Solución Práctico 4 - Series

Ejercicio 1

Recordar la siguiente igualdad (usada para calcular las series geométricas):

$$\sum_{n=k}^{n=k+l} r^n = \frac{r^k - r^{k+l+1}}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

a) **Converge** a $\frac{3}{2}$

b) **Converge** a $\frac{1/9}{1-1/\sqrt{3}}$

c) **Diverge** a $+\infty$

d) **Converge** a $\frac{11}{6}$

e) **Diverge** a $+\infty$

f) **Converge** a $\frac{1}{4}$

g) **Converge** a $\frac{-\pi}{4}$

Veamos con detalle el ejercicio **1f**. La serie a estudiar es

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Intentaremos imitar la estrategia del cálculo de la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, en donde escribimos a la serie como una serie telescópica (ver notas). Queremos escribir al término general como suma de tres factores:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

Esto genera el sistema

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 5a+4b+3c &= 1 \\ 6a+3b+2c &= 0 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 2, \quad c = -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{-1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3}{2(n+3)} \\ &= \frac{-1}{2(n+1)} + \frac{4}{2(n+2)} + \frac{-3}{2(n+3)} \\ &= \left(\frac{-1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right) + \left(\frac{3}{2(n+2)} + \frac{-3}{2(n+3)}\right) \end{aligned}$$

Si llamamos $x_n = \frac{1}{2n}$, obtenemos que

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = (-x_{n+1} + x_{n+2}) + (3x_{n+2} - 3x_{n+3})$$

Por lo que la serie, se vuelve la suma de dos series telescópicas:

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to+\infty} -x_2 + x_{n+2} + 3x_3 - 3x_{n+3} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 2

Criterio de comparación:
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos, tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n > n_0$. Entonces:

- *Si $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ también.*
- *Si $\sum a_n$ diverge, $\sum b_n$ también.*

a) $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ **converge**, pues $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$ para $n \geq 2$ y $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

b) $\sum_1^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$ **converge**, pues a partir de cierto N también $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n^2}$

Probemos la última afirmación de b): $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n^2}$:
La desigualdad es cierta si y solo si $\frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2} \geq 1$. Para probarla, estudiamos la función $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$. Se tiene que a partir de cierto $K > 0$, si $x > K$, $f(x) > 1$. Para probar esto, vemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Pues si consideramos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u^4} = +\infty$$

(La última igualdad se justifica con la regla de l'Hôpital).
Por último, el hecho de que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, implica que a partir de un cierto K, $f(x) > 1$ y por lo tanto, a partir del próximo natural N mayor que K se verifica que $f(n) > 1$ para todo $n > N$, que es lo que queríamos probar.

Ejercicio 3

Criterio de equivalentes:
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos.

- *Si* $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$*, entonces ambas sucesiones son de la misma clase (equivalentes)*
- *Si* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ *y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también.*

a) $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **converge**. Es equivalente a $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ **diverge**. Equivalente a $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n}$

c) $\sum_1^{+\infty} \frac{log(n+1)-log(n)}{10n+1}$ **converge**. Equivalente a $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Ejercicio 4

Criterio del cociente:
Sea a_n *una serie de términos positivos tal que* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$*. Entonces:*

- *Si* $L < 1$, $\sum a_n$ *converge.*
- *Si* $L > 1$, $\sum b_n$ *diverge.*

a) **Converge**

b) **Converge**

Veamos en detalle el **4b**: $\sum \frac{n!}{n^n}$

$$\lim \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right) \left(\frac{n^n}{n!} \right) = \lim \frac{(n+1)}{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n}$$
$$= \lim \Big(1 + 1/n \Big)^{-n} = \frac{1}{e} < 1$$

Ejercicio 5

Criterio de la raíz:
Sea a_n *una serie de términos positivos tal que* $\lim a_n^{1/n} = L$*. Entonces:*

- *Si* $L < 1$, $\sum a_n$ *converge.*
- *Si* $L > 1$, $\sum b_n$ *diverge.*

a) **Converge**

b) **Converge**

Ejercicio 6

Sabemos que para todo n $a_n \geq 0$ y que $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge.

a) $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ **diverge**, porque el término general tiende a $+\infty$.

b) $\sum_1^{+\infty} a_n^2$ **converge**, por criterio de comparación: a partir de cierto N, $a_n < 1$ y por lo tanto (a partir de ese N) $a_n^2 < a_n$.

c) No se puede afirmar nada sobre $\sum_1^{+\infty} \sqrt{a_n}$. Veamos dos ejemplos con comportamientos distintos:
Si $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum_1^{+\infty} \sqrt{a_n}$ diverge.
Si $a_n = \frac{1}{n^4}$, $\sum_1^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

d) $\sum_1^{+\infty} log(1 + a_n)$ **converge** por criterio de equivalentes: la serie es equivalente a $\sum_1^{+\infty} a_n$.

