \int_0^1 \cos(x)x^{-1/2} dx$$

$$B = \int_1^{+\infty} \cos(x)x^{-1/2} dx$$

Primero vemos que A converge por criterio de equivalentes: la integral de $\cos(x)x^{-1/2}$ es equivalente a la de $x^{-1/2}$ en $x = 0$ ya que $\cos(0) = 1$, y sabemos que $\int_0^1 x^{-1/2} dx$ converge.

Por otro lado, para calcular B hacemos integración por partes:

$$\begin{aligned} B &= \left. \text{sen}(x)x^{-1/2} \right|_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \text{sen}(x)x^{-3/2} dx \\ &= (0 - \text{sen}(1)) + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^{3/2}} dx \end{aligned}$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}} dx$ converge absolutamente (pues $\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$ converge), concluimos que B es una serie convergente.

Como A y B son convergentes, lo es la integral del ejercicio.

7. Determinar para qué valores de α las siguientes integrales impropias son convergentes.

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1} dx \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha} dx$$

Solución:

a) **Converge** si $\alpha \in (-1, 0)$. Observar que en $x = 0$ es equivalente a integrar x^α y en $+\infty$ es equivalente a integrar $x^{\alpha-1}$.

b) **Converge** si $\alpha \in (0, 1/2)$. Observar que en $x = 0$ es equivalente a integrar $x^{-2\alpha}$, y que en $+\infty$ es equivalente a integrar $e^{-\alpha x^2}$.

Veamos en detalle el ejercicio **7b**). La integral impropia a estudiar es

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha} dx$$

La integral es mixta, por lo tanto dividimos su estudio en dos partes:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha} dx, \quad B = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha} dx$$

Buscamos los valores de α para los cuales A y B sean convergentes simultáneamente, de forma que $I = A + B$ también sea convergente.

Recordamos que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$, por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha} dx \quad \text{es equivalente a} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}} dx$$

Dicha integral converge si y solo si $\alpha < 1/2$.

Por otro lado:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha} dx \quad \text{es equivalente a} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x^2}} dx$$

Esta última integral converge si y solo si $\alpha > 0$

Concluimos que para que las integrales A y B sean convergentes simultáneamente, $\alpha \in (0, 1/2)$.

8. Usando el criterio integral clasificar las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2} \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\log(n)}} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$$

Solución:

a) **Convergente** (considerar cambio de variable $u(x) = x^2$).

b) **Divergente** (considerar cambio de variable $u(x) = \log(x)$).

c) **Convergente** (integración por partes).

Veamos en detalle el ejercicio **8c**). Queremos clasificar usando el criterio integral la serie

$$\sum_1^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$$

Para ello consideramos la función $f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$.

Su derivada es $f'(x) = \frac{x-2x\log(x)}{x^4}$. Observamos que si $x \geq 1$ $f(x) \geq 0$ y si $x \geq e^{1/2}$ $f'(x) \leq 0$. Es decir, la función es positiva y monótona decreciente a partir de $x = e^{1/2} < 2$, por lo que estamos dentro de las hipótesis del criterio serie-integral.

El comportamiento de la serie será el mismo que el de la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx$$

Integrando por partes obtenemos que

$$\int_1^T \frac{\log(x)}{x^2} dx = \frac{-\log(x)}{x} \Big|_1^T + \int_1^T \frac{1}{x^2} dx$$

Tomando límite cuando $T \rightarrow +\infty$ obtenemos que la integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es convergente.

9. Estudiar la convergencia de $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ y $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Solución:

Observamos primero que $f(x) = \frac{1}{x \log(x)}$ es positiva y monótona creciente para $x > 2$, por lo que estamos en condiciones de utilizar el criterio integral.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_2^T \frac{1}{x \log(x)} dx$$

Para calcular una primitiva, basta con considerar el cambio de variable $u(x) = \log(x)$:

$$\int \frac{1}{x \log(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \log(u) = \log(\log(x))$$

Entonces:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \log(\log(T)) - \log(\log(2)) = +\infty$$

Por lo tanto, por criterio integral, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log(n)} = +\infty$.

10. Probar que $\int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx$ converge y calcularla. Sugerencia: hacer partes con $1 \cdot \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)$.

Solución:

Calulemos

$$\int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx &= x \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \left(\frac{1}{1 + a^2/x^2}\right) \left(\frac{-2a^2}{x^3}\right) dx \\
&= x \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{2a^2}{x^2 + a^2} dx \\
&= x \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \Big|_{x_1}^{x_2} + 2a \int_{x_1}^{x_2} \frac{1/a}{(\frac{x}{a})^2 + 1} dx \\
&= x \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \Big|_{x_1}^{x_2} + 2a \int_{x_1/a}^{x_2/a} \frac{1}{u^2 + 1} dx \\
&= x \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \Big|_{x_1}^{x_2} + (2a) \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{x_1}^{x_2}
\end{aligned}$$

Queremos estudiar los límites cuando $x_1 \rightarrow 0$ y cuando $x_2 \rightarrow +\infty$.

Es claro que el sumando de la derecha tiende a $2a(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(0)) = 2a\frac{\pi}{2} = a\pi$. Para calcular el sumando de la izquierda, debemos calcular dos límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{a}{x^2} = 0 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2a^2}{x^3 + a^2x}\right) (-x^2) = 0
\end{aligned}$$

(Observar que en el cálculo del límite en $+\infty$ se utilizó la regla de l'Hôpital).

Por lo tanto concluimos que la integral converge y además

$$\int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx = a\pi$$