Ejercicio 7

Criterio de Leibnitz:
Si a_n es una serie monótona decreciente que tiende a 0, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

a) **Converge absolutamente**, y por lo tanto converge.

b) **Converge**, pero no absolutamente.

c) **No converge** ni converge absolutamente.

d) **Converge absolutamente**, y por lo tanto converge.

Ejercicio 8

a) **Diverge**, por equivalencia con $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n}$

b) **Diverge**, por comparación con $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n+1}$

c) **Converge**, por criterio de la raíz.

d) **Converge**, por criterio de Leibnitz.

Problemas Complementarios

Ejercicio 1

Intentaremos calcular primero cuánto se pinta en el paso n, para luego sumar lo pintado en todos los pasos (calcular la serie). Luego, haremos lo mismo con el perímetro.

Observamos lo siguiente:

	Lado cuadrado	Área del cuadrado	Cantidad de cuadrados
Paso 1	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	1
Paso 2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	8
Paso 3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^6$	8^2
$\vdots$			
Paso n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$	8^{n-1}

Por lo tanto, en la etapa n se pinta un área a_n, donde

$$a_n = 8^{n-1}\frac{1}{3^{2n}} = 8^{n-1}\frac{1}{9^n}$$

Sumando las áreas obtenemos que el área total A es

$$A = \sum_1^{+\infty} a_n = \sum_1^{+\infty} 8^{n-1}\frac{1}{9^n} = \frac{1}{8}\sum_1^{+\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{8}\left(\frac{8/9}{1-8/9}\right) = 1$$

Para calcular el perímetro, observar que en la etapa n la suma de los perímetros que se agregan es p_n, donde

$$p_n = 8^{n-1}\frac{4}{3^n}$$

Por lo que el perímetro total P es

$$P = \sum_{1}^{+\infty} p_n = \sum_{1}^{+\infty} 8^{n-1}\frac{4}{3^n} = \frac{4}{8}\sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{8}{3}\right)^n = +\infty$$

Nota: Si bien parece poco intuitivo que por un lado estemos pintando un área igual al área total del cuadrado (en términos de medida, podríamos decir que pintamos "todo" el cuadrado) pero que al mismo tiempo el conjunto pintado tenga un perímetro infinito, no está alejado de la realidad. De hecho, en la naturaleza se da algo similar en cuestiones de volúmenes y superficies, por ejemplo en órganos como el intestino delgado, cuyas rugosidades generan una superficie de absorción de unos $250m^2$. A su vez, este problema pone en evidencia que medir longitudes no resulta siempre intuitivo (buscar Coastline paradox, o paradoja de la línea de costa).

Ejercicio 2

Observar que cada iteración multiplica por 4 la cantidad de lados del copo de nieve de Koch. Por lo que la cantidad de lados luego de n iteraciones es $N_n = 4N_{n-1} = (4^n)3$. Ahora si el triangulo inicial tiene lado de largo $l_0 = l$, el largo de cada lado del copo luego de n iteraciones es $l_n = l_{n-1}/3 = l/(3^n)$.

De donde se sigue que el perímetro luego de n iteraciones es

$$P_n = N_n l_n = 3l\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

y por lo tanto el perímetro sería infinito.

En cada iteración se añade un triángulo en cada lado de la iteración anterior, por lo que el número de triángulos que se agregan en la iteración n es $T_n = N_{n-1} = \frac{3}{4}4^n$.

El área de cada nuevo triángulo añadido en una iteración es $1/9$ del área de cada triángulo añadido en la iteración anterior, por lo que el área de un triángulo añadido en la iteración n es $a_n = \frac{a_{n-1}}{9} = \frac{a_0}{9^n}$ siendo a_0 el área del triángulo inicial. Por lo tanto el área total añadida en la iteración n es $b_n = T_n a_n = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n a_0$.

Por lo tanto, el área del copo luego de n iteraciones es

$$A_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k = a_0\left(1 + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right) = a_0\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right) = \frac{a_0}{5}\left(8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

y por lo tanto el área del copo de nieve es $\frac{8}{5}a_0$ y si la escribimos en función de l nos queda

$$\frac{2l^2\sqrt{3}}{5}.$$

Ejercicio 3

Tenemos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series divergentes de términos no negativos. Entonces:

- Como $max\{a_n, b_n\} \geq a_n$ y $\sum a_n$ es divergente, por criterio de comparación $\sum max\{a_n, b_n\}$ diverge.
- Sin embargo, no podemos afirmar nada sobre la serie asociada a $min\{a_n, b_n\}$. Basta con dar un ejemplo para el cual dicha serie converja, y otro para la cual diverja:

  - Consideramos primero $a_n = b_n$. En este caso es claro que $min\{a_n, b_n\}$ diverge.

  - Si ahora consideramos $a_n = 1 + (-1)^n$ y $b_n = 1 + (-1)^{n+1}$, observamos que a_n y b_n simplemente alternan entre los valores 0 y 2, pero esta alternancia está defasada. Por lo tanto $min(a_n, b_n) = 0$ para cualquier n, lo que implica que $\sum_0^{+\infty} min(a_n, b_n) = 0$